Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 5, 1983

УДК 539.375

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДИСКОВОЙ ТРЕЩИНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Лобанов Е. В.

Решается осесимметричная задача о неустановившемся распространении дисковой трещины в трансверсально-изотропной среде. Введением критерия разрушения достигается замкнутость общей задачи о динамическом движении трещины под действием заданных нагрузок. Приводятся оценки смещений в волнах разгрузки, излучаемых растущей трещиной. Полученные результаты могут быть использованы для установления количественной связи между параметрами импульсов акустической эмиссии, характерным размером трещины и скоростью ее движения.

Задачи о движении трещин с переменной скоростью в изотропных средах рассматривались в [1—3].

1. Рассмотрим однородную трансверсально-изотропную среду с трещиной, нагруженную вдоль оси упругой симметрии напряжениями $\sigma(r, t)$. Осесимметричное движение такой среды подчиняется уравнениям

$$C_1^2\left(\Delta u - \frac{u}{r^2}\right) + C_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varkappa C_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$\varkappa C_2^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + C_2^2\Delta w + C_3^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$C_1^2 = \frac{C_{11}}{\rho},\quad C_2^2 = \frac{C_{44}}{\rho},\quad C_3^2 = \frac{C_{33}}{\rho},\quad \varkappa = 1 + \frac{C_{13}}{C_{44}}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Здесь u, w — компоненты вектора смещений в направлении осей r, z, ось z направлена вдоль оси симметрии и ортогональна поверхности трещины, начальный диаметр которой $2R_0$, C_{jk} и ρ — упругие модули и массовая плотность. На постоянные C_{jk} наложены известные ограничения, вытекающие из условия положительной определенности энергии упругой деформации. Необходимые для дальнейшего соотношения, связывающие напряжения и перемещения, имеют вид

$$\sigma_{rz} = \rho C_2^2\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right),\quad \sigma_{zz} = \rho C_2^2(\varkappa - 1)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + \rho C_3^2\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.2}$$

Общее решение задачи представим в виде суммы решений задачи о растяжении среды без трещины и задачи об излучении волн трещиной, на берегах которой заданы напряжения

$$\sigma_{rz} = 0,\quad \sigma_{zz} = -\sigma_0(r, t)\quad \text{при}\quad z = \pm 0,\quad 0 \leqslant r < R(t) \tag{1.3}$$

причем скорость распространения трещины произвольна, но ограничена условием $R^{\cdot}(t) < C_R$, C_R — скорость волн Релея. Решение первой задачи тривиально; решение второй — удовлетворяет однородным начальным условиям $u = u^{\cdot} = w = w^{\cdot} = 0$ при $t \leqslant 0$ и граничным условиям

$$\sigma_{rz} = 0,\ w = 0\ \text{при}\ z = 0,\ R(t) < r < \infty \tag{1.4}$$

вытекающим из симметрии задачи относительно плоскости $z = 0$. Кроме того, для обеспечения единственности решения второй задачи необходимо выполнение условий излучения и условий на ребре.

Применим к уравнениям (1.1) интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля, делая различие между оригиналами и изображениями путем явного выписывания аргументов. В результате образы компонент вектора смещений примут вид

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} &u(q,z,p)=A_1e^{-\lambda_1|z|}+A_2e^{-\lambda_2|z|}\\ &w(q,z,p)=\operatorname{sign}(z)\,(\mu_1A_1e^{-\lambda_1|z|}+\mu_2A_2e^{-\lambda_2|z|})\\ &\lambda_{1,2}=[\alpha\pm(\alpha^2-\beta)^{1/2}]^{1/2},\qquad \beta=\nu_1^2\nu_2^2C_2^{-2}C_3^{-2}\\ &\alpha={}^1/_2C_2^{-2}C_3^{-3}(C_3^2\nu_1^2+C_2^2\nu_2^2-\varkappa^2C_2^4),\qquad \nu_{1,2}^2=p^2/q^2+C_{1,2}^2\\ &\mu_{1,2}=(\nu_1^2-C_2^2\lambda_{1,2}^2)(\varkappa C_2^2\lambda_{1,2})^{-1}=\varkappa C_2^2\lambda_{1,2}(C_3^2\lambda_{1,2}^2-\nu_2^2)^{-1}\end{aligned}$$

