

УДК 539.375

## РАЗРУШЕНИЕ ХРУПКИХ ТЕЛ С ПЛОСКИМИ ВНУТРЕННИМИ И КРАЕВЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Востров В. К.

Рассматривается хрупкое полупространство с одной или двумя симметричными плоскими краевыми трещинами, испытывающее плоскую деформацию. На бесконечности действуют сжимающие напряжения, вызывающие налегание противоположных берегов трещин (трещины) и их взаимное проскальзывание. Кроме того, рассматривается двухосное растяжение на бесконечности неограниченного хрупкого тела с плоской трещиной. Тело находится в условиях плоской деформации и растягивается в двух взаимно ортогональных направлениях, одно из которых совпадает с направлением трещины.

Для этих задач определяются границы применимости решений, основанных на использовании известного критерия разрушения [1—4] и дается более общее решение, приводящее к условию технической прочности рассматриваемых хрупких тел при отсутствии взаимного перемещения берегов трещин.

**1. Общие положения.** Обобщение дается на основании следующего принципа [5]: все объемы, заключенные внутри сферы диаметра

$$(1.1) \quad \Delta \approx \frac{4}{3} \frac{ET}{S_0^2}$$

равнопрочны, если максимальные ( $\epsilon_1$ ) и минимальные ( $\epsilon_3$ ) относительные удлинения диаметров этих сфер соответственно одинаковы и одинаковы относительные изменения объема ( $\epsilon$ ) внутри них. Здесь  $E$  — модуль Юнга,  $T$  — плотность поверхностной энергии,  $S_0$  — сопротивление отрыву (напряжение, при котором происходит хрупкий разрыв одноосно растянутого стержня).

Макронапряжениями (основными) называют величины [5]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_k &= 2G \left[ \epsilon_k + \nu \frac{\epsilon}{1-2\nu} \right], \quad k=1, 3 \\ \sigma_2 &= 2G \left[ (1+\nu) \frac{\epsilon}{1-2\nu} - \epsilon_1 - \epsilon_3 \right] \end{aligned}$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Считается, что в твердом теле образуются трещины отрыва, если нарушается условие прочности [5]

$$(1.3) \quad \sigma_1 + \frac{S_0}{S_*} (|\sigma_2| + |\sigma_3|) < S_0$$

где  $S_*$  — абсолютная величина напряжения, при котором происходит хрупкое разрушение одноосно сжатого стержня.

**2. Двухосное нагружение неограниченного тела с трещиной.** Введем декартову систему координат  $x, y$  с началом в центре трещины и осью  $x$ , совпадающей с линией трещины. На бесконечности растяжение производится в направлении осей  $x, y$  напряжениями  $\sigma_x^0, \sigma_y^0$  соответственно.

Асимптотика поля перемещений  $u_x, u_y$  и объемной деформации  $\epsilon$  в случае плоской деформации имеет вид [6]

$$(2.1) \quad 2Gu_x = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} K_1 \left( (2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}(\kappa + 1)(\sigma_y^0 - \sigma_x^0)(l + r \cos \theta) \\
2Gu_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} K_I \left( (2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \\
& -\frac{1}{4}(\kappa - 3)(\sigma_y^0 - \sigma_x^0)r \sin \theta \\
2G\varepsilon &= (\kappa - 1) \left[ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_x^0 - \sigma_y^0) \right], \quad \kappa = 3 - 4\nu
\end{aligned}$$

где  $l$  — полудлина трещины  $l \gg \Delta$ ,  $r, \theta$  — полярные координаты с началом в вершине  $x = l$  трещины.

Относительное удлинение  $\varepsilon_n$  сферы диаметра  $\Delta$  в произвольном направлении  $n$  на плоскости  $x, y$  вычисляется по формуле [7]

$$(2.2) \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\Delta} [(u_x(r_1, \theta_1) - u_x(r_2, \theta_2)) \cos \psi + (u_y(r_1, \theta_1) - u_y(r_2, \theta_2)) \sin \psi]$$

где  $r_0, \theta_0$  — полярные координаты центра сферы,  $\psi$  — угол, составляемый направлением  $n$  с осью  $x$ ,  $r_1, \theta_1$  и  $r_2, \theta_2$  — полярные координаты точек пересечения сферы с прямой, проходящей через центр сферы в направлении  $n$

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= [r_0^2 \pm \Delta r_0 \cos(\theta_0 - \psi) + (\Delta/2)^2]^{1/2} \\
\operatorname{tg} \theta_{1,2} &= (2r_0 \sin \theta_0 \pm \Delta \sin \psi) (2r_0 \cos \theta_0 \pm \Delta \cos \psi)^{-1}
\end{aligned}$$

Макродеформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  представляют собой соответственно максимальное и минимальное значения относительного удлинения при изменении угла  $\psi$  в интервале  $0 \leq \psi < \pi$ .

Относительное изменение ( $\varepsilon$ ) объема любой сферы равно объемному расширению в центре этой сферы. Поэтому при наличии асимптотических формул (2.1) определение макронапряжений не представляет затруднений.

