

УДК 534.26

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН С ТЕЛАМИ, ПОКРЫТЫМИ ТОНКИМ СЖИМАЕМОМ СЛОЕМ

Пекуровский Л. Е., Поручиков В. Б., Созоненко Ю. А.

Дается постановка задачи о взаимодействии акустических волн с жесткими телами, на поверхности которых имеется тонкий сжимаемый слой. Предполагается квазидвумерность движения материала в слое, что приводит к задаче со специальным граничным условием, которая обобщает задачи о дифракции акустических волн на жестком теле и каверне. Решена задача о дифракции плоской акустической волны на сфере, покрытой тонким сжимаемым слоем.

1. Постановка задачи. Пусть криволинейные ортогональные координаты в пространстве определяют радиус-вектор точки $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$. К поверхности жесткого тела, описываемой параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, a)$, где a — постоянная величина, примыкает тонкий слой идеальной сжимаемой жидкости переменной толщины, внешняя поверхность которого $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, a + h)$, где h — функция q_1, q_2 и времени t . Пространство вне тела и сжимаемого слоя заполнено идеальной жидкостью с физическими характеристиками, отличными от характеристик материала слоя на теле. Далее исследуется процесс отражения от тела волн давления. Рассматриваемая задача возникает при изучении дифракции на телах с тонкими амортизирующими покрытиями, находящимися в воде при наличии пузырьков газа на их поверхности, и в других случаях.

В общем случае, при воздействии волны давления на тело, покрытое сжимаемым слоем, в слое возникает сложное трехмерное течение жидкости. В силу малости толщины слоя естественно попытаться свести задачу о течении в слое к квазидвумерной задаче течения по поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, a)$ [1]. Сформулируем ограничения на условия задачи, при которых это удастся сделать. Прежде всего из-за малости толщины слоя параметры Ламе $H_1 = |\partial \mathbf{r} / \partial q_1|$ и $H_2 = |\partial \mathbf{r} / \partial q_2|$ можно считать независимыми от координаты q_3 при $a \leq q_3 \leq a + h$. Можно показать, что это предположение при существовании соответствующих производных $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ будет выполняться с достаточной точностью при соблюдении неравенств

$$(1.1) \quad \left| \frac{\partial H_i(q_1, q_2, a)}{\partial q_3} \right| \frac{h(q_1, q_2, t)}{H_i(q_1, q_2, a)} \ll 1, \quad i = 1, 2$$

Для упрощения выкладок координата q_3 отождествляется с длиной дуги соответствующей координатной линии, т. е. принимается $H_3 = |\partial \mathbf{r} / \partial q_3| = 1$, что всегда можно сделать соответствующим выбором системы координат.

Далее предположим, что давление в слое p и плотность ρ не зависят от координаты q_3 . Вводя это предположение, пренебрегаем волнами, идущими в направлении нормали к поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, a)$. Для одномерного случая в акустической постановке показана [1] справедливость такого предположения при малой величине отношения акустического импеданса материала слоя к акустическому импедансу окружающей жидкости.

Кроме того, для простоты, предполагается баротропность течения в слое и окружающей жидкости.

Пусть v_1, v_2, v_3 — составляющие вектора скорости жидкости в слое. Предполагается, что составляющие v_1 и v_2 слабо зависят от координаты q_3 и вместо них рассматриваются их средние значения

$$\langle v_i \rangle = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} v_i dq_3 \quad (i = 1, 2)$$

относительно которых делаются естественные для медленно меняющихся функций предположения

$$(1.2) \quad \langle v_i^2 \rangle = \langle v_i \rangle^2 \quad (i = 1, 2), \quad \langle v_1 v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle$$

Очевидно, что предположения относительно функций p, ρ, v_1, v_2 могут выполняться только при достаточно плавном изменении толщины слоя по поверхности тела, т. е. при малости величин $\partial h / \partial q_1$ и $\partial h / \partial q_2$.

Составляющую вектора скорости v_3 исключим из трехмерных уравнений движения жидкости в слое, учитывая граничные условия при $q_3 = a$ и $a + h$. На поверхности тела при $q_3 = a$ имеем обычное граничное условие

$$(1.3) \quad v_3 = 0$$

На внешней поверхности сжимаемого слоя $q_3 = a + h$ из условия не протекания жидкости через эту контактную поверхность получим

$$(1.4) \quad v_3 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial h}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial h}{\partial q_2}$$

Записывая уравнения движения жидкости в криволинейных ортогональных координатах [2] в дивергентной форме, получим