Предположим, что напряжения σ_{zz} заданы во всей плоскости $z=0$, тогда, используя граничные условия (1.3), (1.4), найдем неизвестные спектральные функции A_1 и A_2

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} &A_{1,2}=\nu_2\sigma_{zz}(q,0,p)\,[\nu_1^2+C_2^2(\varkappa-1)\lambda_{2,1}^2]\,[\rho q\lambda_{2,1}\times\\ &\times(\lambda_1-\lambda_2)R]^{-1}\\ &R(p/q)=C_2C_3\nu_1p^2/q^2+[C_3^2\nu_1^2-(\varkappa-1)^2C_2^4]\,\nu_2\end{aligned}$$

Из формул (1.5), (1.6) получим функциональное уравнение Винера — Хопфа

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{zz}(q,0,p)\,S(p/q)\,(q\nu_2)^{-1}+w(q,+0,p)=0\\ &S(p/q)=C_2C_3\nu_1\nu_2(\lambda_1+\lambda_2)\,[\rho R(p/q)]^{-1}\end{aligned}$$

Для дальнейшего необходимо факторизовать функцию $S(p/q)$ на два сомножителя, один из которых не имеет особых точек в верхней полуплоскости, а другой — в нижней. Функции $\lambda_k(s)$, $\nu_k(s)$ аналитичны в комплексной плоскости $s=p/q$ с двумя полубесконечными разрезами $(-i\infty, -iC_{1,2}]$, $[iC_{1,2}, i\infty)$ и двумя конечными разрезами $[s_1,\bar{s}_1]$, $[s_2,\bar{s}_2]$, где точки ветвления $s_{1,2}$ определяются внутренним радикалом в $\lambda_k(s)$. Выберем те ветви функций, которые положительны при $|s|<iC_{1,2}$. Функция $(\lambda_1+\lambda_2)/R(s)$ аналитична в плоскости s вне разрезов $[iC_2, iC_1]$, $[-iC_1, -iC_2]$. В точках $s=\pm iC_R$, определяемых уравнением Релея $R(s)=0$, она имеет простые полюсы. При $s\to\infty$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\,R^{-1}(s)\sim\gamma_0s^{-2}=(C_2^2+C_3^2)\,[C_2^2C_3^2(C_2+C_3)\,s^2]^{-1}$$

С учетом этого и при помощи интеграла типа Коши (перенося контур интегрирования на берега разрезов) можно представить $S(s)$ в виде

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} &S(s)=S_+(s)\,S_-(s)\,\gamma,\ \gamma=\gamma_0C_2C_3\rho^{-1}\\ &S_\pm(s)=(s\pm iC_1)^{1/2}(s\pm iC_2)^{1/2}(s\pm iC_R)^{-1}D_\pm(is)\\ &D_\pm(is)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{C_2}^{C_1}g(\tau)\,(\tau\mp is)^{-1}d\tau\right]\\ &g(\tau)=\operatorname{arctg}[(a_2b_1-a_1b_2)(a_1b_1+a_2b_2)^{-1}]\\ &a_{1,2}=\{[c^2+(C_1^2-\tau^2)(\tau^2-C_2^2)C_2^{-2}C_3^{-2}]^{1/2}\pm c\}^{1/2}\\ &c={}^1/_2\,C_2^{-2}C_3^{-2}[C_3^2(C_1^2-\tau^2)-C_2^2(\tau^2-C_2^2)-\varkappa^2C_2^4]\\ &b_1=-C_2C_3(C_1^2-\tau^2)^{1/2}\tau^2,\quad b_2=[C_3^2(C_1^2-\tau^2)-C_2^4(\varkappa-\\ &-1)^2](\tau^2-C_2^2)^{1/2}\end{aligned}$$

где функции S_+, S_- аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости s.