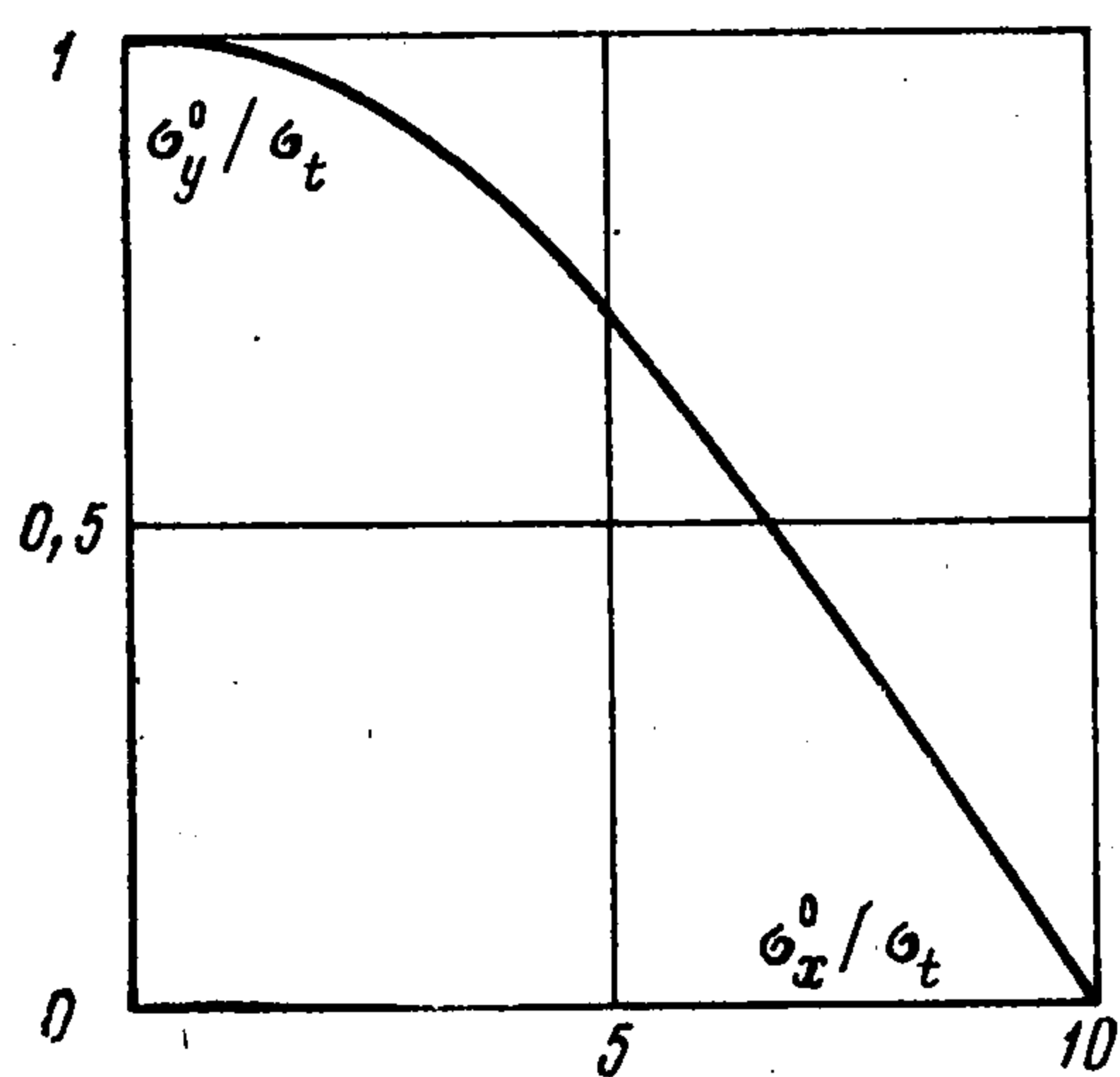
Расчеты по условию прочности (1.3) и формулам (2.1)–(2.2) показали, что максимальные макронапряжения около конца трещины достигаются на направлениях, составляющих некоторые углы  $\pm \beta$  с направлением трещины; эти макронапряжения практически постоянны при изменении  $\beta$  на  $\pm 15^\circ$ .

При одноосном растяжении в направлении, ортогональном трещине, угол  $\beta$  равен примерно  $77^\circ$  и максимальное макронапряжение приблизительно на 25% (в зависимости от коэффициента Пуассона) превосходит соответствующее макронапряжение на продолжении трещины [5]. Аналогичный результат для идеализированных напряжений (в соответствии с общепринятым понятием напряжений в точке) приведен в [8], где угол  $\beta$  равен  $60^\circ$ .

