

УДК 539.375 + 539.4

## МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК. ТЕОРИЯ ТРЕЩИН РАССЛАИВАНИЯ

Черепанов Г. П.

Рассматриваются трещины расслаивания, развивающиеся вдоль границы различных слоев в многослойной тонкой оболочке. Характерный линейный размер трещины в плане предполагается большим по сравнению с толщиной оболочки. Общая теория, пригодная для материалов с любыми неупругими свойствами, основана на дополнительном граничном условии на подвижном контуре трещины, которое выводится при помощи одной эвристической гипотезы. Существенно используется также теория инвариантных  $\Gamma$ -интегралов и общая теория разрушения. Указываются модельные эксперименты, которые позволяют определять опытным путем диаграммы разрушения, необходимые для доведения до числа теоретических расчетов. Как иллюстрация общей теории подробно изучается одномерная задача о разрушении двухслойной балки из идеальных упругопластических материалов. Далее рассматриваются следующие вопросы: докритический рост трещин расслаивания в многослойных оболочках из упругопластических материалов, зависимость предельных нагрузок от пути нагружения, усталостные трещины расслаивания. Дается точное решение задачи об эллиптической, параболической и гиперболической трещинах расслаивания в плоской двухслойной пластине, осесимметричной трещине расслаивания в двухслойной цилиндрической оболочке и эллиптической трещине расслаивания в двухслойной плоской мембране.

**1. Граничные условия на контуре трещины расслаивания.** Рассмотрим многослойную тонкую оболочку с трещиной расслаивания, развивающейся вдоль границы различных слоев. Характерный линейный размер трещины в плане будем считать большим по сравнению с толщиной оболочки.

Обозначим через  $S$  криволинейную поверхность трещины расслаивания, а через  $L$  — контур этой поверхности (фиг. 1). Трещина разделяет исходную целую оболочку в области  $S$  на две отдельные оболочки:  $S^+$  и  $S^-$ ; индексы плюс и минус будем приписывать всем относящимся к этим оболочкам величинам. Требуется установить, как изменяется во времени и в зависимости от внешних нагрузок контур  $L$ . Это нелинейная проблема теории оболочек, так как контур  $L$  заранее неизвестен и его требуется определить в ходе решения.

Установим все относящиеся к этой проблеме граничные условия. Вдоль контура  $L$  сопряжены три оболочки:  $S^+$ ,  $S^-$  (в области  $S$ ) и исходная  $S^0$  (вне области  $S$ ). Каждая из них удовлетворяет соответствующим дифференциальным уравнениям теории тонких оболочек.

На контуре сопряжения  $L$  должны выполняться следующие граничные условия (индекс нуль приписан величинам, относящимся к оболочке  $S^0$ ):