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (H_1 H_2 \rho) + \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho v_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_2 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_3 H_1 H_2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (H_1 H_2 \rho v_1) + \frac{\partial}{\partial q_1} [(\rho v_1^2 + p) H_2] + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v_1 v_2 H_1) + \\ + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho v_1 v_3 H_1 H_2) = (\rho v_2^2 + p) \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \rho v_1 v_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \end{aligned}$$

(уравнение движения выписано только в проекции на ось q_1). Интегрируя уравнения (1.5) с учетом сделанных предположений и граничных условий (1.3), (1.4) по переменной q_3 в пределах от $q_3 = a$ до $q_3 = a + h$, получим уравнения квазидвумерного течения в слое

$$(1.6) \quad \begin{aligned} H_1 H_2 \frac{\partial}{\partial t} (h \rho) + \frac{\partial}{\partial q_1} (h \rho \langle v_1 \rangle H_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h \rho \langle v_2 \rangle H_1) = 0 \\ H_1 H_2 \frac{\partial}{\partial t} (h \rho \langle v_1 \rangle) + \frac{\partial}{\partial q_1} (h \rho \langle v_1 \rangle^2 H_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h \rho \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle H_1) + \\ + H_2 h \frac{\partial p}{\partial q_1} = h \rho \langle v_2 \rangle^2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - h \rho \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \end{aligned}$$

(уравнение движения в проекции на ось q_2 получается из второго уравнения (1.6) перестановкой индексов 1 и 2).

Заметим, что уравнения (1.6) для одномерного случая, естественно, совпадают с уравнениями квазиодномерного течения газа в трубе переменного сечения [3].

Полученные уравнения будем использовать в качестве граничных условий для решения задач дифракции на рассматриваемом теле. В силу малости толщины слоя, покрывающего тело, граничные условия сносятся на поверхность $\Gamma = \Gamma(q_1, q_2, a)$.

Во внешнем потоке жидкости используются те же криволинейные координаты, что и при выводе уравнений (1.6). Для получения замкнутой системы граничных соотношений вводится предположение о равенстве давлений во внешнем потоке жидкости на поверхности $r = r(q_1, q_2, a)$ и слое, покрывающем тело. Кроме того, во внешнем потоке на поверхности $r = r(q_1, q_2, a)$ должно выполняться граничное условие (1.4), но написанное для скоростей во внешнем потоке жидкости (скорости в слое и внешнем потоке на совпадают).

Можно убедиться в том, что полученная система граничных соотношений эквивалентна одному граничному условию, связывающему параметры внешнего потока и их производные на границе $r = r(q_1, q_2, a)$. В явном виде выпишем это граничное условие лишь в акустическом приближении. После линеаризации граничных условий имеем на поверхности $r = r(q_1, q_2, a)$

$$(1.7) \quad v_3 = \partial h / \partial t$$

$$H_1 H_2 \left(\frac{1}{h_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\rho_* c_*^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} (\langle v_1 \rangle H_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\langle v_2 \rangle H_1) = 0$$

$$\frac{\partial \langle v_1 \rangle}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_* H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \langle v_2 \rangle}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_* H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2}, \quad h_0 = h(q_1, q_2, 0)$$

Постоянные ρ_* , c_* — соответственно плотность материала и скорость звука.

К системе уравнений (1.7) присоединим линеаризованное уравнение Эйлера для внешнего потока жидкости в проекции на ось q_3 (ρ_0 — плотность жидкости во внешнем потоке)

$$(1.8) \quad \frac{\partial v_3}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial q_3}$$

Исключая из уравнений (1.7), (1.8) неизвестные h , $\langle v_1 \rangle$, $\langle v_2 \rangle$, получаем граничное условие для давления на поверхности $r = r(q_1, q_2, a)$

$$(1.9) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\rho_* c_*^2}{h_0 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial q_3} = \frac{c_*^2}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} \right) \right]$$

Соотношение (1.9) служит граничным условием для волнового уравнения

$$(1.10) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta p$$

При $c_* \ll c_0$ вместо (1.9) можно пользоваться условием [1]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\rho_* c_*^2}{h_0 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial q_3} = 0$$

Постоянная $(\rho_* c_*^2)/(h_0 \rho_0)$ характеризует сжимаемость амортизирующего слоя, покрывающего рассматриваемое тело, и имеет размерность ускорения; заметим, что такое же условие получается на свободной поверхности жидкости, находящейся под действием силы тяжести [2].

При $(\rho_* c_*^2)/(h_0 \rho_0) \rightarrow \infty$ (величина c_* ограничена) из (1.9) получается условие на жестком теле $\partial p / \partial q_3 = 0$, а при $(\rho_* c_*^2)/(h_0 \rho_0) \rightarrow 0$ ($c_* \rightarrow 0$) — условие на абсолютно мягком теле с заданным давлением на границе.