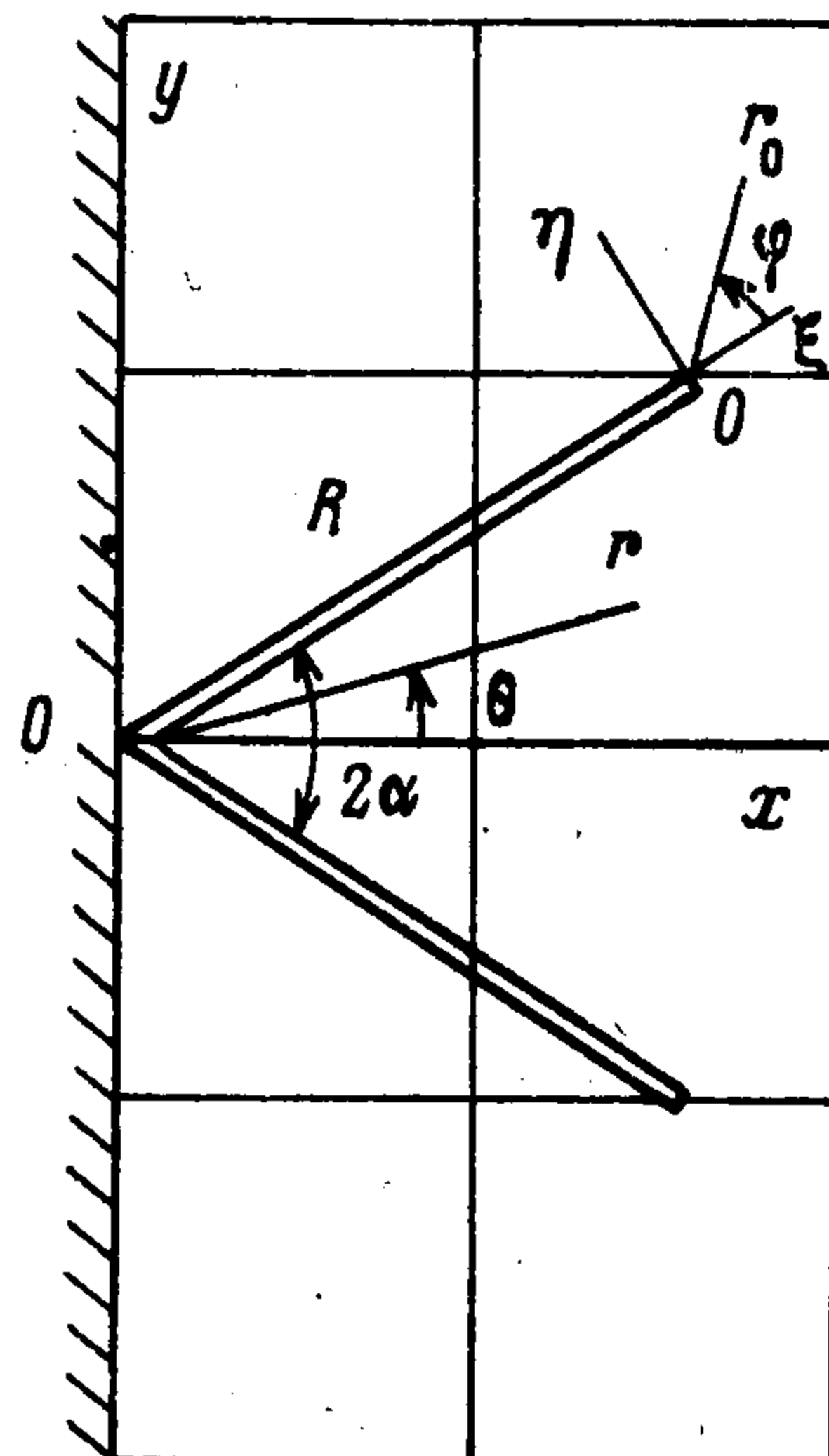
Пользуясь условием прочности (1.3), получаем нагрузку трещинообразования при двухосном растяжении. График этой нагрузки приведен на фиг. 1, где  $\sigma_t$  — нагрузка трещинообразования при одноосном растяжении, ортогональном трещине. В расчетах принято:  $\nu = 0,25$ ,  $S_0/S_* = 0$ , а для  $\sigma_t$  имеет место приближенная формула [5]  $\sigma_t \approx (\Delta/2l)^{1/2}$ .

Из приведенного графика следует, что двухосность нагружения существенно влияет на разрушение тела только в случае, если растягивающее напряжение  $\sigma_x^0$  превышает напряжение, ортогональное трещине ( $\sigma_y^0$ ). При  $\sigma_x^0 \lesssim \sigma_y^0$  нагрузка трещинообразования близка к постоянной и при использовании формулы (1.1) для структурного параметра совпадает с разрушающей нагрузкой по Гриффитсу.

При достижении нагрузки трещинообразования имеют место примерно одинаковые макронапряжения у конца трещины для различных микрообъемов в некоторой области. В силу этого направления распространения макротрещины чувствительны к структурным неоднородностям. При этом может быть несколько направлений распространения макротрещины (ветвление трещины). С указанной точки зрения возможно (в некотором интервале) любое направление, для которого длина трещины имеет реальное значение. По-видимому, наиболее вероятными будут те направления, для которых



Фиг. 1



Фиг. 2

длина возникающей микротрещины будет наибольшей. При этом длина микротрещины определяется тем, что макронапряжения на ее конце удовлетворяют условию (1.3), в котором знак неравенства переходит в равенство.

При одноосном растяжении в направлении, ортогональном трещине, наиболее вероятным будет развитие трещины в ее первоначальном направлении, несмотря на то, что наиболее напряженные микрообъемы в начальной фазе трещинообразования расположены под углом к продолжению трещины. Магистральная трещина возникает внутри тела в плоскости симметрии, после перераспределения напряжений, вызванного разрушением наиболее напряженных микрообъемов (появлением нераспространяющихся микротрещин). Если при этом разрушающая нагрузка  $\sigma_t^0$  известна из эксперимента, то из последней формулы приближенно определяется величина структурного параметра [5]  $\Delta \approx 2l (\sigma_t^0/S_0)^2$ . Но, тем не менее, для сопоставления с решениями, которые получаются путем применения известного критерия разрушения [1—4], будем пользоваться формулой (1.1). Эта формула следует из предыдущей, если в ней заменить экспериментальную величину  $\sigma_t^0$  на разрушающую по Гриффитсу нагрузку.

Недостаток известного способа расчета заключается в том, что нагрузка трещинообразования не зависит от напряжения  $\sigma_x^0$  и при выполнении неравенства  $\sigma_y^0 < \sigma_t^0$  прочность тела с трещиной будет неограниченной. Использование понятия макронапряжений и условия прочности (1.3) устраняет эти недостатки и позволяет оценить влияние двухосности нагружения на разрушение хрупких тел с трещиной (фиг. 1).