условия неразрывности

$$(1.1) \quad u^+ = u^- = u^0, \quad v^+ = v^- = v^0, \quad w^+ = w^- = w^0$$

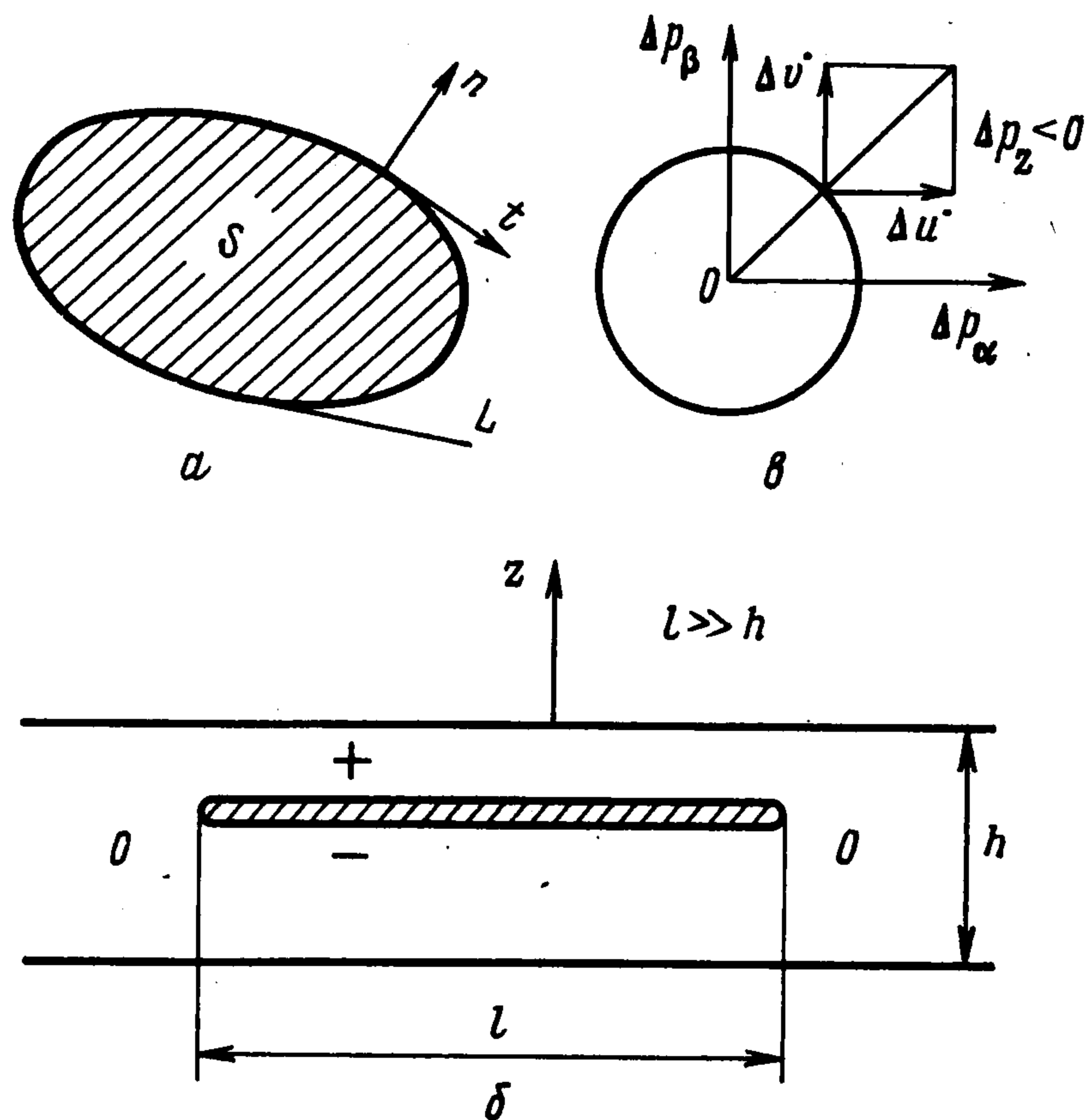
уравнения равновесия

$$(1.2) \quad N_n^0 = N_n^+ + N_n^-, \quad T_n^0 = T_n^+ + T_n^-$$

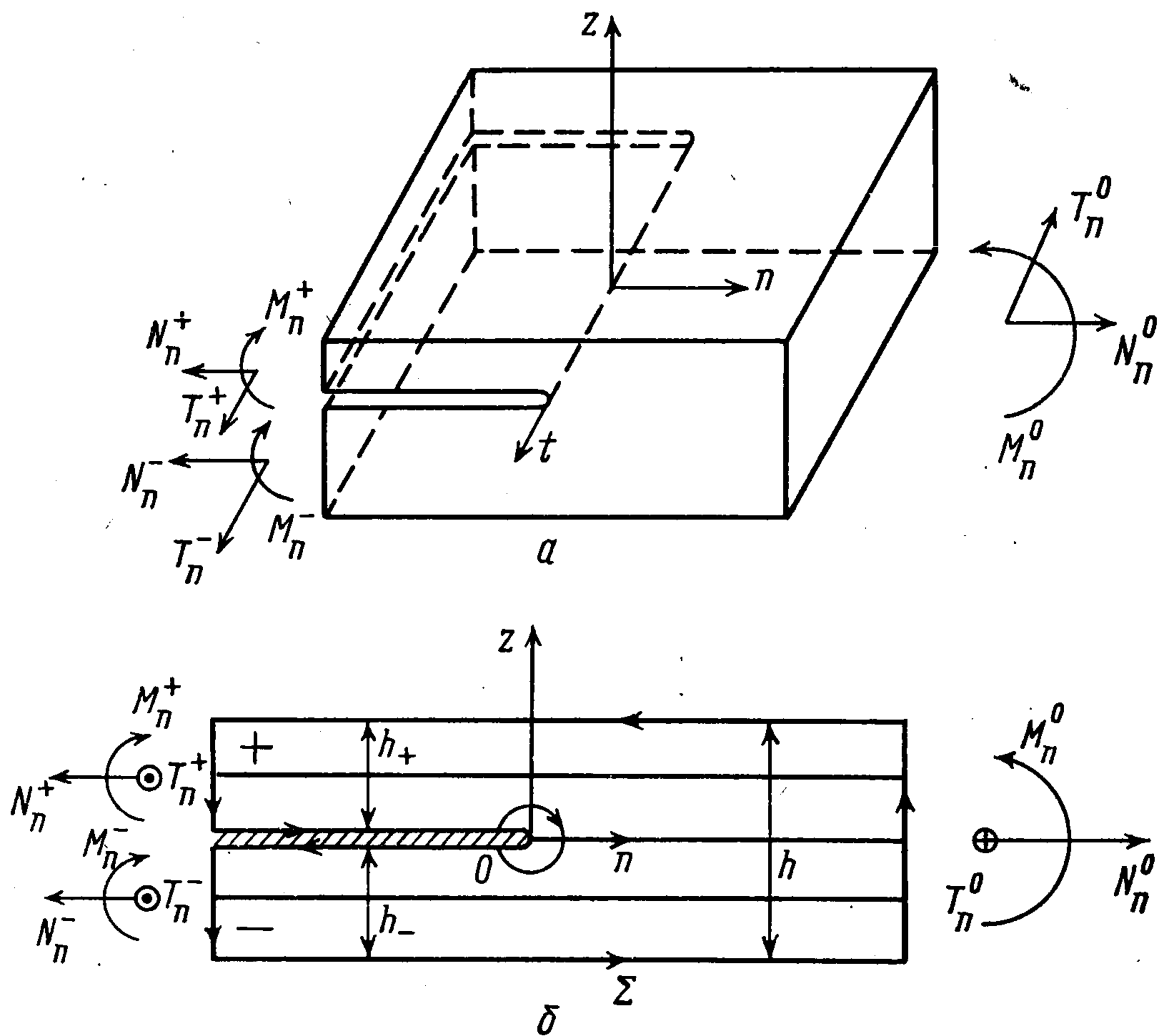
$$(1.3) \quad M_n^0 = M_n^+ + M_n^-$$

$$(1.4) \quad Q_n^0 = Q_n^+ + Q_n^-, \quad M_{nt}^0 = M_{nt}^+ + M_{nt}^-$$

Здесь  $t$  и  $n$  — касательная и нормаль к контуру  $L$  на нейтральной поверхности,  $u, v, w$  — составляющие вектора смещения нейтральной поверхности оболочки по осям  $\alpha, \beta$  и  $z$  соответственно,  $\alpha\beta$  — ортогональная система криволинейных гауссовых координат на нейтральной поверхности оболочки,  $z$  — нормаль к этой поверхности,  $N$  и  $T$  — нормальное и касательное



Фиг. 1



Фиг. 2

тельное усилия,  $M_n$  — изгибающий момент с осью изгиба  $n$ ,  $M_{nt}$  — крутящий момент в плоскости  $nt$ ,  $Q$  — перерезывающая сила.

Трещина расслаивания может быть открытой и закрытой. В последнем случае в каждой точке области  $S$  должны выполняться следующие условия совместной работы оболочек  $S^+$  и  $S^-$ :

условие нормального смыкания

$$(1.5) \quad w^+ = w^-$$

уравнение предельного равновесия (в состоянии проскальзывания)

$$(1.6) \quad \Delta p_\alpha^2 + \Delta p_\beta^2 = f(\Delta p_z)$$

в состоянии проскальзывания — уравнение ассоциированного закона пластичности (см. фиг. 1, в)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \Delta u / \Delta v &= \Delta p_\alpha / \Delta p_\beta; \quad \Delta u = u^+ - u^-, \quad \Delta v = v^+ - v^- \\ \Delta p_\alpha^+ &= -\Delta p_\alpha^- = \Delta p_\alpha, \quad \Delta p_\beta^+ = -\Delta p_\beta^- = \Delta p_\beta, \\ \Delta p_z^+ &= -\Delta p_z^- = \Delta p_z \end{aligned}$$

Через  $\Delta p_\alpha$ ,  $\Delta p_\beta$ ,  $\Delta p_z$  обозначены соответствующие компоненты вектора интенсивности дополнительной распределенной нагрузки, возникающей из-за взаимного налегания оболочек  $S^+$  и  $S^-$ , функция  $f$  в простейшем случае удовлетворяет закону сухого кулонова трения  $f = \sqrt{k_0 + \Delta p_z \operatorname{tg} \rho}$  ( $k_0$  и  $\rho$  — коэффициент сцепления и угол трения),  $\Delta u$  и  $\Delta v$  — составляющие скорости взаимного проскальзывания оболочек.

Таким образом, в случае налегающих оболочек в области  $S$  появляются три новые неизвестные функции  $\Delta p_\alpha$ ,  $\Delta p_\beta$  и  $\Delta p_z$ , зависящие от  $\alpha$  и  $\beta$  и участвующие в уравнениях равновесия каждой оболочки; три уравнения (1.5)—(1.7) вместе с уравнениями теории тонких упругих оболочек составляют замкнутую систему, которая оказывается, естественно, нелинейной вследствие нелинейности уравнений (1.6) и (1.7). На контуре  $L$  функции  $\Delta p_\alpha$  и  $\Delta p_\beta$  должны обращаться в нуль. Заметим, что если пренебречь силами контактного трения и положить  $\Delta p_\alpha = \Delta p_\beta = 0$ , то уравнения (1.6) и (1.7) исчезнут; задача снова станет линейной, а одной новой функцией  $\Delta p_z$  будет соответствовать одно новое уравнение (1.5).

При наличии частичного контакта оболочек  $S^+$  и  $S^-$  сама область контакта должна быть определена в ходе решения задачи. На границе, разделяющей открытую и закрытую области расслаивания, для каждой из оболочек должны выполняться очевидные условия сопряжения.

Все сформулированные уравнения позволяют ставить и решать задачи в том случае, когда положение фронта трещины известно. Для вывода дополнительных граничных условий на фронте трещины расслаивания привлечем инвариантные  $\Gamma$ -интегралы и общую теорию разрушения, предложенную в [1].

Рассмотрим зону пограничного слоя в окрестности некоторой точки  $O$  контура  $L$  трещины расслаивания (фиг. 2). Считается, что ширина этой зоны (вдоль нормали  $n$  к контуру) мала по сравнению с характерным линейным размером трещины в плане (в частности, с радиусом кривизны контура  $L$  и радиусом кривизны оболочки), но велика по сравнению с толщиной оболочки (практически, на основании точных решений, в два-три раза больше толщины оболочки). В погранслое приближение теории оболочек не годится, и нужно привлекать точную, трехмерную теорию. В обычном приближении тонких оболочек упругое поле в погранслое можно считать плоским в окрестности точки  $O$ , т. е. не зависящим от координаты  $t$  вдоль контура трещины, а саму оболочку — плоской многослойной пластиной с фронтом трещины вдоль оси  $t$  прямоугольных декартовых координат  $Otnz$  (фиг. 2).

Введем следующее допущение (оно имеет эвристический характер, вытекает из интуитивных физико-механических представлений и подтверждается известными точными решениями).

Развитие трещины расслоения в точке  $O$  определяется следующими величинами в этой точке:  $N_n^+$ ,  $N_n^-$ ,  $N_n^0$ ,  $T_n^+$ ,  $T_n^-$ ,  $T_n^0$ ,  $M_n^+$ ,  $M_n^-$ ,  $M_n^0$  и не зависит от других изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил в этой точке. Развитие трещины в точке  $O$  не зависит также от наличия распределенных касательных и нормальных нагрузок на берегах трещины и боковых поверхностях оболочки вблизи точки  $O$ .