2. Дифракция на сфере. Пусть в пространстве, заполненном покоящейся сжимаемой жидкостью с начальным давлением p_0 и плотностью ρ_0 , находится жесткая неподвижная сфера радиуса a с центром в начале сферической системы координат r, ψ, φ ($x = r \sin \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \sin \psi$, $z = r \cos \varphi$), покрытая амортизирующим слоем начальной толщины h_0 . Можно проверить, что для выполнения неравенства (1.1) требуется нало-

жить условие $h_0 \ll a$. Поэтому, как и выше, граничное условие на контактной поверхности слой—жидкость сносим на сферу $r = a$.

Пусть из бесконечности на сферу набегают плоская акустическая волна давления p_i , фронт которой перпендикулярен оси z и достигает сферы $r = a$ в момент времени $t = 0$

$$(2.1) \quad p_i = p_m \exp \left[-\frac{t + (z-a)/c_0}{\theta_0} \right] \eta \left(t + \frac{z-a}{c_0} \right) + p_0$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

где p_m — перепад давлений на фронте, θ_0 — постоянная величина размерности времени, характеризующая длительность волны, c_0 — скорость звука в жидкости.

Результирующее поле давлений $p(r, \varphi, t)$ в рассматриваемой осесимметричной задаче описывается волновым уравнением (1.10), причем

$$(2.2) \quad p = p_i, \quad t \leq 0.$$

Граничное условие (1.9) в сферической системе координат на поверхности $r = a$ имеет вид

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\rho_* c_*^2}{h_0 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_*^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)$$

Представляя полное давление p в форме

$$(2.4) \quad p = p_s + p_i$$

где p_s — возмущение, которое вносит сфера в поле давлений набегающей волны, и вводя безразмерные величины

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{a}, \quad \bar{p}_s = \frac{p_s}{p_m}, \quad \bar{p}_i = \frac{p_i - p_0}{p_m}, \quad \bar{p} = \frac{p - p_0}{p_m}$$

$$\bar{\vartheta} = \frac{a}{c_0 \theta_0}, \quad \gamma = \frac{\rho_0 c_0^2 h_0}{\rho_* c_*^2 a}, \quad \nu = \frac{c_*}{c_0}$$

получаем из соотношений (1.10), (2.1)—(2.3) следующую систему для определения безразмерного давления p_s (всюду ниже опускаем черту над безразмерными переменными):

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 p_s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_s}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial p_s}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2}, \quad t > 0, r > 1$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 (p_i + p_s)}{\partial r^2} + \left(2 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial (p_i + p_s)}{\partial r} +$$

$$+ (1 - \nu^2) \left[\frac{\partial^2 (p_i + p_s)}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial (p_i + p_s)}{\partial \varphi} \right] = 0, \quad r = 1$$

$$p_s = 0, \quad t \leq 0$$

$$p_i = \exp[-\bar{\vartheta} (r \cos \varphi - 1 + \bar{t})] \eta(r \cos \varphi - 1 + \bar{t})$$

Заметим, что в первом граничном условии (2.6) производная $\partial^2 (p_i + p_s) / \partial t^2$ исключена при помощи уравнения (2.5).

Применяя к системе (2.5), (2.6) преобразование Лапласа по t , получаем

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 p_s^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p_s^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_s^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial p_s^*}{\partial \varphi} = s^2 p_s^*, \quad r > 1$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 p_s^*}{\partial r^2} + \left(2 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial p_s^*}{\partial r} + (1 - \nu^2) \left[\frac{\partial^2 p_s^*}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial p_s^*}{\partial \varphi} \right] =$$

$$= - \frac{\partial^2 p_i^*}{\partial r^2} - \left(2 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial p_i^*}{\partial r} - (1 - \nu^2) \left[\frac{\partial^2 p_i^*}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial p_i^*}{\partial \varphi} \right],$$

$$r = 1$$

$$p_s^* \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty; \quad p_i^* = \frac{\exp[-s(1-r \cos \varphi)]}{s + \vartheta}$$

$$(f^*(s, r, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, r, \varphi) e^{-st} dt)$$

В соотношениях (2.7), (2.8) $\operatorname{Re} s > 0$, так как $p_i = p_s \equiv 0$ при $t < 1 - r \cos \varphi$. Если искать решение уравнения (2.7) в виде ряда по полиномам Лежандра, то, учитывая второе условие (2.8), находим

$$(2.9) \quad p_s^* = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{K_{n+1/2}(sr)}{\sqrt{r}} P_n(\cos \varphi)$$

$$B_n \frac{K_{n+1/2}(sr)}{\sqrt{r}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi} p_s^* P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

Здесь $K_{n+1/2}(z)$ — модифицированная функция Бесселя третьего рода, $P_n(x)$ — полином Лежандра.