3. Хрупкая полуплоскость с двумя симметричными краевыми трещинами. В этом случае в силу симметрии можно рассматривать четверть плоскости с одной трещиной (фиг. 2). Напряженное состояние тела будет однородным, если  $K_\alpha^0 \leq 0$ , где

$$K_\alpha^0 = \sigma_0 K_\alpha - \tau_c$$

$$K_\alpha = \cos \alpha (\sin \alpha - \eta_0 \cos \alpha)$$

$2\alpha$  — угол между направлениями трещин,  $\eta_0$  — коэффициент трения,  $\tau_c$  — коэффициент сцепления,  $\sigma_0$  — абсолютная величина сжимающего напряжения на бесконечности. Когда это условие нарушается, происходит проскальзывание берегов трещины. Граничные условия при этом при-

нимают вид

$$(3.1) \quad \theta = 0: u_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad r \geq 0$$

$$(3.2) \quad \theta = \frac{\pi}{2}: \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad r \geq 0$$

$$(3.3) \quad \theta = \alpha: [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = [u_\theta] = 0, \quad r \geq 0$$

$$(3.4) \quad \theta = \alpha: \tau_{r\theta} = \eta_0 \sigma_\theta + K_\alpha^\circ, \quad 0 \leq r < 1$$

$$(3.5) \quad \theta = \alpha: [\sigma_r] = 0, \quad r > 1$$

Здесь  $r$  — полярный радиус-вектор, отнесенный к длине  $R$  трещины,  $R \gg \Delta$ ,  $\theta$  — полярный угол. Компоненты  $\sigma_{ik}$ ,  $u_i$  представляют собой разность между полными напряжениями и перемещениями и соответствующими величинами в теле без трещин. Квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобках, при переходе через линию трещины

$$[\sigma_{ik}] = \sigma_{ik}(r, \alpha + 0) - \sigma_{ik}(r, \alpha - 0)$$

$$[u_i] = u_i(r, \alpha + 0) - u_i(r, \alpha - 0)$$

К соотношениям (3.1)–(3.5) необходимо добавить условие на бесконечности

$$(3.6) \quad \sigma_{ik} = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Общее решение  $\sigma_{ik}^*$ ,  $u_r^*$ ,  $u_\theta^*$  в изображениях по Меллину однородной плоской задачи теории упругости для напряжений  $\sigma_{ik}$  и перемещений  $u_r$ ,  $u_\theta$  (отнесенных к характерному размеру  $R$ ) имеет вид

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 2Gu_r^* &= (p + \kappa)(Ac_+ + Bs_+) + (p - 1)(Cc_- + Ds_-) \\ 2Gu_\theta^* &= (p - \kappa)(As_+ - Bc_+) + (p - 1)(Cs_- - Dc_-) \\ \sigma_r^* &= -p[(p + 3)(Ac_+ + Bs_+) + (p - 1)(Cc_- + Ds_-)] \\ \sigma_\theta^* &= p(p - 1)[Ac_+ + Bs_+ + Cc_- + Ds_-] \\ \tau_{r\theta} &= -p[(p + 1)(As_+ - Bc_+) + (p - 1)(Cs_- - Dc_-)] \\ c_\pm &= \cos(p \pm 1)\theta, \quad s_\pm = \sin(p \pm 1)\theta \end{aligned}$$

где  $\kappa = 3 - 4\nu$  — для плоской деформации и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  — для плосконапряженного состояния,  $A, B, C, D$  — произвольные функции комплексного параметра  $p$ , определяемые из граничных условий. Будем считать, что коэффициенты  $A_1, B_1, C_1, D_1$  соответствуют клину раствора  $0 \leq \theta \leq \alpha$ , а  $A_2, B_2, C_2, D_2$  — клину  $\alpha \leq \theta \leq \pi/2$ .

Граничные условия (3.1), (3.3), (3.5) удовлетворяются, если положить

$$B_1(p) = D_1(p) = 0$$

$$A_2(p) = A_1(p) - \cos(p + 1)\alpha \Phi^-(p)/(4p)$$

$$B_2(p) = -\sin(p + 1)\alpha \Phi^-(p)/(4p)$$

$$C_2(p) = C_1(p) + \cos(p - 1)\alpha \Phi^-(p)/(4p)$$

$$D_2(p) = \sin(p - 1)\alpha \Phi^-(p)/(4p)$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 [\sigma_r(r, \alpha)] r^p dr$$

Внося эти выражения в граничные условия (3.2) и решая полученные уравнения, будем иметь

$$A_1(p) = S_1(p) \Phi^-(p)/(4p \sin p\pi)$$

$$C_1(p) = S_2(p) \Phi^-(p)/(4p \sin p\pi)$$

$$S_1(p) = (p - 1) \sin(p - 1)\alpha - p \sin((p + 1)\alpha - \pi) + \\ + \sin(p\pi - (p + 1)\alpha)$$

$$S_2(p) = (p+1) \sin(p+1)\alpha - p \sin((p-1)\alpha + \pi) - \sin(p\pi - (p-1)\alpha)$$

Изображения нормальных и касательных напряжений на линии трещины принимают вид

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta}^* &= (p-1) [S_1(p) \cos(p+1)\alpha + S_2(p) \cos(p-1)\alpha] \Phi^-(p)/q \\ \tau_{r\theta}^* &= -[(p+1) S_1(p) \sin(p+1)\alpha + (p-1) S_2(p) \times \\ &\quad \times \sin(p-1)\alpha] \Phi^-(p)/q \\ q &= 4 \sin p\pi \end{aligned}$$