Это допущение выполняется тем точнее, чем меньше отношения  $h/l$ ,  $h/R$ , где  $h$  — толщина оболочки,  $R$  — радиус кривизны оболочки,  $l$  — характерный линейный размер трещины в плане. На основании сделанного допущения процесс развития трещины в точке  $O$  может быть изучен на плоском чертеже погранслоя (фиг. 2, б) с учетом лишь указанных нагрузок и в пренебрежении внешними нагрузками на берегах трещины. Отсюда имеем следующую краевую задачу в плоскости  $nz$  для многослойной полосы с трещиной:

$$(1.8) \quad \left. \begin{array}{l} z = h_+, z = -h_- \\ z = 0, n < 0 \end{array} \right\}, \quad \sigma_z = \tau_{zn} = \tau_{zt} = 0$$

$$(1.9) \quad \begin{array}{l} n \rightarrow \infty, \varepsilon_n = \varepsilon_n^0 + \kappa_n^0 z, \gamma_{nt} = \gamma_{nt}^0 \\ n \rightarrow -\infty (z > 0), \varepsilon_n = \varepsilon_n^+ + \kappa_n^+ z, \gamma_{nt} = \gamma_{nt}^+ \\ n \rightarrow -\infty (z < 0), \varepsilon_n = \varepsilon_n^- + \kappa_n^- z, \gamma_{nt} = \gamma_{nt}^- \end{array}$$

Здесь  $\varepsilon_n$  и  $\gamma_{nt}$  — нормальная и тангенциальная деформации. Вдоль границ раздела слоев при  $z = \text{const}$  имеют место условия жесткого сцепления.

В случае линейно-упругих тел справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} N_n^0 &= k_e^0 \varepsilon_n^0, & N_n^+ &= k_e^+ \varepsilon_n^+, & N_n^- &= k_e^- \varepsilon_n^- \\ T_n^0 &= k_s^0 \gamma_{nt}^0, & T_n^+ &= k_s^+ \gamma_{nt}^+, & T_n^- &= k_s^- \gamma_{nt}^- \\ M_n^0 &= k_b^0 \kappa_n^0, & M_n^+ &= k_b^+ \kappa_n^+, & M_n^- &= k_b^- \kappa_n^- \\ \left( k_e &= \sum_i \frac{h_i E_i}{1 - \nu_i^2}, \quad k_s = \sum_i h_i G_i, \quad k_b = \sum_i \frac{E_i I_i}{1 - \nu_i^2} \right) \end{aligned}$$

Здесь  $k_e$ ,  $k_s$ ,  $k_b$  — жесткость многослойной полосы на растяжение, сдвиг и изгиб соответственно; она получается суммированием соответствующих жесткостей всех слоев в полосе;  $h_i$ ,  $E_i$ ,  $G_i$ ,  $\nu_i$ ,  $I_i$  — соответствующие параметры  $i$ -го слоя: толщина, модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона, момент инерции относительно нейтральной оси полосы.

Рассмотрим замкнутый контур  $\Sigma$  в плоскости  $Onz$ , образованный противоположными берегами трещины, окружностью весьма малого радиуса, охватывающей точку  $O$ , боковыми плоскостями полосы и ее поперечными сечениями при  $n \rightarrow \pm\infty$  (фиг. 2, б). Согласно теории инвариантных Г-интегралов, имеет место следующее уравнение [2]:

$$(1.10) \quad \int_{\Sigma} (U n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Sigma = 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$$

Здесь  $n_j$  — единичная нормаль к контуру  $\Sigma$ ,  $\sigma_{ij}$  — напряжения,  $u_i$  — перемещения,  $U$  — упругий потенциал единицы объема. Уравнение (1.10) справедливо также для любых неупругих тел (упругопластических,

вязкоупругих и др.) при квазистационарном движении точки  $O$  вдоль оси  $n$  со скоростью, значительно меньшей скорости звука в полосе; при этом под  $U$  понимается удельная энергия деформаций.

Обозначим через  $\Gamma$  величину интеграла в (1.10) по окружности, охватывающей точку  $O$  ( $\Gamma$  — вычет в точке  $O$ ). Из (1.10) на основании граничных условий (1.8) и (1.9) имеем

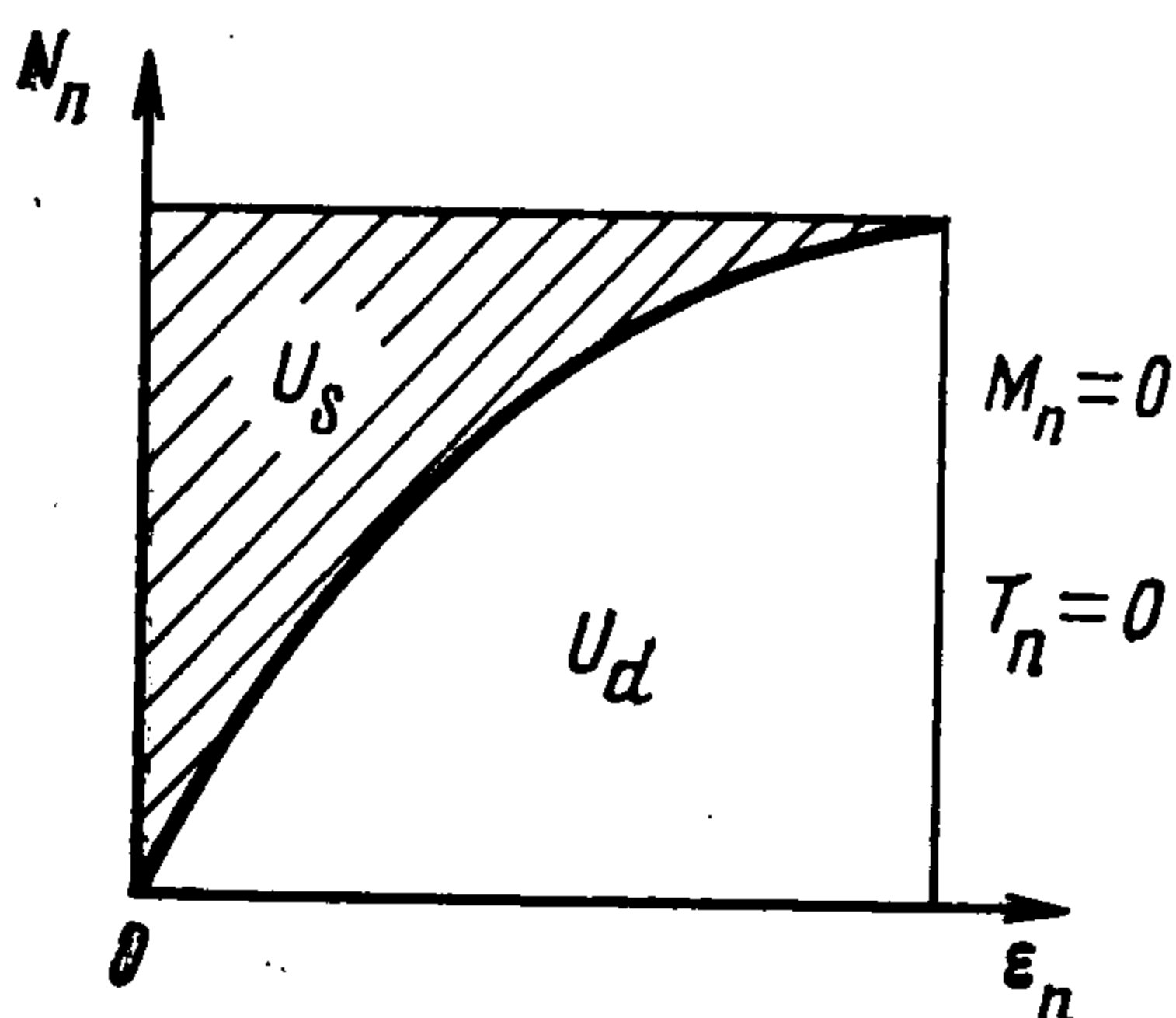
$$\begin{aligned}
 (1.11) \quad \Gamma &= \int_L (U - \sigma_{i1} u_{i,1}) dz = \\
 &= \int_L (U - \sigma_n \varepsilon_n - \tau_{nz} u_{z,n} - \tau_{nt} \gamma_{nt}) dz = \\
 &= \int_L U dz - \varepsilon_n \int_L \sigma_n dz - \kappa_n \int_L z \sigma_n dz - u_{z,n} \int_L \tau_{nz} dz - \\
 &\quad - \gamma_{nt} \int_L \tau_{nt} dz = \int_L U dz - (\varepsilon_n N_n + \kappa_n M_n + \gamma_{nt} T_n) |_L = \\
 &= [U_s]; \quad \int_L = \int_{n \rightarrow -\infty}^{+h_+} - \int_{-h_-}^{n \rightarrow +\infty} \\
 [U_s] &= -U_s^o + U_s^+ + U_s^-; \quad U_s = -U_d + N_n \varepsilon_n + M_n \kappa_n + T_n \gamma_{nt} \\
 [U_d] &= \int_L U dz; \quad U_d = \int (N_n d\varepsilon_n + M_n d\kappa_n + T_n d\gamma_{nt})
 \end{aligned}$$

Здесь  $U_d$  — энергия деформации, приходящаяся на единицу площади многослойной пластины в плане,  $U_s$  — дополнительная энергия деформации (физический смысл  $U_d$  и  $U_s$  ясен из одномерной схемы растяжения фиг. 3, полученной следующим образом: растягиваем образец заданной во времени  $t$  деформацией  $\varepsilon_n = \varepsilon_n(t)$  и снимаем соответствующее усилие  $N_n = N_n(t)$ ; затем, исключая  $t$ , строим кривую  $N_n = N_n(\varepsilon_n)$  для данного пути нагружения). Квадратные скобки означают скачок величины, заключенной в скобки, при пересечении фронта трещины.

