УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Товстик П. Е.

Рассматривается задача о потере устойчивости безмоментного напряженного состояния тонкой упругой оболочки в линейном приближении. Предполагается, что потеря устойчивости сопровождается образованием большого количества вмятин. В простейшем случае, когда начальные напряжения и кривизны срединной поверхности постоянны, вмятины покрывают всю поверхность оболочки [1—3]. Если же указанные величины не постоянны, картина потери устойчивости усложняется — может иметь место локализация вмятин в окрестностях некоторых «наиболее слабых» линий [3—5] или точек [6]. Ниже рассматривается задача о потере устойчивости оболочки нулевой кривизны, характерная тем, что вмятины сильно вытянуты вдоль асимптотических линий и локализуются вблизи одной (наиболее слабой) из них. Метод применим к выпуклым коническим и цилиндрическим оболочкам средней длины не обязательно кругового сечения, края оболочки — не обязательно плоские кривые. Двумерная задача сводится к последовательности одномерных краевых задач, а для цилиндрической оболочки при некоторых частных предположениях приближенное решение получено в замкнутом виде. Изложение ведется для конической оболочки, а затем указываются изменения, которые необходимо внести для перехода к цилиндрической оболочке.

1. На срединной поверхности конической оболочки введем ортогональную систему координат s, φ, где $s = s^\circ R^{-1}$, s° — расстояние до вершины конуса, R — характерный размер срединной поверхности, φ — координата на направляющей, выбираемая таким образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2(ds^2 + s^2 d\varphi^2)$. При этом радиус кривизны $R_2 = Rsk^{-1}$. Пусть оболочка замкнута в направлении φ и ограничена двумя краями (φ_1 — длина кривой, образующейся при пересечении конуса и сферы радиуса R с центром в вершине конуса)

$$s_1(\varphi) \leqslant s \leqslant s_2(\varphi),\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \tag{1.1}$$

Используем систему уравнений пологих оболочек

$$\varepsilon^4\Delta^2 w + \lambda\Delta_T w + \Delta_k\Phi = 0,\quad \varepsilon^4\Delta^2\Phi - \Delta_k w = 0 \tag{1.2}$$

$$\Delta_T w = \frac{\varepsilon^2}{s^2}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(T_2\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) + s\frac{\partial}{\partial s}\left(S\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) + s\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(S\frac{\partial w}{\partial s}\right) + s\frac{\partial}{\partial s}\left(sT_1\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right]$$

$$\Delta w = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial w}{\partial s}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2},\quad \Delta_k w = \frac{k}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2},\quad w = R\varepsilon^4 w'$$

$$\Phi = \frac{\Phi'}{Eh},\quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}$$

Здесь w', Φ' — нормальный прогиб и функция напряжений, E, ν, h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, толщина оболочки, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Функции T_i, S связаны с начальными усилиями T_i', S' по формулам

$$T_i' = -Eh\lambda\varepsilon^6 T_i,\quad S' = -Eh\lambda\varepsilon^6 S \tag{1.3}$$

где $\lambda > 0$ — искомый параметр нагружения. Функции $k(\varphi) > 0$, $s_i(\varphi)$, $T_i(s,\varphi)$, $S(s,\varphi)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

2. Напряженное состояние оболочки складывается из основного напряженного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев (1.1). На краях (1.1) задано по четыре однородных граничных условия, однако при построении основного напряженного состояния на каждом краю можно удовлетворить только двум условиям. Для формулировки этих условий следует составить две такие линейные комбинации граничных условий, в которые интегралы краевого эффекта не входят, подобно тому, как это было сделано, например, в [7].