Подстановка полученных изображений в преобразованное по Меллину условие трения (3.4) приводит к функциональному уравнению Винера — Хопфа

$$(3.9) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{4} \operatorname{tg} p \frac{\pi}{2} G_0(p) \Phi^-(p) &= \Phi^+(p) + \frac{K_{\alpha}^{\circ}}{p+1} \\ G_0(p) &= \frac{G_1(p) + 2\eta_0(p-1)G_2(p)}{2 \sin^2 p \frac{\pi}{2}} \\ G_1(p) &= (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \left( \sin 2p \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + p \sin 2\alpha \right) + \\ &\quad + 2(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) \left( \sin^2 p \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - p^2 \cos^2 \alpha \right) \\ G_2(p) &= p \sin 2p\alpha \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha \sin^2 p \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ \Phi^+(p) &= \int_1^{\infty} (\tau_{r\theta}(r, \alpha) - \eta_0 \sigma_{\theta}(r, \alpha)) r^p dr \end{aligned}$$

При отсутствии трения из (3.9) следует уравнение, полученное [9] в связи с начальным развитием линий скольжений от свободной границы тела.

Искомые изображения  $\Phi^{\pm}(p)$  аналитичны в полуплоскостях  $\operatorname{Re}(p) < 1$  и  $\operatorname{Re}(p) > -1$  соответственно. При  $p \rightarrow \infty$  для этих изображений имеют место асимптотические формулы [10]

$$(3.10) \quad \Phi^-(p) = -2\sqrt{2} K_{II} / \sqrt{Rp}, \quad \Phi^+(p) = K_{II} / \sqrt{-2Rp}, \quad p \rightarrow \infty$$

где  $K_{II}$  — коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины.

Коэффициент  $G_0(p)$  уравнения (3.9) не имеет ни полюсов, ни нулей вдоль граничной прямой  $L = \{p = -1 + it, |t| < \infty\}$  полосы аналитичности изображений  $\Phi^{\pm}(p)$ , если  $\alpha > \rho_0$ , где  $\rho_0$  — угол внутреннего трения  $\eta_0 = \operatorname{tg} \rho_0$ . В силу условия  $\alpha < \pi/2$  этот коэффициент стремится к единице при  $p \rightarrow \infty$  вдоль прямой  $L$ . Для  $\alpha = \rho_0$  функция  $G_0(p)$  имеет нуль первого порядка при  $p = -1$

$$G_0(-1) = 4 \sin 2\alpha K_{\alpha}$$

Обозначим через  $D^+$  и  $D^-$  области, лежащие слева и справа от прямой  $L$  соответственно. Тогда для значений  $\rho_0 < \alpha < \pi/2$  коэффициент уравнения (3.9) допускает факторизацию

$$(3.11) \quad \begin{aligned} G_0(p) &= \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \\ \exp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G_0(s) ds}{s-p} &= \begin{cases} G^+(p) & p \in D^+ \\ G^-(p) & p \in D^- \end{cases} \end{aligned}$$

Функции  $G^\pm(p)$  аналитичны и не имеют нулей в областях  $D^\pm$ , при этом  $G^\pm(p) \rightarrow 1$  при  $p \rightarrow \infty$ .

Для решения неоднородной задачи сопряжения (3.9) на прямой  $L$  воспользуемся известным [10, 11] представлением

$$(3.12) \quad p \operatorname{ctg} p \frac{\pi}{2} = 2K^+(p) K^-(p)$$

$$K^\pm(p) = \Gamma\left(1 \mp \frac{p}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{1 \mp p}{2}\right)$$

При помощи факторизации (3.11) и представления (3.12) уравнение (3.9) на линии  $L$  записывается следующим образом:

$$\frac{p\Phi^-(p)}{8K^-(p)G^-(p)} + \frac{K^+(-1)K_\alpha^\circ}{(p+1)G^+(-1)} =$$

$$= -\frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{G^+(p)} - \frac{K_\alpha^\circ}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{G^+(p)} - \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right]$$

Левая часть этого равенства аналитична в  $D^-$ , а правая — в  $D^+$ . На основании принципа непрерывного продолжения они равны одной и той же целой функции. Использование асимптотики (3.10) и известных соотношений

$$K^\pm(p) = \sqrt{\mp p/2} + O(1), \quad p \rightarrow \infty$$

приводит к формуле

$$p\Phi^-(p) = -4K^-(p)G^-(p) \left[ \frac{K_{II}}{\sqrt{R}} + \frac{\sqrt{\pi}K_\alpha^\circ}{(p+1)G^+(-1)} \right]$$

Отсутствие полюса у изображения  $\Phi^-(p)$  в точке  $p = 0$  определяет коэффициент интенсивности напряжений и искомое решение

$$(3.13) \quad K_{II} = -\sqrt{\pi R} K_\alpha^\circ / G^+(-1)$$

$$\Phi^-(p) = 4\sqrt{\pi} K_\alpha^\circ K^-(p)G^-(p) / ((p+1)G^+(-1))$$

Переходя к пределу в  $G^+(p)$  при  $p \rightarrow -1$  и используя формулы Сохоцкого — Племеля [12], получаем

$$(3.14) \quad G^+(-1) = \sqrt{G_0(-1)} \exp \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Arg} G_0(-1+it) \frac{dt}{t}$$