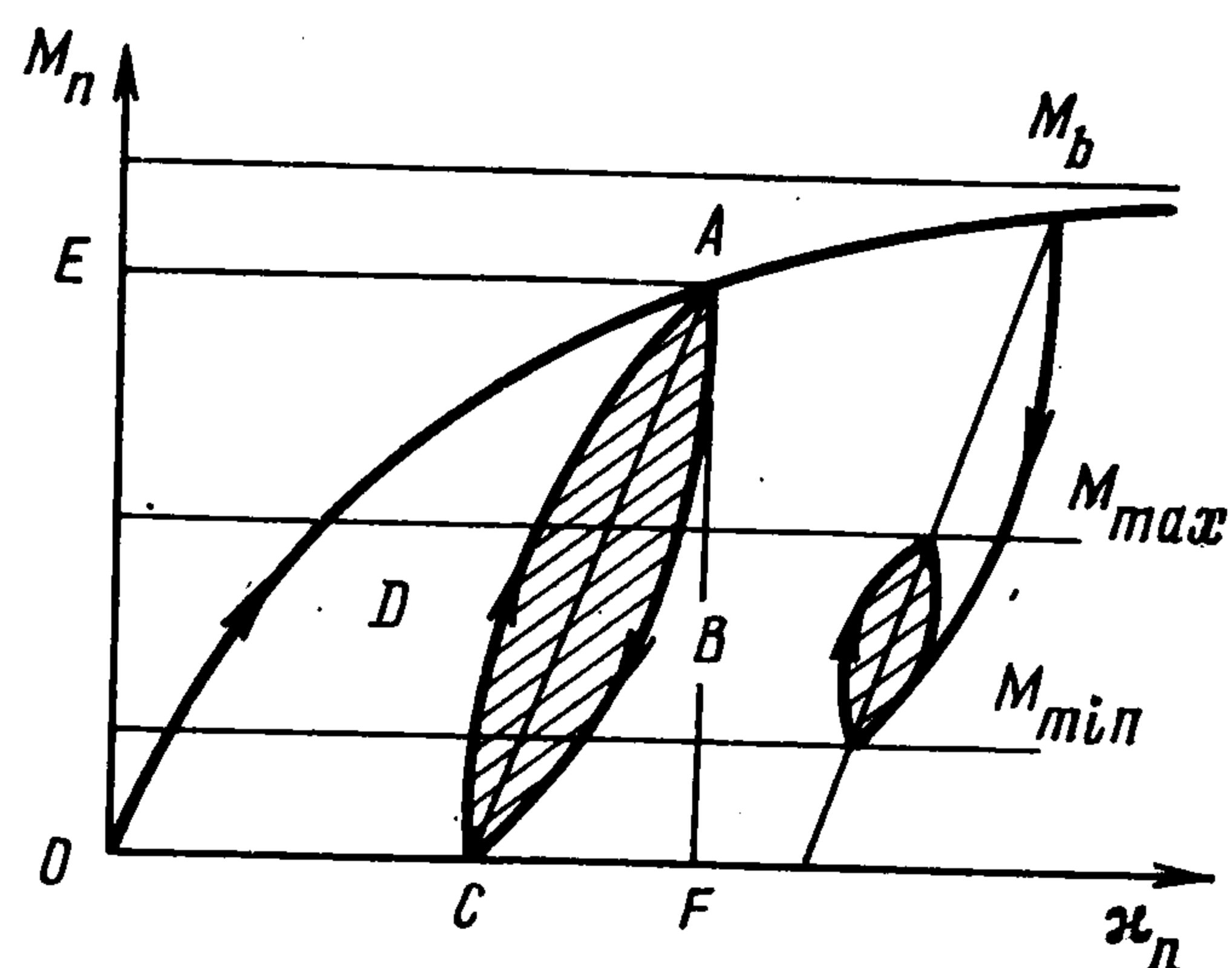
Уравнение на фронте трещины

$$(1.12) \quad \Gamma = [U_s]$$

является основным результатом теории трещин расслаивания в многослойных оболочках из любых материалов. Из него вытекает, например, что если скорость роста трещины  $V$  гораздо больше  $h/\tau$ , где  $\tau$  — характерное время протекания реакции последействия многослойного материала, то развитие трещины будет определяться лишь мгновенной реакцией материала в целом (т. е. его упругопластическими свойствами) и не будет зависеть от реакции последействия материала (т. е. от его свойств ползучести и вязкости).



Фиг. 3



Фиг. 4

Действительно, ширина погранслоя  $\Delta n$  практически равняется  $(2 \div 3) h$  (асимптотическая бесконечность, фиг. 2), поэтому при  $V \gg h/\tau$  правая часть уравнения (1.12) зависит лишь от мгновенной реакции многослойного материала. Левая часть уравнения (1.12), величина  $\Gamma$ , определяется свойствами материала в весьма малой окрестности фронта трещин (малой по сравнению с толщиной отдельного слоя  $h_i$ ), т. е. по существу химическими и физико-механическими свойствами поверхности раздела слоев на продолжении трещин. Именно эти свойства объясняют наблюдаемые эффекты докритического роста трещин расслаивания и аварий многослойных конструкций при относительно низких нагрузках.

*Три типа трещин расслаивания.* В зависимости от напряженного состояния многослойной оболочки вблизи фронта трещины будем различать [2] следующие частные случаи (фиг. 2): нормальный разрыв или отрыв ( $N_n = 0, T_n = 0, M_n \neq 0$ ), поперечный сдвиг ( $M_n = 0, T_n = 0, N_n \neq 0$ ), продольный сдвиг ( $M_n = 0, N_n = 0, T_n \neq 0$ ).

Распределение напряжений и деформаций вблизи фронта трещины находится из решения краевой задачи (1.8), (1.9) для погранслоя (фиг. 2, б). В случае линейно-упругого тела эта задача может быть решена методом Винера — Хопфа при помощи преобразования Фурье по  $n$ . Закономерности развития трещин расслаивания могут исследоваться непосредственно при помощи общего уравнения (1.12) без анализа напряжений и деформаций в самом погранслое.

**2. Исследование законов развития трещин расслаивания опытным путем.** Уравнение (1.12) позволяет изучать интимные и сложные процессы разрушения в конце трещины на макрообразцах с трещинами путем измерения изменения во времени  $t$  двух макровеличин: длины трещины  $l$  и величины  $[U_s]$ . Принципиальная схема исследования может быть пояснена на простейшем примере нормального разрыва двухслойного образца концевыми силами.

Пусть требуется изучить развитие трещины расслаивания нормального разрыва, распространяющейся вдоль границы раздела двух слоев в многослойной оболочке. Для этого нужно приготовить двухслойные балки из материала этих слоев 1 и 2, в точности воспроизводя способ и технологию соединения их поверхностей, а также внешние условия. Размеры балки-образца могут быть любыми. Затем балка с искусственно созданной начальной трещиной расслоения длины  $l$  растягивается двумя поперечными силами  $Q$  по задаваемой программе  $Q(t)$ . В данном случае в конце трещины имеем согласно (1.11) (с учетом кривизны)

$$(2.1) \quad M_n^{\circ} = 0, \kappa_n^{\circ} = 0, M_n^{+} = -M_n^{-} = Q(t) l(t) \\ [U_s] = Ql(\kappa_n^{+} - \kappa_n^{-}) - \int Ql d(\kappa_n^{+} - \kappa_n^{-})$$

Величины  $\kappa_n^{\pm}(t)$  в конце трещины можно измерять непосредственно, однако удобнее и точнее рассчитывать их по реологической модели материалов 1 и 2, определяемой из независимых экспериментов на однородных материалах без трещин. Таким образом, по измеряемой функции  $l(t)$  при помощи (2.1) находится функция  $[U_s(t)]$ . Последняя согласно (1.12) равна  $\Gamma(t)$ , а определение этой функции — цель исследования.

Результаты этого изучения следует изобразить в инвариантных переменных в виде зависимости скорости роста трещины  $l'$  от величины  $\Gamma$ ; эта зависимость в общем случае будет определяться также путем нагружения, описываемым функцией  $[U_s(t)]$ .