Падающая волна представляется в виде

$$(2.10) \quad p_i^* = \frac{e^{-s}}{s + \vartheta} \sqrt{\frac{2\pi}{sr}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) I_{n+1/2}(sr) P_n(\cos \varphi)$$

где $I_{n+1/2}(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Для определения B_n воспользуемся граничным условием. Тогда из первого условия (2.8) при помощи (2.9) и (2.10) окончательно получаем для B_n следующее выражение:

$$(2.11) \quad B_n = -\frac{e^{-s}}{s + \vartheta} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2sI'_{n+1/2}(s) - (1 + 2\gamma\alpha_n) I_{n+1/2}(s)}{2sK'_{n+1/2}(s) - (1 + 2\gamma\alpha_n) K_{n+1/2}(s)}$$

$$\alpha_n = s^2 + v^2 n(n + 1)$$

Выражение $p^*(1, \varphi, s)$ для изображения давления на поверхности сферы можно представить в виде

$$(2.12) \quad p^*(1, \varphi, s) = \frac{e^{-s}}{s + \vartheta} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\cos \varphi)}{\gamma\alpha_n K_{n+1/2}(s) - sK'_{n+1/2}(s) + \frac{1}{2} K_{n+1/2}(s)}$$

Предельные переходы при $\gamma \rightarrow 0, \infty$ в формуле (2.12) приводят к известным решениям задач о дифракции акустической волны соответствен на абсолютно жесткой и абсолютно мягкой ($p = 0$ при $r = 1$) сферах [4].

В случаях конечных значений параметра γ удобно выразить его в вид $\gamma = \varepsilon/(\mu v)$, где $\varepsilon = h_0/a$ — безразмерная толщина амортизирующего слоя, $\mu = (\rho_* c_*)/(\rho_0 c_0)$ — отношение акустических импедансов амортизирующего слоя и окружающей жидкости.

Рассмотрим такую же задачу дифракции, как и выше, но без предположения о постоянстве давления в слое по радиусу, считая, что эта величина удовлетворяет волновому уравнению как вне, так и внутри амортизирующего слоя (скорости звука в этих областях различны). При этом удобнее изменить масштаб вдоль оси r так, чтобы внешняя граница амортизирующего слоя имела уравнение $r = 1$, а поверхность твердой сферы уравнение $r = 1 - \varepsilon$. Тогда первое граничное условие (2.6) заменит условиями равенства давлений и нормальной составляющей скорости

внешней границе амортизирующего слоя, а на поверхности сферы появится условие равенства нулю нормальной производной давления (условие непротекания на жестком теле).

Изображение по Лапласу решения описанной задачи $p_{s,w}^*$ имеет при $r = 1$ следующий вид:

$$(2.13) \quad p_{s,w}^* = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s) K_{n+1/2}(s) P_n(\cos \varphi)$$

$$C_n(s) =$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s + \vartheta} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2sI'_{n+1/2}(s) - I_{n+1/2}(s) [1 + D_n(z_1, z)]}{2sK'_{n+1/2}(s) - K_{n+1/2}(s) [1 + D_n(z_1, z)]}$$

$$D_n(z_1, z) = \frac{\nu}{\mu} \frac{u_n(z) v_n(z_1) - u_n(z_1) v_n(z)}{K_{n+1/2}(z) u_n(z_1) - I_{n+1/2}(z) v_n(z_1)}$$

$$u_n(z) = I_{n+1/2}(z) - 2zI'_{n+1/2}(z), \quad v_n(z) = K_{n+1/2}(z) - 2zK'_{n+1/2}(z)$$

$$z = s/\nu, \quad z_1 = (1 - \varepsilon) z$$

Будем далее считать ε и μ малыми величинами, но такими, что величина ν конечна. Проведя в формуле (2.13) разложения по степеням ε до второго порядка включительно, получим

$$(2.14) \quad p_{s,w}^* \approx p_s^* + \varepsilon R$$

$$R = \frac{8\gamma s^2 e^{-s}}{s + \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{K_{n+1/2}(s) P_n(\cos \varphi)}{[2sK'_{n+1/2}(s) - (1 + 2\gamma\alpha_n) K_{n+1/2}(s)]^2}$$

где p_s^* дается формулами (2.9), (2.11) при $r = 1$. Проводя в (2.14) обратное преобразование Лапласа, получаем, поскольку $R(s)$ имеет оригинал, что решение с учетом волн в слое мало отличается от решения без учета волн при малых ε . Однако решение без учета волн в отличие от решения с учетом волн непрерывно и, будучи достаточно простым, дает большую возможность для анализа его свойств.