Вводя новую прямоугольную систему координат  $\xi, \eta$  с началом в конце трещины (фиг. 1) и полагая  $r_0 \ll R$ , приходим к асимптотическим выражениям

$$(3.15) \quad 2Gu_\xi = \frac{1}{2} K_{II} \left(\frac{r_0}{2\pi}\right)^{1/2} \left( (2\kappa + 3) \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right) -$$

$$- \sigma_0 \left[ (\sin^2 \alpha - \nu) \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin \varphi \right] r_0$$

$$2Gu_\eta = -\frac{1}{2} K_{II} \left(\frac{r_0}{2\pi}\right)^{1/2} \left( (2\kappa - 3) \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) -$$

$$- \sigma_0 \left[ \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \varphi + (\cos^2 \alpha - \nu) \sin \varphi \right] r_0$$

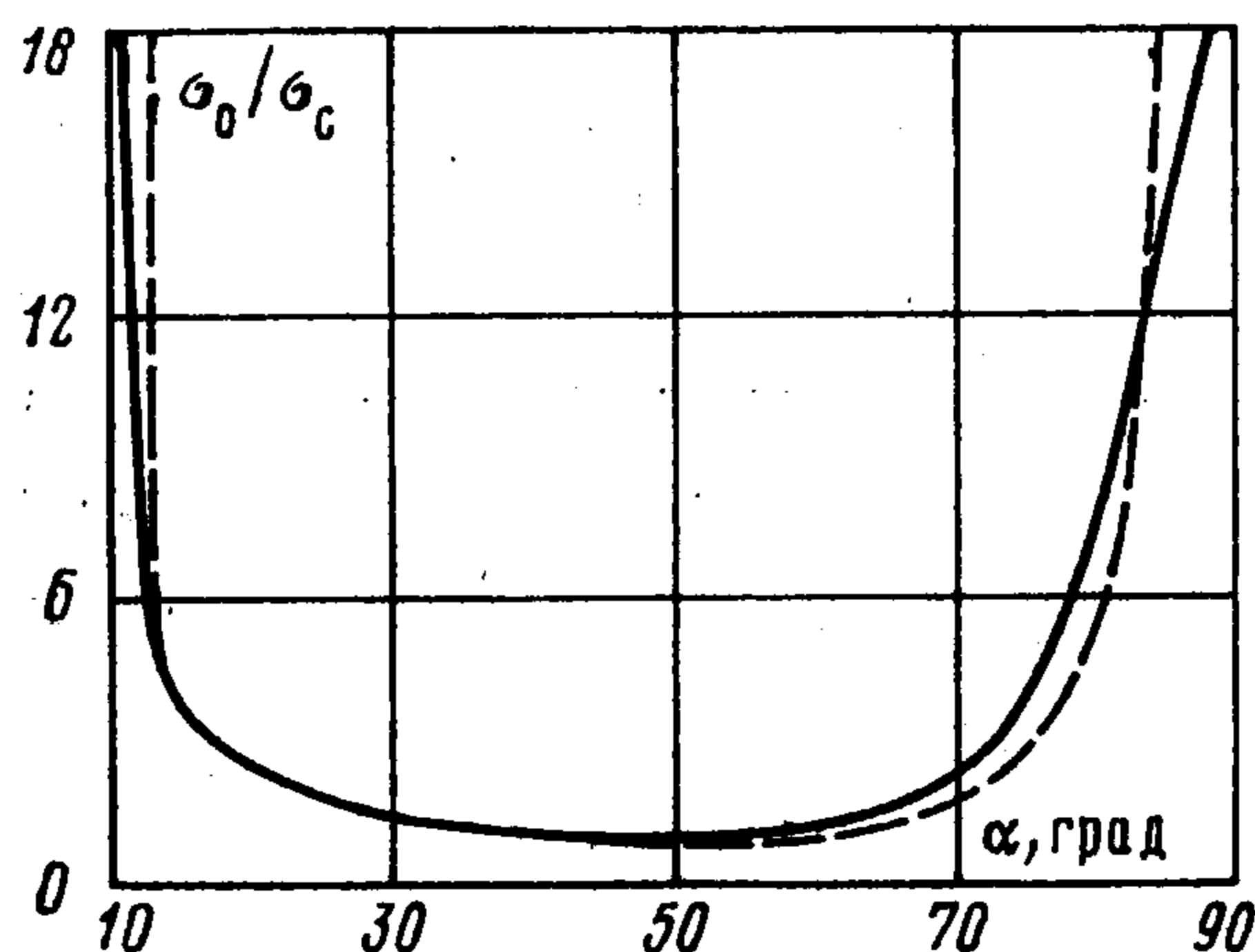
где  $r_0, \varphi$  — полярные координаты с началом в вершине трещины,  $u_\xi, u_\eta$  — компоненты суммарного вектора перемещений в направлении координатных осей  $\xi, \eta$  соответственно.