Согласно постулату подобия [1], полученную диаграмму  $l - \Gamma$  можно использовать для расчета развития трещины расслоения нормального разрыва между материалами 1 и 2 в любой произвольно нагруженной многослойной оболочке при той же функции  $[U_s(t)]$ . Для этого нужно функцию  $\Gamma(l)$  из диаграммы подставить в левую часть уравнения (1.12) и решить получающееся дифференциальное уравнение относительно  $l(t)$ . Достаточно большим набором диаграмм  $l - \Gamma$  и соответствующих им «путей нагружения»  $[U_s(t)]$  можно описать развитие трещин расслоения для любой пары материалов с любыми свойствами. При этом в расчетах удобнее определять вначале набор  $l(t)$  и  $[U_s(t)]$  по известным диаграммам, а реализуемую функцию  $l(t)$  выбирать по наибольшей близости расчетной и «паспортной» функции  $[U_s(t)]$ .

*Расчет по критическому состоянию.* Скорость трещины  $l$  с увеличением  $\Gamma$  обычно плавно возрастает (по крайней мере, не убывает), но существует критическое значение  $\Gamma = 2\gamma_{fm}$ , при приближении к которому наблюдается резкое увеличение  $l$ . Величину  $\gamma_{fm}$  будем называть удельной энергией адгезии [2] пары материалов  $f$  и  $m$ . Из предыдущего ясно, что в общем случае она зависит от функции  $[U_s(t)]$ , т. е. от предыстории. Однако для многих материалов и внешних условий такой зависимостью, так же как и докритическим ростом трещин, часто можно (или нужно) пренебречь. При этом общее уравнение (1.12) приобретает следующий простой вид:

$$(2.2) \quad [U_s] = 2\gamma_{fm}$$

Приведем несколько простых примеров расчета по критическому состоянию (2.2).

**3. Разрушение двухслойной балки из упругопластических материалов.** Рассмотрим схему разрушения двухслойной балки двумя консольными силами. Каждый из материалов идеально упругопластический. Сила  $Q$  считается неубывающей (простое нагружение).

По диаграмме  $\sigma_n - \epsilon_n$  можно рассчитать диаграмму  $M_n - \kappa_n$  чистого изгиба балки. Затем по формулам (1.11) вычисляем

$$\begin{aligned} \Gamma &= M_n \kappa_n - \int_0^{\kappa_n} M_n d\kappa_n = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{24} E h^3 \kappa_n^2 & \left( 0 \leq \kappa_n \leq \frac{2\sigma_s}{hE} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{h}{E} \sigma_s^2 - \frac{2\sigma_s^3}{3E^2 \kappa_n} & \left( \frac{2\sigma_s}{hE} \leq \kappa_n < \infty \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь определяем  $\Gamma = U_s^+ + U_s^-$  ( $U_s^c = 0$ ) в конце трещины, где  $M_n = Ql$ . В зависимости от соотношения постоянных и величины нагрузки возможны следующие варианты:

при  $6Ql < \sigma_{s1} h_1^2 \leq \sigma_{s2} h_2^2$  (упругий слой 1 плюс упругий слой 2)

$$(3.1) \quad \Gamma = 6Q^2 l^2 \left( \frac{1}{E_1 h_1^3} + \frac{1}{E_2 h_2^3} \right)$$

при  $\sigma_{s1} h_1^2 < 6Ql < \sigma_{s2} h_2^2$  (упругопластический слой 1 плюс упругий слой 2)

$$(3.2) \quad \Gamma = \frac{h_1 \sigma_{s1}^2}{2E_1} - \frac{\sigma_{s1}^2}{\sqrt{3} E_1} \sqrt{h_1^2 - \frac{4Ql}{\sigma_{s1}}} + \frac{6Q^2 l^2}{E_2 h_2^3}$$

при  $Ql = 1/4 \sigma_{s1} h_1^2 \leq 1/6 \sigma_{s2} h_2^2$  (упругий слой 2 плюс упругопластический слой 1 в предельном состоянии, с пластическим шарниром в конце трещины)

$$(3.3) \quad \Gamma = \frac{h_1 \sigma_{s1}^2}{2E_1} + \frac{3\sigma_{s1}^2 h_1^4}{8E_2 h_2^3}$$

при  $\sigma_{s1} h_1^2 \leq \sigma_{s2} h_2^2 < 6Ql \leq 3/2 \sigma_{s1} h_1^2$  (упругопластический слой 1 плюс упругопластический слой 2)

$$(3.4) \quad \Gamma = \frac{h_1 \sigma_{s1}^2}{2E_1} + \frac{h_2 \sigma_{s2}^2}{2E_2} - \frac{\sigma_{s1}^2}{\sqrt{3} E_1} \sqrt{h_1^2 - \frac{4Ql}{\sigma_{s1}}} - \frac{\sigma_{s2}^2}{\sqrt{3} E_2} \sqrt{h_2^2 - \frac{4Ql}{\sigma_{s2}}}$$

Формулы (3.1)–(3.4) позволяют на основе критерия роста трещины (2.2) проанализировать развитие процесса разрушения в упругопластической двухслойной балке с трещиной. В зависимости от соотношения постоянных возможны следующие варианты ( $Q_b$  — предельная нагрузка):

при  $6Q_b l < \sigma_{s1} h_1^2 \leq \sigma_{s2} h_2^2$  рост трещины начинается до возникновения пластических зон в слоях 1 и 2 (квазихрупкое разрушение)

$$(3.5) \quad Q_b = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{1}{3} \gamma_{fm} \left( \frac{1}{E_1 h_1^3} + \frac{1}{E_2 h_2^3} \right)^{-1/2}}$$

при  $\sigma_{s1} h_1^2 < 6lQ_b < \sigma_{s2} h_2^2$  рост трещины начинается после возникновения пластических зон в слое 1 (хрупкопластичный слой 2 плюс квазихрупкий слой 1), а  $Q_b$  — корень уравнения

$$(3.6) \quad \frac{6Q_b^2 l^2}{E_2 h_2^3} - \frac{\sigma_{s1}^2}{\sqrt{3} E_1} \sqrt{h_1^2 - \frac{4Q_b l}{\sigma_{s1}}} = 2\gamma_{fm} - \frac{h_1 \sigma_{s1}^2}{2E_1}$$

при  $\sigma_{s1} h_1^2 \leq \sigma_{s2} h_2^2 < 6Q_b l \leq 3/2 \sigma_{s1} h_1^2$  рост трещины начинается после развития пластических зон в слоях 1 и 2 (хрупкопластичные слои 1 и 2), а  $Q_b$  — корень уравнения

$$(3.7) \quad \frac{\sigma_{s1}^2}{\sqrt{3} E_1} \sqrt{h_1^2 - \frac{4Q_b l}{\sigma_{s1}}} + \frac{\sigma_{s2}^2}{\sqrt{3} E_2} \sqrt{h_2^2 - \frac{4Q_b l}{\sigma_{s2}}} = \frac{h_1 \sigma_{s1}^2}{2E_1} + \frac{h_2 \sigma_{s2}^2}{2E_2} - 2\gamma_{fm}$$

Если выполняются условия

$$\frac{h_1 \sigma_{s1}^2}{2E_1} + \frac{3\sigma_{s1}^2 h_1^4}{8E_2 h_2^3} < 2\gamma_{fm}, \quad \sigma_{s1} h_1^2 < \frac{2}{3} \sigma_{s2} h_2^2$$

или

$$\frac{h_1 \sigma_{s1}^2}{2E_1} + \frac{h_2 \sigma_{s2}^2}{2E_2} - \frac{\sigma_{s2}^2}{\sqrt{3} E_2} \sqrt{h_2^2 - \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}} h_1^2} < 2\gamma_{fm}$$

$$3/2 \sigma_{s1} h_1^2 > \sigma_{s2} h_2^2 > \sigma_{s1} h_1^2$$

то трещина не развивается, а разрушение происходит вследствие исчерпания несущей способности балки 1 при упругом или упругопластическом состоянии слоя 2

$$(3.8) \quad Q_b = \sigma_{s1} h_1^2 / 4l$$

Рост трещины в рассматриваемой задаче всегда ускоряющийся, неустойчивый, так как  $Q_b \sim 1/l$ .

В случае жесткопластических материалов обоих слоев, когда  $\gamma_{fm}E_1 \gg \gg h_1\sigma_{s1}^2$ ,  $\gamma_{fm}E_2 \gg h_2\sigma_{s2}^2$ , трещина не развивается, а разрушение происходит вследствие образования пластического шарнира в балке 1 в конце трещины (см. формулу 3.8). Можно показать, что этот результат справедлив для произвольного случая нагружения многослойных оболочек с трещинами расслаивания.