Здесь ограничимся рассмотрением только одного частного случая — шарнирного закрепления

(2.1) $$T_n = v_l = w = M_n = 0 \quad \text{при } s = s_1, \quad s = s_2$$

где T_n, M_n — усилие и момент в направлении, перпендикулярном к краю, v_l — смещение в направлении касательной к краю. При построении основного напряженного состояния с точностью до величин порядка ε^2 следует удовлетворить условиям

(2.2) $$w = \Phi = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1, \quad s = s_2$$

Если край — плоская кривая — оперт на диафрагму, жесткую в своей плоскости и гибкую из плоскости, то формулировка условий (2.1) меняется, а условия (2.2) с той же точностью сохраняются.

3. Решение системы (1.2) ищем в виде

(3.1) $$w(s, \varphi, \varepsilon) = w_* \exp\{i\varepsilon^{-1}[q(\varphi - \varphi_0) + {}^1/_2 a(\varphi - \varphi_0)^2]\}$$
$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^2\lambda_4 + \ldots$$
$$\left(w_* = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} w_n(\xi, s), \xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0), \ \mathrm{Im}\, a > 0\right)$$

где $w_n(\xi, s)$ — полиномы по ξ; функция Φ ищется в том же виде (3.1). Число q вещественно и определяет изменяемость в направлении φ, образующая $\varphi = \varphi_0$ — наиболее слабая, а параметр a характеризует скорость уменьшения глубины вмятин при удалении от нее.

Для определения неизвестных функций w_n, Φ_n и чисел q, a, φ_0, λ_n подставляем (3.1) в (1.2) и приравниваем нулю коэффициенты при степенях $\varepsilon^{1/2}$. Удобно сначала при помощи второго уравнения (1.2) выразить Φ_* через w_*. Получаем

(3.2) $$\Phi_* = \Delta_s\left[\frac{w_*}{q^4} - \frac{4\varepsilon^{1/2}}{q^5}\left(a\xi w_* - i\frac{\partial w_*}{\partial \xi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{10\varepsilon}{q^6}\left(a^2\xi^2 w_* - 2ia\xi\frac{\partial w_*}{\partial \xi} - iaw_* - \frac{\partial^2 w_*}{\partial \xi^2}\right) + \ldots\right],$$
$$\Delta_s = s^3\frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

Теперь первое уравнение (1.2) дает последовательность уравнений для определения w_n, которая может быть записана в виде

(3.3) $$H_0 w_0 = 0, \ H_0 w_1 + H_1 w_0 = 0, \ H_0 w_2 + H_1 w_1 + H_2 w_0 = 0, \ \ldots$$

Здесь

(3.4) $$H_0 z = \frac{k^2\Delta_s^2}{s^3 q^4}z + \frac{q^4}{s^3}z + \lambda_0 N z, \qquad Nz = -\frac{q^2 T_2}{s}z$$
$$H_1 z = \left(a\frac{\partial H_0}{\partial q} + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi}\right)\xi z - i\frac{\partial H_0}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \qquad H_* z = i\lambda_0 q\left(\frac{\partial S}{\partial s}z + 2S\frac{\partial z}{\partial s}\right)$$
$$H_2 z = \frac{1}{2}\left(a^2\frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + 2a\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\,\partial \varphi} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \varphi^2}\right)\xi^2 z -$$

$$- i\left(a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q\, \partial\varphi}\right)\xi \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2}\left(iz + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\right) -$$
$$- \frac{i}{2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial q\, \partial\varphi} z + H_* z + \lambda_1 N z$$

Подстановка (3.1) в условие $w = 0$ при $s = s_k(\varphi)$ дает

$$w_0(\xi, s) = 0, \quad w_1(\xi, s) + \xi s' \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0 \tag{3.5}$$
$$w_2(\xi, s) + \xi s' \frac{\partial w_1}{\partial s} + \frac{\xi^2}{2}\left((s')^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} + s'' \frac{\partial w_0}{\partial s}\right) = 0, \ldots$$