Формула для суммарной объемной деформации  $\varepsilon_s$  находится извест-

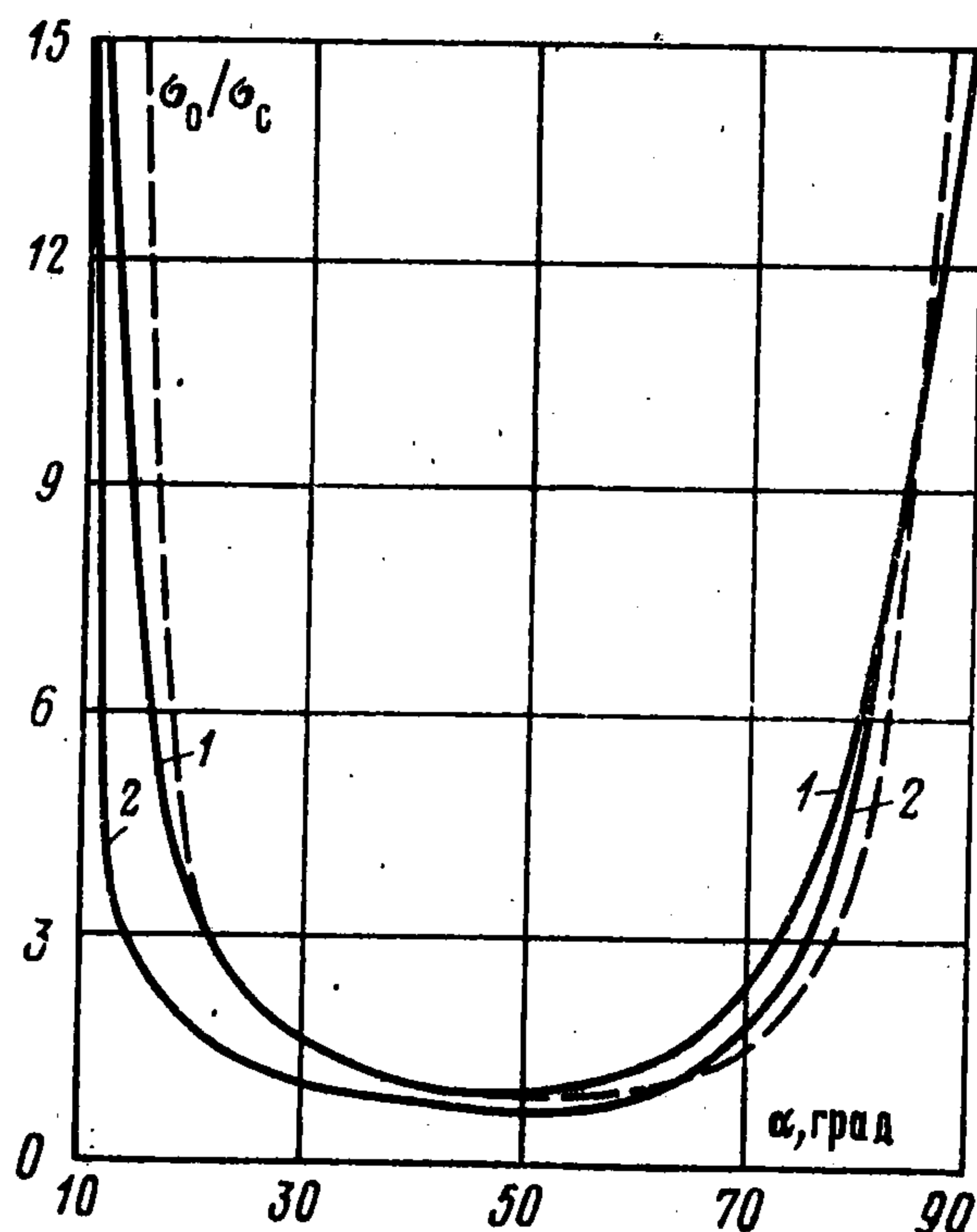
ным образом:

$$(3.16) \quad 2G\varepsilon_s = -(\kappa - 1) \left[ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r_0}} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \sigma_0 \right]$$

Пользуясь условием прочности (1.3), получаем нагрузку трещинообразования. Зависимость этой нагрузки от угла  $\alpha$  при отсутствии сцепления показана на фиг. 3 сплошной линией, где  $\sigma_c$  — минимальная нагрузка



Фиг. 3



Фиг. 4

трещинообразования. В расчетах принято  $\nu = 0,25$ ,  $\rho_0 = 10^\circ$ ,  $S_0/S_* = 0, 1$ , а значение  $\sigma_c$  определяется приближенной формулой

$$(3.17) \quad \sigma_c \approx 1,7S_0\sqrt{\Delta/R}$$

При достижении нагрузки трещинообразования здесь так же, как и в п. 2, имеют место примерно одинаковые макронапряжения у конца трещины в некоторой области. В силу этого, направление возникающей микротрещины будем считать случайным, а ее длину определять способом, указанным при растяжении. Наиболее вероятным считается то направление, для которого указанная длина является наибольшей.

Сопоставление нагрузки трещинообразования, построенной по критерию (1.3) с нагрузкой, определенной известными методами [1—4], приведено на фиг. 3 штриховой линией. Полученные нагрузки близки всюду, кроме направлений  $\alpha = \rho_0$  и  $\alpha = \pi/2$ . Для этих углов коэффициент интенсивности напряжений обращается в нуль и критерий максимального растягивающего напряжения [1—4] приводит к неограниченной прочности.