2. Уравнение (1.7) совместно с условиями (1.3), (1.4) решим методом Б. В. Кострова [1]. Введем новые функции

$$F(q,p) = S_+(p/q)\,\sigma_{zz}(q,p),\quad G(q,p) = S_-^{-1}(p/q)\,\gamma^{-1}w(q,p) \tag{2.1}$$
$$\sigma_{zz}(q,p) \equiv \sigma_{zz}(q,0,p),\ w(q,p) \equiv w(q,+0,p)$$

Тогда можно переписать уравнение (1.7)

$$F(q,p)\,(C_2^2q^2 + p^2)^{-1/2} + G(q,p) = 0 \tag{2.2}$$

Применим обратные преобразования к соотношениям (2.1). Выполняя контурное интегрирование, используя разрывный интеграл Вебера — Шафхейтлина и теорему умножения для преобразования Ханкеля нулевого порядка [4], получим

$$F(r,t) = \sigma_{zz}(r,t) + \int_0^\pi\int_0^t \Big\{\chi D_+(C_R)\,I(\sigma_{zz},r,C_R) + \tag{2.3}$$
$$+\int_{C_2}^{C_1} \alpha(s)\,D_+(s)\,I(\sigma_{zz},r,s)\,ds\Big\}\,d\tau\,d\varphi$$

$$\gamma G(r,t) = w(r,t) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t\int_{C_2}^{C_1} \alpha^{-1}(s)\,D_-^{-1}(-s)\,I(w,r,s)\,ds\,d\tau\,d\varphi \tag{2.4}$$

Обращая преобразования (2.3), (2.4), найдем

$$\sigma_{zz}(r,t) = F(r,t) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t\int_{C_2}^{C_1} \alpha^{-1}(s)\,D_+^{-1}(s)\,I(F,r,s)\,ds\,d\tau\,d\varphi \tag{2.5}$$

$$\gamma^{-1}w(r,t) = G(r,t) + \int_0^\pi\int_0^t \Big\{\chi D_-(C_R)\,I(G,r,C_R) + \tag{2.6}$$
$$+\int_{C_2}^{C_1} \alpha(s)\,D_-(-s)\,I(G,r,s)\,ds\Big\}\,d\tau\,d\varphi$$

Из формул (2.3) — (2.6), в которых использованы обозначения

$$I(A,r,s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{st} A[\zeta(r),t-\tau]\,\beta(s)\,d\eta \tag{2.7}$$
$$\alpha(s) = (s-C_R)^{-1}(C_1-s)^{1/2}(s-C_2)^{1/2},\quad \beta(s) = \eta\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(s^2\tau^2-\eta^2)^{-1/2}$$
$$\chi = (C_1-C_R)^{1/2}(C_2-C_R)^{1/2},\quad \zeta(r) = (\eta^2+r^2-2r\eta\cos\varphi)^{1/2}$$

следует, что

$$F(r,t) = -f(r,t),\ f = \mathbf{L}\sigma_0,\ 0 \leqslant r < R(t) \tag{2.8}$$
$$G(r,t) = 0,\ R(t) < r < \infty$$

Оператор $\mathbf{L}$ определяется выражением (2.3).

Таким образом задача свелась к определению функции $F(r,t)$ из уравнения (2.2) и граничных условий (2.8).