3.1 Сила действующая на сферу. Изображение безразмерной силы F , действующей на сферу, можно получить из (2.9)–(2.12), используя ортогональность полиномов Лежандра и соотношение $K_{s/2} = \sqrt{\pi/(2s)} e^{-s} (s + 1)/s$ ($\bar{F} = F/(\pi a^2 p_m)$)

$$(3.1) \quad F^* = 2 \int_0^{\pi} (p_i^* + p_s^*) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{4s}{s + \vartheta} \frac{1}{\Delta(s)}$$

$$\Delta(s) = \gamma s^3 + (\gamma + 1) s^2 + 2(1 + g)(s + 1), \quad g = \gamma \nu^2 =$$

$$= h_0 \rho_0 / (a \rho_*)$$

Здесь и ниже черта над F опущена. Применяя к формуле (3.1) обратное преобразование Лапласа, можно получить выражение для силы, действующей на сферу

$$(3.2) \quad F = -\frac{4\vartheta e^{-\vartheta t}}{\Delta(-\vartheta)} + \sum_{k=0}^2 \frac{4s_k e^{s_k t}}{(s_k + \vartheta) [3\gamma s_k^2 + 2(\gamma + 1)s_k + 2(1 + g)]}$$

Здесь s_k ($k = 0, 1, 2$) — корни кубического уравнения $\Delta(s) = 0$ (вообще говоря, комплексные).

Отказ от предположения о неподвижности сферы не приводит к существенному усложнению задачи. В правой части граничного условия (2.6) добавляется слагаемое

($-\gamma^{-1} \cos \varphi dV/dt$) и, кроме того, появляется дополнительное условие

$$\frac{2}{3} m \frac{dV}{dt} = \int_0^\pi (p_i + p_s) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi, \quad m = \frac{3M}{4\pi a^3 \rho_0}$$

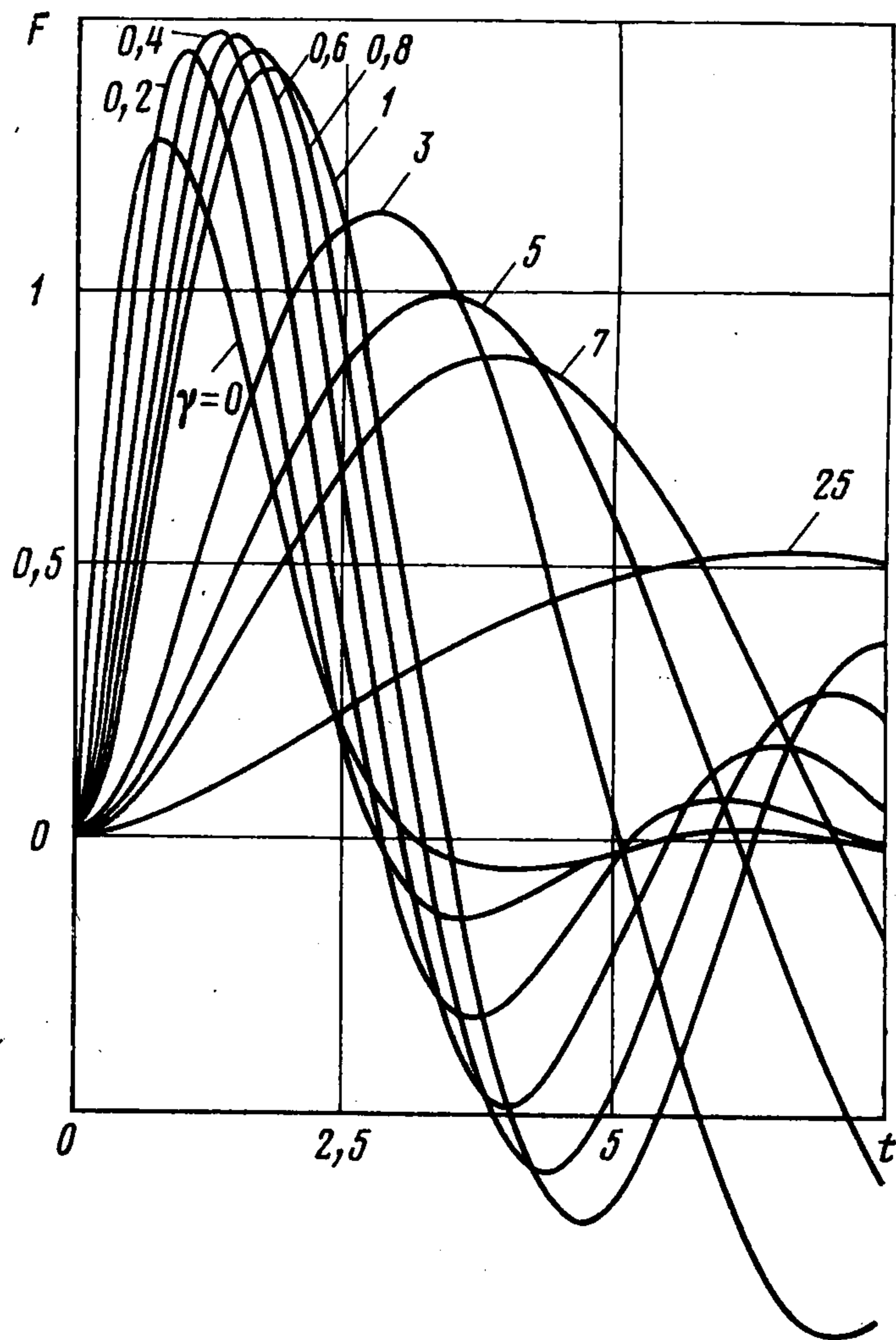
(M и V — соответственно масса и скорость сферы). Эти изменения приводят к такой же формуле для величины F , как и (3.2), однако к коэффициенту g при этом добавится слагаемое $(2m)^{-1}$.