4. Хрупкая полуплоскость с краевой трещиной. В этом случае граничные условия (3.2)—(3.5) остаются без изменения, а условие симметрии (3.1) заменяется на условие отсутствия напряжений на нижней части границы полуплоскости

$$(4.1) \quad \theta = -\pi/2 : \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, r \geq 0$$

Применение преобразования Меллина к граничным условиям (3.2), (4.1), (3.3), (3.5) определяет коэффициенты изображений (3.7) через одну неизвестную функцию  $\Phi^-(p)$

$$\begin{aligned} A_1(p) &= (p \sin p\alpha \cos \alpha + c^{-\delta})\Phi^-(p)/(pq) \\ B_1(p) &= (p \cos p\alpha \cos \alpha + s^{-\delta})\Phi^-(p)/(pq) \\ C_1(p) &= (p \sin p\alpha \cos \alpha - c^{+\delta})\Phi^-(p)/(pq) \\ D_1(p) &= (p \cos p\alpha \cos \alpha + s^{+\delta})\Phi^-(p)/(pq) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(p) &= A_1(p) - \cos(p+1)\alpha \Phi^-(p)/(4p) \\
B_2(p) &= B_1(p) - \sin(p+1)\alpha \Phi^-(p)/(4p) \\
C_2(p) &= C_1(p) + \cos(p-1)\alpha \Phi^-(p)/(4p) \\
D_2(p) &= D_1(p) + \sin(p-1)\alpha \Phi^-(p)/(4p) \\
c^\pm &= \cos\left(p\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right), \quad s^\pm = \sin\left(p\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right), \quad \delta = \sin\left(p\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)
\end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в преобразованное по Меллину условие трения (3.4) приводит к функциональному уравнению Винера — Хопфа (3.9), где теперь

$$\begin{aligned}
(4.2) \quad G_0(p) &= -G_*(p) / \left(2 \sin^2 p \frac{\pi}{2}\right) \\
G_*(p) &= \cos p\pi - 2p \cos \alpha [(p-1) \eta_0 \cos \alpha + \sin \alpha] \times \\
&\times \sin 2p\alpha + (2p^2 \cos^2 \alpha - 1) \cos 2p\alpha
\end{aligned}$$

Это уравнение получено и решено в работе [10]. Приведенное ниже решение отличается от [10] выбором линии сопряжения ( $L$ ). При таком выборе коэффициент (4.2) не имеет вдоль  $L$  ни полюсов, ни нулей, если  $\alpha > \rho_0$ , и стремится к единице при  $p \rightarrow \infty$ . Для  $\alpha = \rho_0$  функция (4.2) имеет нуль первого порядка при  $p = -1$ .

$$G_0(-1) = 2 \sin 2\alpha K_\alpha$$

Решение уравнения (3.9) с коэффициентом (4.2) и соответствующая величина  $K_{II}$  имеют вид (3.13). При этом значение  $G^+(-1)$  по-прежнему определяется формулой (3.14), в которой  $G_0(p)$  имеет вид (4.2).

Расчет по условию прочности (1.3) и формулам (2.2), (3.15), (3.16) показывает, что здесь, как и пп. 2, 3, имеют место примерно одинаковые макронапряжения у конца трещины в некоторой области. В силу этого здесь имеют место соображения относительно длины и направления возникающей микротрещины, изложенные в предыдущих пунктах.

Зависимость нагрузки трещинообразования от угла  $\alpha$  при отсутствии сцепления между берегами трещины показана на фиг. 4 (кривая 1). Под  $\sigma_c$  по-прежнему понимается минимальная нагрузка трещинообразования при сжатии тела с одной трещиной. Для нее имеет место приближенная формула

$$(4.3) \quad \sigma_c \approx 2,24 S_0 \sqrt{\Delta/R}$$

При этом расчет проведен для тех же значений параметров  $\nu$ ,  $\rho_0$ ,  $S_0/S_*$ , что и в предыдущем пункте. Нагрузка трещинообразования, построенная известным способом [1—4], приведена на фиг. 4 штриховой линией. Так же, как и в п. 3, результаты близки всюду, кроме направлений, близких к углу внутреннего трения и границе полуплоскости, где известный способ приводит к неограниченным нагрузкам трещинообразования.

Сопоставление нагрузки трещинообразования при наличии одной трещины (кривая 1) с соответствующей нагрузкой при наличии двух симметричных трещин (кривая 2) приведено на фиг. 4. Нагрузки трещинообразования в обоих случаях отнесены к значению  $\sigma_c$ , определяемому формулой (4.3). Видно, что наличие второй трещины существенно понижает нагрузку трещинообразования в интервале  $\rho_0 \lesssim \alpha \lesssim 35^\circ$ . При углах, близких к  $\pi/2$ , различие между указанными нагрузками стирается, последние быстро растут с ростом  $\alpha$ , приближаясь к нагрузке трещинообразования в теле без трещин.

Автор благодарит М. Я. Леонова за обсуждение работы и замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 1110—1119.
2. Черепанов Г. П. Одна задача о вдавливании индентора с образованием трещин. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 1, с. 150—153.
3. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968, 246 с.
4. Erdogan F., Sih G. C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. — Trans. ASME. Ser. D. J. Bas. Engng, 1963, v. 85, No. 4, p. 519—525.
5. Леонов М. Я. Механика деформаций и разрушения. Фрунзе: Илим, 1981. 236 с.
6. Либовиц Г., Эфлис Дж., Джонс Д. Некоторые недавние теоретические и экспериментальные исследования по механике разрушения. — В кн.: Механика разрушения. М.: Мир, 1980, № 20, с. 168—202.
7. Леонов М. Я., Русинко К. Н. Макронапряжения упругого тела. — ПМТФ, 1963, № 1, с. 104—110.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М: Наука, 1973. 584 с.
9. Черепанов Г. П., Кулиев В. Д. О начальном развитии линий скольжения от свободной границы тела. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 349—359.
10. Черепанов Г. П. Равновесие откоса с тектонической трещиной. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 136—151.
11. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
12. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию  
15.XII.1983