*Трещина поперечного разрыва в двухслойной балке.* В этом случае имеем

$$(3.9) \quad \begin{aligned} M_n^0 &= M_n^+ = M_n^- = 0, \quad T_n^0 = T_n^+ = T_n^- = 0 \\ N_n^0 &= 0, \quad N_n^+ = -N, \quad N_n^- = N \\ N &= hE\varepsilon_n, \quad U_s = 1/2 hE\varepsilon_n^2 \quad \text{при } |\varepsilon_n| < \varepsilon_s \\ N &= hE\varepsilon_s, \quad U = 1/2 hE\varepsilon_s^2 \quad \text{при } |\varepsilon_n| > \varepsilon_s \end{aligned}$$

Отсюда при помощи уравнения (2.2) находим предельные нагрузки  $N_b$  в случае монотонного возрастания  $N$ :

при  $N_b < h_1\sigma_{s1} < h_2\sigma_{s2}$  (квазихрупкое разрушение)

$$N_b = 2 \sqrt{\gamma_{fm}} \left( \frac{1}{h_1 E_1} + \frac{1}{h_2 E_2} \right)^{-1/2}$$

при  $h_1\sigma_{s1} < 2\sqrt{\gamma_{fm}} (h_1^{-1}E_1^{-1} + h_2^{-1}E_2^{-1})^{-1/2}$  (пластическое разрушение слоя 1 с неразвивающейся трещиной)

$$N_b = h_1\sigma_{s1}$$

**4. Докритический рост трещин расслаивания в многослойных оболочках из упругопластических материалов.** Рассмотрим простой пример докритического развития трещины расслаивания нормального разрыва в двухслойной балке при чистом изгибе моментом  $M$ . В этом случае величина  $\Gamma$  в докритическом состоянии при простом нагружении определяется формулами (3.1), (3.2) и (3.4), в которых нужно положить  $Ql = M$ . Она не зависит от длины трещины  $l$ ; как легко проверить, эта независимость от  $l$  сохранится для любых, сколь угодно сложных путей нагружения  $M(t)$ , хотя соответствующие выражения (3.2) и (3.4) будут уже другими (они будут зависеть от предшествующего пути нагружения).

Нетрудно проверить непосредственным подсчетом, что для сложного пути нагружения величина  $\Gamma$  будет меньше (или по крайней мере, не больше), чем для простого пути нагружения. Это обстоятельство справедливо не только для данного примера, но и в общем случае трещин расслаивания в многослойных оболочках из упругопластических материалов. Все закономерности докритического роста трещин имеют следующий общий характер: развитие трещины начинается, как только будет превзойдено некоторое пороговое значение  $\Gamma$ , зависящее от конкретного физико-химического механизма процесса разрушения непосредственно на фронте трещины [1, 2]. Отсюда вытекает следующий общий вывод: если действующие на оболочку внешние нагрузки быстро увеличить, а затем уменьшить до нормальных, рабочих значений, то это приведет, вообще говоря, к увеличению порогового значения  $\Gamma$ . Этот физический эффект пластичности «в большом» может оказаться полезным во многих практических приложениях.

Видно, что эффект Баушингера приводит к еще большему уменьшению величины  $[U_s]$ . Поэтому предварительным наложением на оболочку нескольких циклов «нагружение — разгрузка» можно добиться существенного увеличения уровня пороговых нагрузок, при котором начинается докритический рост трещин.

Найдем для некоторых случаев скорость докритического роста трещины расслаивания  $l^*$  в рассматриваемом случае, основываясь на уравнении (1.12) и следующих общих закономерностях докритического роста трещин [1, 2]:

подростание трещины, мгновенно следующее за нагружением

$$(4.1) \quad l^* = \frac{\beta_{fm} [U_s] [U_s^*]}{2\gamma_{fm} (2\gamma_{fm} - [U_s])} \quad \text{при } [U_s^*] \geq 0$$

развитие трещины вследствие водородного охрупчивания (в металлах)

$$(4.2) \quad l^* = A_{fm} (\sqrt{[U_s]} - B_{fm})$$

рост трещины вследствие кинетического механизма локального старения

$$(4.3) \quad l^* = v_{fm} \exp \frac{\alpha_{fm} \sqrt{[U_s]}}{RT}$$

рост трещины вследствие коррозии

$$(4.4) \quad l^* = \text{const}$$

Формулы (4.1)—(4.4) очевидно, пригодны и в общем случае трещин расслаивания в многослойных оболочках, причем уравнение (4.1) нужно дополнить условием необратимости трещины при разгрузке ( $l^* = 0$  при  $[U_s^*] < 0$ ). Уравнения (4.2)—(4.4) получены, строго говоря, для квазистационарных нагрузок. При одновременном действии нескольких механизмов докритического роста трещин нужно сложить соответствующие приращения длины трещины для каждого механизма, если отсутствует их взаимное влияние друг на друга. В случае трещины поперечного разрыва величина  $[U_s]$  не зависит от  $l$  и пути нагружения. В случае консольного нагружения силами трещина будет ускоряться; точная зависимость  $l(t)$  может быть найдена из соответствующего дифференциального уравнения, полученного после подстановки  $[U_s]$  согласно (3.3)—(3.6) в уравнения типа (4.1)—(4.4).

**5. Зависимость предельных нагрузок от пути нагружения.** Рассмотрим простейший случай чистого изгиба балки на жесткой подложке (когда слой 2 в двухслойной балке абсолютно жесткий). На фиг. 4 изображена зависимость изгибающего момента  $M_n$  от кривизны  $\kappa_n$  в основании балки (в конце трещины). Пользуясь этой диаграммой, легко вычислить значение  $[U_s]$  для любых путей нагружения. Например, имеем

$$\text{в т. } A \text{ по пути } OA \quad [U_s] = S (OAE)$$

$$\text{в т. } C \text{ по пути } OABC \quad [U_s] = -S (OABC)$$

$$\text{в т. } A \text{ по пути } OABCD \quad [U_s] = S (OAE) - A_B (ABCD)$$

и т. д. Здесь  $S$  — площадь соответствующей криволинейной фигуры на фиг. 4,  $A_B$  — площадь гистерезисной петли Баушингера.

Обобщая эти построения, можно прийти к общим выводам.

**А.** Предельные нагрузки для многослойных упругопластических оболочек с трещинами расслаивания не зависят от пути нагружения, если можно пренебречь вторичными эффектами типа эффекта Баушингера.

**Б.** Гистерезисный эффект Баушингера, изображенный на фиг. 4, приводит к увеличению предельных нагрузок для многослойных оболочек с трещинами расслаивания.

Эти выводы справедливы, вообще говоря, для любых нагрузок «иницирования», при которых начинается рост трещин.

Таким образом, при отсутствии эффекта Баушингера величина  $[U_s]$  представляет собой функцию  $M_n, N_n, T_n$ , не зависящую явно от времени и вычисляемую по простому пути нагружения (это равнозначно допущению, что оболочка с трещиной является нелинейно-упругой). Следовательно, в этом случае нагрузки, при которых начинается рост трещин расслаивания в многослойных оболочках, можно вычислять в предположении соответствующего нелинейно-упругого поведения материала.

**6. Усталостные трещины расслаивания.** Пусть внешние нагрузки представляют собой некоторые периодические функции времени. Тогда величина  $[U_s]$  будет также некоторой периодической функцией времени со слабо изменяющимися коэффициентами. Используя закономерности докритического развития трещин типа (4.1)—(4.4), можно найти приращения трещины для любого программированного или случайного нагружения [2]. Ограничимся здесь лишь учетом пластических эффектов мгновенной реакции, описываемых уравнением (4.1).

Интегрируя это уравнение, при помощи известного подхода [2] можно прийти к следующей закономерности:

$$\frac{dl}{dn} = -\beta_{fm} \left( \frac{[U_s^{\max}] - [U_s^{\min}] - A_B}{2\gamma_{fm}} - \ln \frac{2\gamma_{fm} - [U_s^{\max}] + \Delta S + A_B}{2\gamma_{fm} - [U_s^{\min}] + \Delta S} \right)$$

Здесь  $n$  — число циклов нагрузки (играет роль времени),  $dl/dn$  — скорость трещины,  $[U_s^{\max}]$  и  $[U_s^{\min}]$  — соответствующие наибольшее и наименьшее значения  $[U_s]$  в течение цикла, вычисленные по простому пути нагружения,  $A_B$  — площадь соответствующей гистерезисной петли Баушингера,  $\Delta S$  — слагаемое, отражающее влияние предыстории в начале цикла (в большинстве случаев его можно положить равным нулю, см. фиг. 4).