Суммарный импульс, сообщенный сфере в процессе дифракции, как это можно показать используя выражение (3.1), оказывается не зависящим от упругих свойств амортизатора

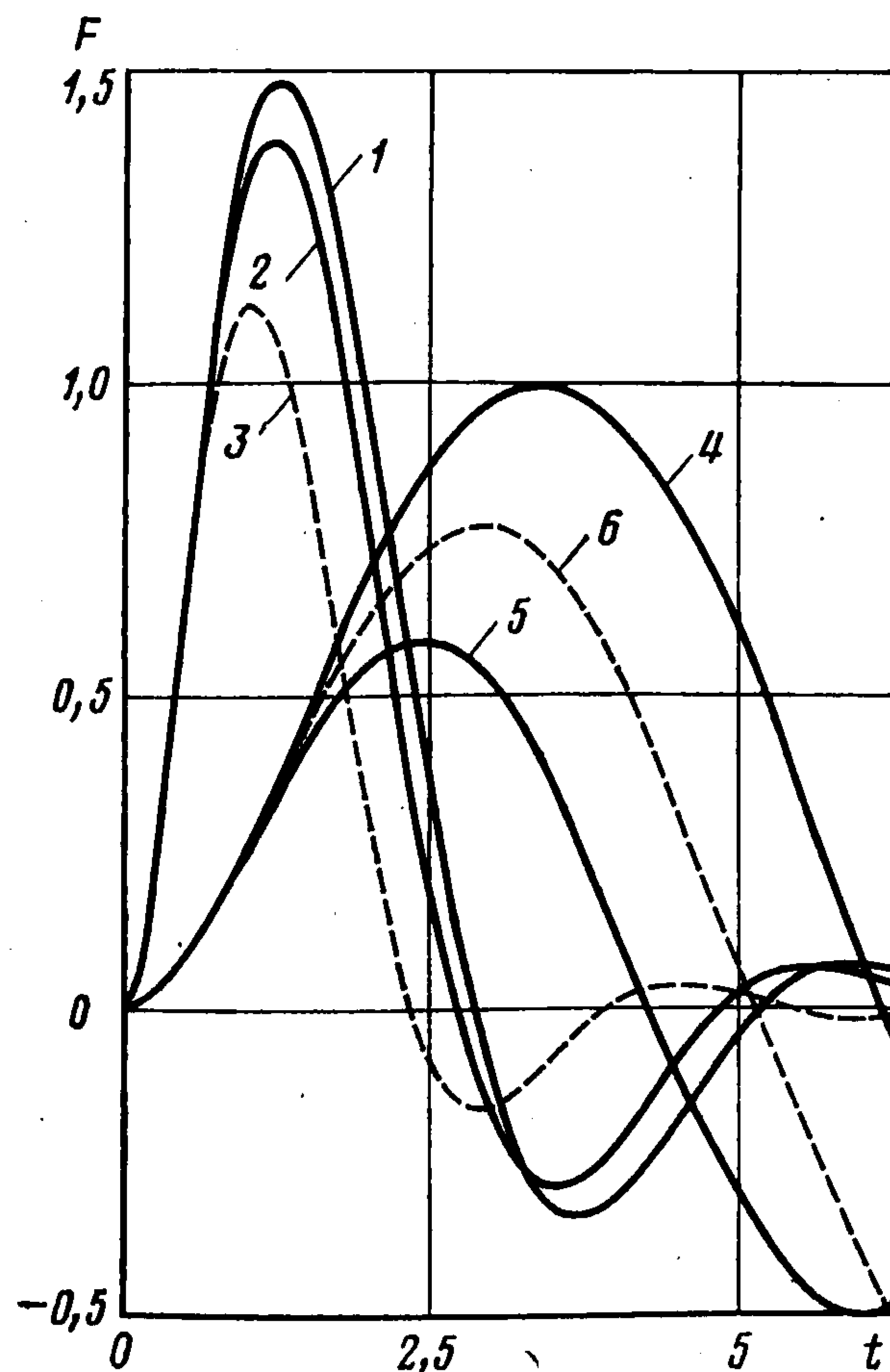
$$I = \int_0^\infty F dt = \begin{cases} 0, & \vartheta \neq 0 \\ \left(1 + \frac{h_0 \rho_0}{a \rho_*} + \frac{1}{2m}\right)^{-1}, & \vartheta = 0 \end{cases}$$