Применим к уравнению (2.2) обратные интегральные преобразования, воспользуемся формулой Гегенбауэра [4]

$$J_0(C_2\tau q)\,J_0(rq) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0[\varkappa_1(\tau,r)\,q]\,d\varphi,\quad \varkappa_1(\tau,r) =$$
$$= (\tau^2C_2^2 + r^2 - 2\tau C_2 r\cos\varphi)^{1/2}$$

и сделаем замену переменных $\varkappa_1(t, r_0) = r$. В итоге имеем

$$(2.9)\qquad \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{|r_0-C_2(t_0-t)|}^{r_0+C_2(t_0-t)} F(r,t)\,[C_2^2(t_0-t)^2-(r_0-r)^2]^{-1/2}\,[(r_0+r)^2-$$
$$-C_2^2(t_0-t)^2]^{-1/2}\,r\,dr\,dt = -{}^1/_2\pi G(r_0, t_0)$$

Рассмотрим случай $r_0 \geqslant C_2t_0 > R(t_0)$. Введем характеристические переменные $\xi = C_2t - r$, $\eta = C_2t + r$. Тогда уравнение $\eta = R_*(\xi)$, или $\eta - \xi = 2R\,[{}^1/_2C_2(\eta + \xi)]$, определяет закон движения края трещины в координатах (ξ, η). Обозначим $\eta_1 = \eta - C_2t_0$, $\xi_1 = C_2t_0 - \xi$ и перепишем уравнение (2.9) в виде

$$(2.10)\qquad \int\limits_{r_0}^{C_2t_2-\xi_R}(\xi_1^2-r_0^2)^{-1/2}\,d\xi_1\int\limits_{\xi_1-C_2t_0}^{\eta_0}F(C_2t_0-\xi_1, C_2t_0+\eta_1)(\xi_1+$$
$$+\eta_1)(r_0^2-\eta_1^2)^{-1/2}\,d\eta_1 = 0$$

при $\eta_0 > R_*(\xi)$. Относительно внутреннего интеграла выражение (2.10) есть интегральное уравнение Абеля. Разрешая его по ξ_1, получим уравнение того же типа. Обращая последнее по η_1, выразим функцию F на продолжении трещины через ее значение f на трещине

$$(2.11)\qquad F(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{\pi r_0}\frac{d}{dr_0}\int\limits_{R_*(\xi_0)-C_2t_0}^{r_0}(r_0^2-\nu^2)^{-1/2}\,\nu\,d\nu\int\limits_{-\xi_0-C_2t_0}^{R_*(\xi_0)-C_2t_0}f(\xi_0, \eta_1+$$
$$+C_2t_0)(\eta_1+C_2t_0-\xi_0)(\nu^2-\eta_1^2)^{-1/2}\,d\eta_1$$

Интеграл по ν можно вычислить в явном виде. Дифференцируя оставшийся интеграл по параметру r_0 и переходя к физическим переменным, найдем

$$(2.12)\qquad F(r_0, t_0) = \frac{1}{\pi\sqrt{r_0-R(t_1)}}\int\limits_{r_0-C_2t_0}^{R(t_1)}f\left(r, t_0-\frac{r_0-r}{C_2}\right)\times$$
$$\times\frac{(R(t_1)-r)^{1/2}}{r_0-r}\left(\frac{r}{R(t_1)}\right)^{1/2}dr$$

где t_1 — решение уравнения

$$(2.13)\qquad C_2t_1 - R(t_1) = C_2t_0 - r_0$$

Соотношение (2.12) совпадает с соответствующим уравнением из [1] с точностью до последнего радикала в подынтегральном выражении.

3. При постановке задачи предполагалось, что закон движения трещины задан произвольно. Для решения задачи о распространении трещины под действием заданных сил необходимо определить асимптотику напряжений у края трещины. Положим $R(t_1) \sim R(t_0) - R^{\cdot}(t_0)\cdot(t_0 - t_1)$ при $r_0 \to R(t_0) + 0$. Используя (2.13), найдем

$$t_1 \sim t_0 - [r_0 - R(t_0)]\,[C_2 - R^{\cdot}(t_0)]^{-1}$$
$$R(t_1) \sim r_0 - C_2\,[r_0 - R(t_0)]\,[C_2 - R^{\cdot}(t_0)]^{-1}$$