*Упругая многослойная оболочка с квазихрупкими трещинами расслаивания.* В этом случае величина  $\Gamma$  выражается через коэффициенты интенсивности напряжений [2], поэтому уравнение (1.12) можно использовать для вычисления коэффициентов интенсивности по усилиям и изгибающим моментам, определяемым из расчета упругой оболочки.

*Оптимальное проектирование многослойных оболочек с трещинами расслаивания.* Опыт показывает, что образование трещин расслаивания в многослойных конструкциях неизбежно, особенно в процессе эксплуатации. Поэтому важно, чтобы образующиеся повреждения были безопасными и не мешали выполнить целевое назначение конструкции. Проведенный выше анализ позволяет выделить важнейший конструкционный параметр многослойной оболочки, который управляет этим процессом. Этим параметром является величина  $\Gamma$ ; конструкция должна быть спроектирована так, чтобы эта величина была наибольшей в зонах, наиболее опасных с точки зрения расслаивания. Технология создания конструкции должна обеспечить максимально возможное торможение трещин расслаивания; важнейшими физико-химическими характеристиками прочности соединения слоев являются параметры  $\gamma_{fm}, \beta_{fm}, \nu_{fm}, \alpha_{fm}, A_{fm}$  и др. В зависимости от условий работы конструкции какой-либо из этих параметров может играть главную роль при выборе оптимальной технологии и оптимального многослойного материала.

7. **Примеры, иллюстрирующие общую теорию. Эллиптическая трещина в пластине.** Пусть плоская пластина склеена из двух одинаковых слоев толщины  $h$ . На границе слоев имеется трещина эллиптической формы  $L$  в плане:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . К берегам трещины приложено постоянное давление  $p$ . Вследствие симметрии достаточно рассмотреть деформацию верхнего слоя.

Для нормального смещения  $w$  слоя имеем

$$(7.1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{k_b}$$

$$L: w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \left( k_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right)$$

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$(7.2) \quad w = A \frac{p}{k_b} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad A = \frac{1}{8} (3a^{-4} + 2a^{-2}b^{-2} + 3b^{-4})^{-1}$$

Величина  $\Gamma$  в данном случае равна (учитываем наличие второго слоя)

$$(7.3) \quad \Gamma = k_b \kappa_n^2 = 64A^2 \frac{p^2}{k_b} \left[ \left( \frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4} \right)^2 + \frac{4x^2y^2}{a^4b^4} \right]$$

$$((x, y) \in L)$$

Найдем также коэффициент интенсивности напряжений

$$(7.4) \quad K_I = \sqrt{\frac{E[U_s]}{1-\nu^2}} = 16Ap \frac{\sqrt{3}}{h^{3/2}} \left[ \left( \frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4} \right)^2 + \frac{4x^2y^2}{a^4b^4} \right]^{1/2}$$

Таким образом, эллиптическая трещина расслаивания всегда начинает развиваться вдоль малой оси; контур трещины изменяется до тех пор, пока не станет круговым с диаметром, равным большому диаметру  $2b$  начального эллипса. После этого трещина растет вдоль всего контура, оставаясь круговой.

Оценим рост трещины в процессе увеличения давления на основе следующего приближенного допущения: контур трещины все время остается эллиптическим с малым диаметром, равным  $2b = 2b(p)$ , и неизменным большим диаметром  $2a$ . Ограничимся лишь рассмотрением предельных состояний, когда  $K_{I\max} = K_{Ic}$  в точке  $x = 0$ ,  $y = \pm b$ ; докритическое развитие трещины можно изучить при помощи этого же допущения.

На основании (7.4) получаем

$$(7.5) \quad \bar{p} = 3\bar{b}^2 + 2 + 3\bar{b}^{-2}$$

$$(\bar{p} = 2 \sqrt{3} a^2 p h^{-3/2} K_{Ic}^{-1}, \quad \bar{b} = b/a \leq 1)$$

Как видно, по достижении предельного давления  $p_b$ , соответствующего начальной величине  $b_0$ , трещина развивается неустойчиво, переходя при  $b = 1$  на круговую форму. В случае дискообразной трещины

$$K_I = \frac{\sqrt{3} p r^2}{4h^{3/2}}, \quad \bar{p} = \frac{8}{\bar{r}^2} \quad \left( \bar{r} = \frac{r}{a} \right)$$

Отметим предельный случай  $b/a \rightarrow 0$  (полоса  $|y| < b$ ). В этом случае согласно (7.4)

$$K_I = \frac{2pb^2}{h\sqrt{3h}}, \quad \bar{p} = \frac{3}{\bar{b}^2} \quad \left( \bar{b} = \frac{b}{h} \right)$$

В отличие от случая эллиптической трещины в трехмерном теле эллиптическая трещина расслаивания в пластине не имеет участка устойчивого подрастания (впрочем, при наличии других слоев из более жесткого материала такие участки, очевидно, должны появиться).

**Параболическая трещина в пластине.** Пусть в условиях предыдущей задачи трещина расслаивания занимает в плане область  $y \geq x^2/(2r_0)$ , где  $r_0$  — радиус кривизны параболы в ее вершине. Решение краевой задачи (7.1) для этой области таково:

$$(7.6) \quad w = \frac{p r_0^2}{6k_b} \left( y - \frac{x^2}{2r_0} \right)^2$$

$$\Gamma = k_b \kappa_n^2 = \frac{p^2 r_0^2}{9k_b} [(x^2 - r_0^2)^2 + 4x^2]$$

$$K_I = \frac{2r_0 p_0}{h \sqrt{3h}} \sqrt{(x^2 - r_0^2)^2 + 4x^2}$$

Функция  $K_I(x)$  имеет один локальный максимум при  $x = 0$  и два абсолютных минимума при  $x = \pm r_0/\sqrt{5}$ .

*Гиперболическая трещина в пластине.* Пусть в условиях предыдущих задач трещина занимает в плане область  $x^2/a^2 - y^2/b^2 \leq 1$ , где  $a$  и  $b$  — параметры гиперболы.

Решение краевой задачи (7.1) для этой области таково:

$$(7.7) \quad w = A \frac{p}{k_b} \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2$$

$$\Gamma = 64A^2 \frac{p^2}{k_b} \left[ \left( \frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4} \right)^2 + \frac{4x^2 y^2}{a^4 b^4} \right]$$

$$A = \frac{1}{8} (3a^{-4} - 2a^{-2}b^{-2} + 3b^{-4})^{-1}$$

*Трещина расслаивания в двухслойной цилиндрической оболочке.* Пусть в круговой цилиндрической оболочке радиуса  $R$  толщины  $2h$  имеется осесимметричная трещина расслаивания длины  $2L$ , которая разделяет исходную оболочку на две цилиндрические оболочки толщины  $h_1$  и  $h_2$ , сделанные из различных материалов ( $2h = h_1 + h_2$ ). К берегам трещины приложено постоянное давление  $p$ .

Радиальное смещение  $w$  цилиндрических оболочек определяется из краевой задачи

$$(7.8) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E h_i}{R^2 k_i} w = \frac{p}{k_i}, \quad k_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)} \quad (i = 1, 2)$$

$$x = \pm L, \quad w = 0, \quad dw/dx = 0$$

Решение краевой задачи (7.8) запишем так:

$$(7.9) \quad w_i = \frac{p R^2}{E_i h_i} \left( 1 - \frac{\sin \lambda_i L \operatorname{ch} \lambda_i x + \operatorname{sh} \lambda_i L \cos \lambda_i x}{\sin \lambda_i L \operatorname{ch} \lambda_i L + \operatorname{sh} \lambda_i L \cos \lambda_i L} \right)$$

$$\lambda_i = \left( \frac{E_i h_i}{k_i R^2} \right)^{1/4} = 12 \left( \frac{1 - \nu_i^2}{R^2 h_i^2} \right)^{1/4} \quad (i = 1, 2)$$

Отсюда определяем

$$(7.10) \quad \Gamma = \frac{1}{2} k_{b1} \kappa_{n1}^2 + \frac{1}{2} k_{b2} \kappa_{n2}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} p^2 R^2 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{E_i h_i} \left( \frac{\operatorname{tg} \lambda_i L - \operatorname{th} \lambda_i L}{\operatorname{tg} \lambda_i L + \operatorname{th} \lambda_i L} \right)^2$$