Для иллюстрации свойств выражения (3.2) на фиг. 1, 2 представлены зависимости величины силы, действующей на сферу, от времени при разных значениях параметров γ и g для случаев падения ступенчатой волны ($\vartheta = 0$).

На фиг. 1 построены графики функций $F(t)$ в предположении $g = 0$, а также указаны значения γ , соответствующие кривым.



Фиг. 1



Фиг. 2

Интересна немонотонная зависимость максимального значения F от параметра γ , характеризующего упругие свойства амортизатора: это значение с ростом γ сначала возрастает, оказываясь, тем самым, выше значения максимальной силы, действующей на жесткую сферу, и лишь затем, убывая, становится меньше него. Эффект повышения максимальной силы, действующей на сферу, покрытую амортизатором по сравнению с максимальной силой, действующей на жесткую сферу, вызван пространственностью возникающего течения: в одномерном случае он отсутствует [1]. Диапазон значений γ , отвечающих описанному эффекту, соответствует для реальных сред весьма тонким амортизаторам ($h_0/a \sim 10^{-4}$), [поэтому он может наблюдаться и без наличия амортизирующего слоя, в частности за счет пузырьков газа в жидкости около сферы или других причин.

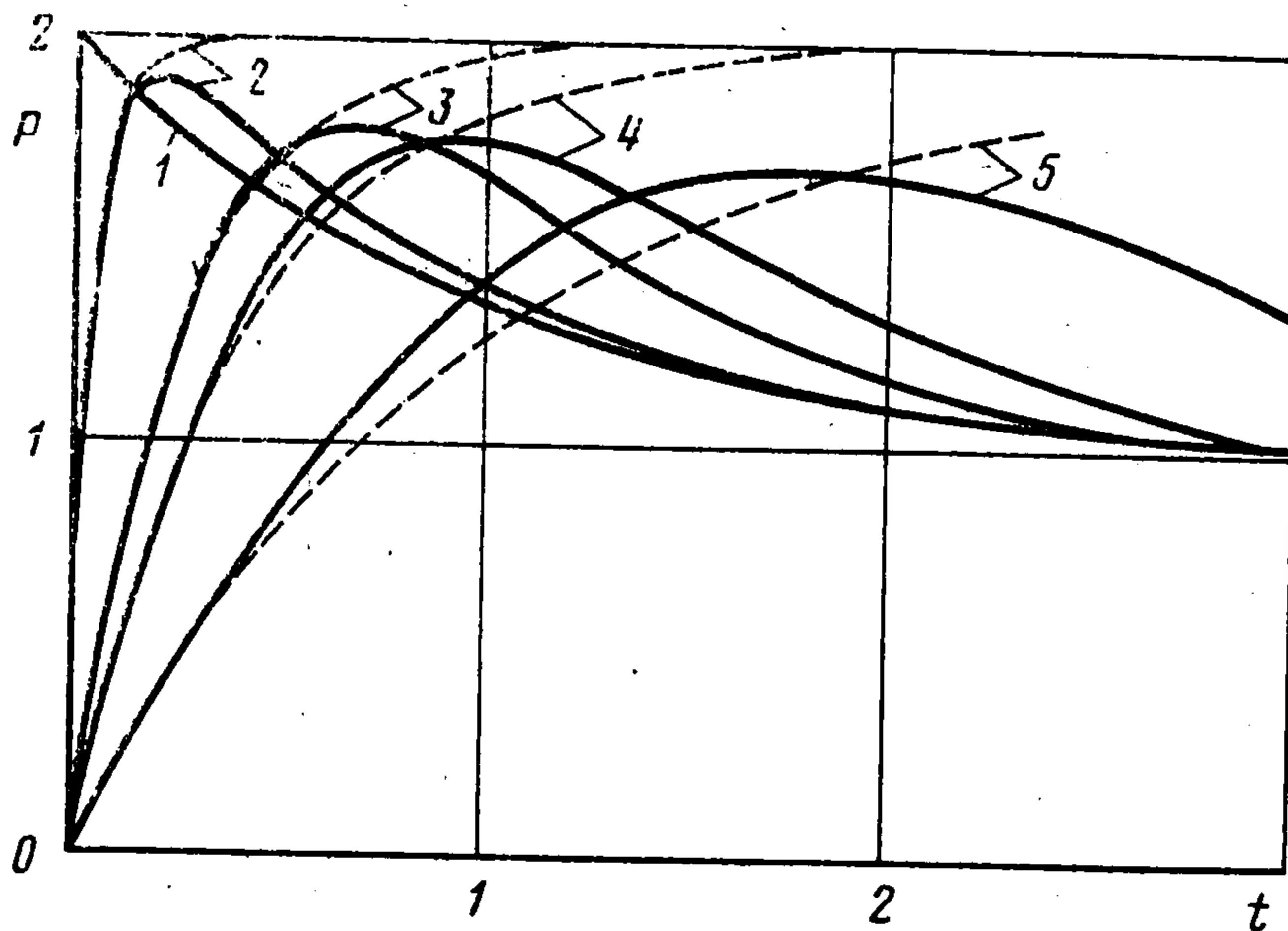
Графики функции $F(t)$, построенные на фиг. 2, соответствуют двум фиксированным значениям γ : 0,4 (кривые 1, 2, 3) и 5 (кривые 4, 5, 6) и разным значениям g : кривым 1, 4 отвечают значения $m = 0, \nu = 0$; кривым 2, 5 — $m = 0, \nu = 0,5$; штриховые кривые 3, 6 построены для иллюстрации зависимости $F(t)$ для сферы конечной массы при $m = 1, \nu = 0$.