Подставляя эти оценки в (2.12), получим

$$(3.1)\qquad F(r_0, t_0) \sim K_f(R^{\cdot})\,\{2\pi\,[r_0 - R(t_0)]\}^{-1/2}$$
$$K_f(R^{\cdot}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[1-\frac{R^{\cdot}(t_0)}{C_2}\right]^{1/2}\int\limits_0^{C_2t_0}f\left[R(t_0)-r, t_0-\frac{r}{C_2}\right]\times$$
$$\times\left[1-\frac{r}{R(t_0)}\right]^{1/2}r^{-1/2}\,dr$$

Отсюда видно, что асимптотическое поведение $F(r_0, t_0)$ при $r_0 \to \to R(t_0) + 0$ аналогично асимптотике напряжений $\sigma_{zz}(r_0, 0, t_0) \sim \sim K_I(t_0)\{2\pi[r_0 - R(t_0)]\}^{-1/2}$ у края трещины. Используя формулы (2.5) и (3.1), найдем коэффициент интенсивности динамических напряжений

$$K_I(R^{\cdot}) = K_f(R^{\cdot}) + \left(\frac{2}{\pi^4}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{R^{\cdot}(t_0)}{C_2}\right]^{1/2} \times \tag{3.2}$$
$$\times \int_0^{\pi}\int_0^{t_0}\int_{C_2}^{C_1} \alpha^{-1}(s) D_+^{-1}(s) \int_0^{st_0}\int_0^{C_2(t_0-\tau)} f\left[\zeta(R) - r, t_0 - \tau - \frac{r}{C_2}\right] \times$$
$$\times \left[1 - \frac{r}{\zeta(R)}\right]^{1/2} r^{-1/2}\, dr\beta(s)\, d\eta\, ds\, d\tau\, d\varphi, \quad r_0 \to R(t_0) + 0$$

где $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\zeta(R)$ и $D_+(s)$ определяются формулами (2.7) и (1.8), а переменные интегрирования τ, η связаны соотношением

$$\tau R^{\cdot}(t_0) = R(t_0) - [\eta^2 + R^2(t_0) - 2R(t_0)\eta\cos\varphi]^{1/2}$$

Для замыкания задачи о распространении трещины используем силовой критерий Ирвина

$$K_I(R^{\cdot}) = K_{ID}(R^{\cdot}) \tag{3.3}$$

где K_{ID} — трещиностойкость при быстром разрушении, которая является стандартной для данного материала функцией скорости трещины и определяется из эксперимента [5]. При этом K_{ID} и интенсивность энергии γ, высвобождаемой при росте трещины, связаны соотношением

$$\gamma(R^{\cdot}) = [\Gamma(R^{\cdot})/(2C_{44})]\, K_{ID}^2(R^{\cdot})$$

Через $\Gamma(R^{\cdot})$ обозначена безразмерная функция скорости трещины, которая становится неограниченной при $R^{\cdot}(t) \to C_R$. Трещина должна остановиться, когда коэффициент интенсивности напряжений $K_I \leqslant \min K_{ID}$. Таким образом уравнение (3.3) определяет $R = R(t)$ от действия произвольных осесимметричных сил, приложенных к ее берегам.

4. Для описания волн, излучаемых движущейся трещиной, представим изображения перемещений (1.5) в виде

$$u(q, z, p) = U(q, z, p)\,\sigma_{zz}(q, 0, p), \quad w(q, z, p) = \tag{4.1}$$
$$= W(q, z, p)\,\sigma_{zz}(q, 0, p)$$

причем напряжения σ_{zz} на продолжении трещины определяются формулами (2.3), (2.5), (2.12). Запишем оригиналы функций U, W следующим образом:

$$U(r, z, t) = \int_0^{\infty} J_1(qr)\, dq \frac{1}{2\pi i}\int_l \sum_{k=1}^{2} B_k \exp(-q\lambda_k z + qts)\, ds \tag{4.2}$$
$$W(r, z, t) = \int_0^{\infty} J_0(qr)\, dq \frac{1}{2\pi i}\int_l \sum_{k=1}^{2} \mu_k B_k \exp(-q\lambda_k z + qts)\, ds$$