Эта формула позволяет исследовать критическое и докритическое развитие трещины расслаивания. Изучим лишь критическое состояние, в котором выполняется критерий  $\Gamma = 2\gamma_{fm}$ ; ограничимся случаем двух одинаковых слоев толщины  $h_1 = h_2 = h$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Согласно (7.10), в этом случае имеем

$$(7.11) \quad \bar{p} = \frac{\operatorname{tg} \bar{L} + \operatorname{th} \bar{L}}{\operatorname{tg} \bar{L} - \operatorname{th} \bar{L}} \quad \left( \bar{p} = \frac{R p_b}{\sqrt{2 E h \gamma_{fm}}}, \quad \bar{L} = \lambda L \right)$$

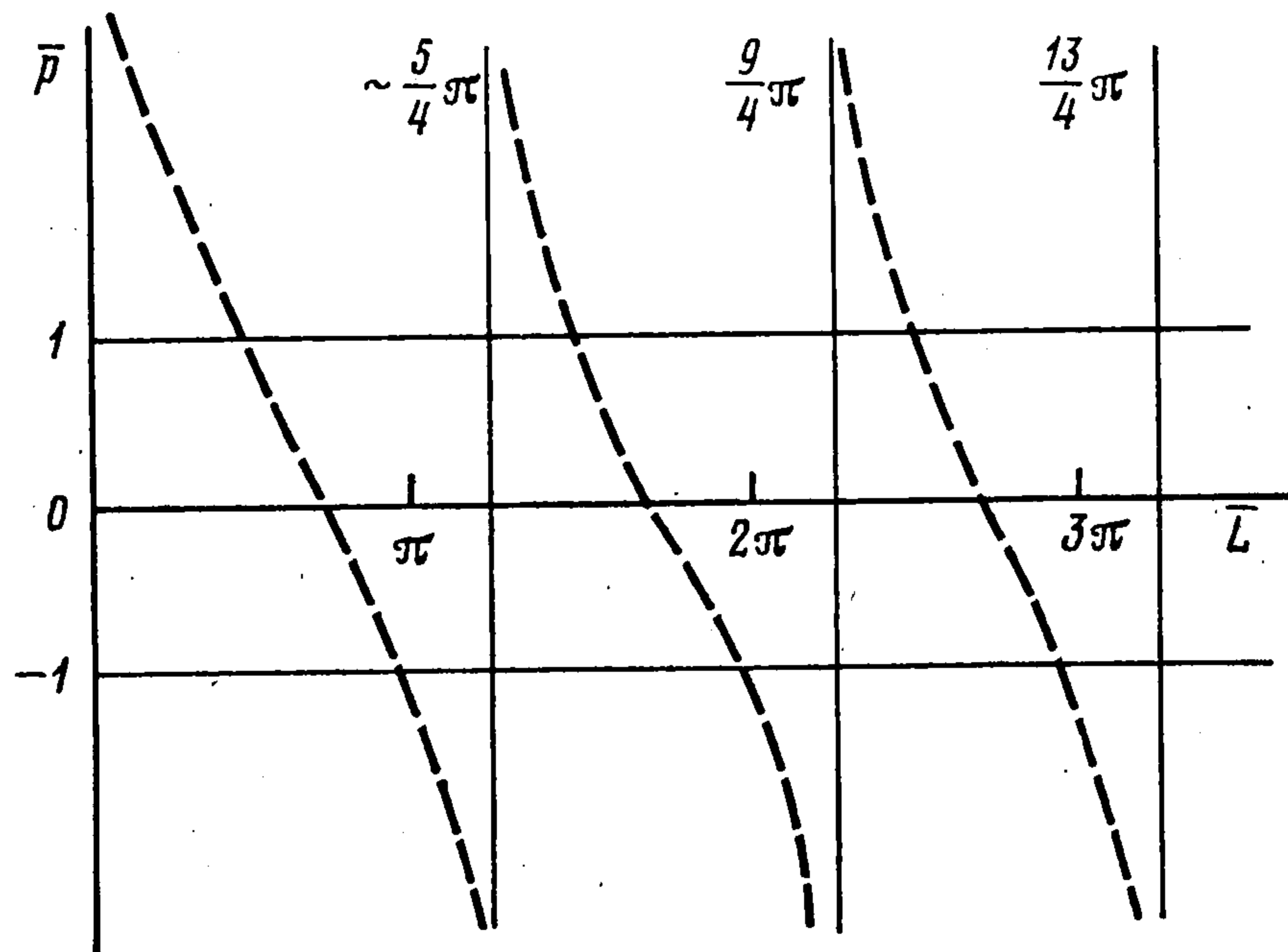
График функции  $\bar{p}(\bar{L})$  изображен на фиг. 5. Он состоит из бесконечного числа «почти-периодических» неустойчивых ветвей, имеющих своими асимптотами прямые

$$\lambda L_b = 0, \quad \frac{5}{4} \pi - 4 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{9}{4} \pi, \quad \frac{13}{4} \pi, \quad \frac{17}{4} \pi, \dots$$

Поведение трещин расслаивания в цилиндрической оболочке оказывается весьма своеобразным. При любой начальной трещине  $L_0$  она всегда подрастает к ближайшему справа значению  $L_b$  и будет оставаться в этом положении  $L = L_b$  сколь угодно долго и при любых нагрузках (так как при  $L = L_b$  величина  $\Gamma$  равна нулю). Подрастание трещины в критическом состоянии будет неустойчивым, быстрым, а в докритическом состоянии может быть достаточно медленным. Наличие бесконечного числа возможных «барьерных» состояний, в которых трещина «стационарна» и не подвержена какому-ли-

бо росту в критическом или докритическом режиме, роднит рассмотренную систему с квантовомеханическими системами, для которых такое поведение типично.

*Эллиптическая трещина в мембране.* В рассмотренных выше примерах считалось, что изгибные напряжения велики по сравнению с напряжениями растяжения срединной поверхности. Рассмотрим другой крайний случай, когда изгибные напряжения малы по сравнению с предварительным натяжением пластины напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ .



Фиг. 5

Вначале отметим простую общую формулу для  $[U_s]$  в случае трещины расслаивания в произвольной многослойной безмоментной оболочке (мембране)

$$(7.12) \quad [U_s] = \frac{1}{2} \mu^+ \left( \frac{\partial w^+}{\partial n} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu^- \left( \frac{\partial w^-}{\partial n} \right)^2$$

$$(\mu^\pm = \sum h_i^\pm \sigma_{ni}^\pm)$$

Таким образом, согласно (1.12) и (7.12) развитие трещины расслаивания в безмоментной оболочке определяется углами поворота соответствующих оболочек в рассматриваемой точке контура трещины.

Пусть плоская упругая мембрана толщины  $2h$  склеена из двух одинаковых слоев; на границе раздела имеется эллиптическая трещина расслаивания  $L$ , к берегам которой приложено постоянное давление  $p$ .

Для нормального смещения  $w$  верхнего слоя имеем

$$(7.13) \quad \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{h}$$

$$\bar{w} = 0 \text{ при } (x, y) \in L$$

Решение этой краевой задачи имеет вид

$$(7.14) \quad w = D \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad D = \frac{p}{2h} \left( \frac{\sigma_x}{a^2} + \frac{\sigma_y}{b^2} \right)^{-1}$$

$$\Gamma = h \sigma_n \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 = 4hD^2 \left( \sigma_x \frac{x^2}{a^4} + \sigma_y \frac{y^2}{b^4} \right)$$

Как видно, при  $a^2 \sigma_y > b^2 \sigma_x$  трещина начинает развиваться вдоль оси  $y$ , а при  $a^2 \sigma_y < b^2 \sigma_x$  — вдоль оси  $x$ . В процессе развития при заданных  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  форма трещины изменяется стремясь к эллипсу  $x^2/\sigma_x + y^2/\sigma_y = \lambda$ , описывающему начальную форму; в дальнейшем развитие трещины сводится к автомодельному расширению последнего эллипса за счет монотонного возрастания параметра  $\lambda$  (на этом эллипсе  $\Gamma = \text{const}$  вдоль всего контура). При фиксированных  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  рост трещины всегда неустойчив с увеличением  $p$ . Параметры  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — стабилизирующие факторы, поэтому в зависимости от пути нагружения в трехмерном пространстве  $(p, \sigma_x, \sigma_y)$  можно получить картины любого изменения эллиптических трещин (безразличное равновесие, устойчивость, неустойчивость, «хлопки» и т. д.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cherepanov G. P. Invariant  $\Gamma$  integrals.— Engng Fract. Mech., 1981, v. 14, No. 1, p. 39—58.
2. Cherepanov G. P. Mechanics of Brittle Fracture. N. Y.: McGraw-Hill, 1979 952 p.

Москва

Поступила в редакцию  
1.VIII.1982