4. Приближенный расчет давления. Поскольку проведение обратного преобразования Лапласа даже для нескольких первых членов ряда (2.12) связано со значительными трудностями, имеет смысл использовать приближенный подход в соответствии, например, с поршневой теорией [4, 5], дающей возможность получения простой формулы для распределения давления в лобовой части сферы. Для этого в уравнениях (2.5), (2.6) следует опустить производные по φ . Решение соответствующей задачи приводит к следующей зависимости давления от времени на поверхности сферы:

$$(4.1) \quad p = \left[1 - \left(\operatorname{ch} \beta t_1 - \frac{1 + 2 \cos \varphi}{\beta} \operatorname{sh} \beta t_1 \right) e^{-t_1} \right] \eta(t_1)$$

$$t_1 = \frac{t - 1 + \cos \varphi}{2\gamma}, \quad \beta = \begin{cases} \sqrt{1 - 4\gamma}, & \gamma \leq \frac{1}{4} \\ i \sqrt{4\gamma - 1}, & \gamma > \frac{1}{4} \end{cases}$$

На фиг. 3 в соответствии с формулой (4.1) сплошными линиями 1—5 изображены зависимости давления в критической точке ($\varphi = 0$) от времени при значениях γ , равных 0; 0,05; 0,25; 0,4; 1. Всегда имею-



Фиг. 3

щийся (при $\gamma \neq 0, \infty$) максимум достигается в момент времени $t = (2\gamma/\beta) \operatorname{Arth} [\beta/(1 - \gamma)]$, тем больший, чем больше γ .

В работе [1] получена формула

$$(4.2) \quad p = 2(1 - e^{-t/\gamma})$$

для давления за отраженной волной в случае одномерной задачи о падении волны на стенку, покрытую амортизатором. Естественно ожидать совпадения в начальные моменты времени давлений, полученных по формулам (4.1) и (4.2). Их сравнение можно провести на фиг. 3, где штриховые линии соответствуют отражению от плоской стенки.

Известно, что поршневая теория для моментов времени порядка единицы может иметь недостаточную точность. Однако можно выявить точность формулы (4.1), сравнив зависимость силы от времени, которая получается на ее основе и здесь для крат-

кости не приводится с точной зависимостью (3.2). Это сравнение показывает удовлетворительное их совпадение в практически интересном диапазоне $0 < t < 2$, когда фронт падающей волны пересекает поверхность сферы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поручиков В. Б., Созоненко Ю. А., Пекуровский Л. Е.* Дифракция акустической волны на сфере конечной массы с мягким покрытием. — В кн.: Взаимодействие акустических и ударных волн с упругими конструкциями. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 12—34.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
3. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
4. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974. 208 с.
5. *Мнев Е. Н., Перцев А. К.* Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970. 365 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.1.1983