где l — контур Меллина — Бромвича, $\lambda_k(s)$, $\mu_k(s)$, $B_k = qA_k\sigma_{zz}^{-1}$ определяются формулами (1.5), (1.6), $s = p/q$. Оценку внутреннего интеграла проведем методом перевала. В результате получим

$$I(u) \sim q^{-1/2}\sum_{k=1}^{2} B_k P_k \cos Q_k, \quad I(w) \sim -q^{-1/2}\sum_{k=1}^{2} \mu_k B_k P_k \sin Q_k \tag{4.3}$$
$$P_k = (1/2\,\pi\,|zf_k''(i\tau_k)|)^{-1/2}, \quad Q_k = q[t\tau_k - z\lambda_k(\tau_k)] - 1/2\,\varphi_0$$
$$\varphi_0 = \arg f_k''(i\tau_k), \quad f_k = st/z - \lambda_k(s)$$

Точка перевала $s_k = +i\tau_k$ определяется из уравнения $f_k'(s) = 0$.

Подставляя $I(u)$, $I(w)$ в (4.2), получим интегралы по q, которые можно выразить через гипергеометрические функции Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$. Предположим, однако, что $qr \gg 1$. Тогда, заменяя функцию Бесселя асимптотической формулой при больших значениях аргумента, U и W можно записать в виде

(4.4)
$$U(r, z, t) \sim -\sum_{k=1}^{2} P_k B_k \frac{\partial}{\partial r} J_k(r, z, t)$$
$$W(r, z, t) \sim -\sum_{k=1}^{2} \tau_k^{-1} \mu_k P_k B_k \frac{\partial}{\partial t} J_k(r, z, t)$$
$$J_k(r, z, t) = \int_0^\infty T_k(q)\, dq, \quad T_k(q) = q^{-1} \cos(Q_k) \cos\left(qr - \frac{\pi}{4}\right)$$

Предположим, что полоса пропускания частот регистрирующей аппаратуры ограничена диапазоном $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$. Пусть $\Delta\tau$ — время наблюдения, достаточное для регистрации этих частот, причем $\Delta\tau > \max\{2\pi/\omega_1, 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)\}$. Будем также считать, что $\Delta\tau \ll t$, t — время распространения пакета волн до виброприемника. Тогда вместо несобственного интеграла в (4.4) можно записать

$$J_k(r, z, t) \approx \int_{q_1}^{q_2} T_k(q)\, dq, \quad q_i \sim \frac{\omega_i}{2\pi C_1}$$

Обращая соотношения (4.1), получим формулы для смещений в дальнем поле

(4.5)
$$u(r, z, t) = U(r, z, t) ** \sigma_{zz}(r, 0, t)$$
$$w(r, z, t) = W(r, z, t) ** \sigma_{zz}(r, 0, t)$$
$$A(r, t) ** B(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi \int_0^L A(\eta, \tau) B[(\eta^2 + r^2 - 2r\eta\cos\varphi)^{1/2}, \quad t - \tau]\, \eta\, d\eta\, d\varphi\, d\tau$$

Предел интегрирования $L(t)$ определяется границей области, в пределах которой напряжения $\sigma_{zz}(r, 0, t)$ отличны от нуля.

Отметим, что полученные соотношения найдены для моментов времени, когда не учитывается многократная дифракция волн на ребре трещины. При более поздних моментах времени (для более точной оценки энергии, поступающей в край трещины) анализ задачи усложняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костров Б. В.* Распространение трещин с переменной скоростью.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 3, с. 551—560.
2. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
3. *Сарайкин В. А.* Решение осесимметричной задачи о трещине, расширяющейся с переменной скоростью.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 53. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1981, с. 117—125.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.
5. Механика разрушения. Быстрое разрушение, остановка трещин. (Сб. статей). М.: Мир, 1981. 254 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1982