а из условия $\Phi = 0$ с учетом (3.2) получаем

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} + \xi s' \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} = 0 \tag{3.6}$$
$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial s^2} + \xi s' \frac{\partial^3 w_1}{\partial s^3} + \frac{\xi^2}{2}\left((s')^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial s^4} + s'' \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3}\right) - \frac{4is'}{q}\frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} = 0, \ldots$$

4. Рассмотрим краевую задачу, возникающую в нулевом приближении

$$H_0 w_0 \equiv \frac{k^2(\varphi_0)}{q^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2}\right) + \frac{q^4}{s^3} w_0 + \lambda_0 N w_0 = 0 \tag{4.1}$$
$$w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1(\varphi_0), \qquad s = s_2(\varphi_0)$$

Кроме основного параметра λ_0 эта задача содержит еще два параметра — q и φ_0, и наименьшее собственное значение будет

$$\lambda_0^\circ = \min_{q,\, \varphi_0} \lambda_0(q, \varphi_0) = \lambda_0(q^0, \varphi_0^0)$$

Должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0 \quad \text{при} \quad q = q^0, \varphi_0 = \varphi_0^0 \, (\lambda_0 = \lambda_0^0) \tag{4.2}$$

Обозначим через

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_{qq} & \lambda_{q\varphi} \\ \lambda_{q\varphi} & \lambda_{\varphi\varphi} \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

матрицу, составленную из вторых производных функции $\lambda_0(q, \varphi_0)$ при $q = q^\circ$, $\varphi_0 = \varphi_0^\circ$. Предположим, что Λ — положительно-определенная матрица.

Для вычисления производных, входящих в (4.2) и (4.3), можно дифференцировать задачу (4.1) по параметрам q и φ_0. Например

$$H_0 w_q + \frac{\partial H_0}{\partial q} w_0 + \frac{\partial \lambda_0}{\partial q} N w_0 = 0, \quad w_q = \frac{\partial^2 w_q}{\partial s^2} = 0 \tag{4.4}$$
$$H_0 w_\varphi + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} w_0 + \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} N w_0 = 0$$
$$w_\varphi + s' \frac{\partial w_0}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial s^2} + s' \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} = 0, \quad s = s_1, \quad s = s_2$$

При условиях (4.2) задачи (4.4) будут неоднородными задачами «на спектре». Условием существования решения задачи на спектре

$$H_0 z + G(s) = 0, \qquad z + g_{0k} = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + g_{2k} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_k \tag{4.5}$$

служит равенство

$$\int_{s_1}^{s_2} \bar{w}_0 G \, ds + \frac{k^2 s^3}{q^4}\left(g_{0k} \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial s^3} + g_{2k} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial s}\right)\Bigg|_{s_1}^{s_2} = 0 \tag{4.6}$$

Теперь равенства (4.2) принимают вид

$$\int\limits_{s_1}^{s_2} \overline{w}_0 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_0\, ds = 0 \tag{4.7}$$

$$\int\limits_{s_1}^{s_2} \overline{w}_0 \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} w_0\, ds + \frac{k^2 s^3 s'}{q^4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial s} \frac{\partial^3 \overline{w}_0}{\partial s^3} + \frac{\partial \overline{w}_0}{\partial s} \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} \right) \Big|_{s_1}^{s_2} = 0$$

Из элементов матрицы (4.3) выпишем только выражение для λ_{qq}

$$\lambda_{qq} \int\limits_{s_1}^{s_2} \overline{w}_0 N w_0\, ds + \int\limits_{s_1}^{s_2} \overline{w}_0 \left(2 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_q + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} w_0 \right) ds = 0 \tag{4.8}$$

5. Перейдем к решению последовательности уравнений (3.3) с учетом граничных условий (3.5) и (3.6). В нулевом приближении получаем

$$w_0 (\xi, s) = P_0 (\xi)\, w_0{}^\circ (s) \tag{5.1}$$

где $w_0{}^\circ$ — собственная функция задачи (4.1) при условиях (4.2), P_0 — пока неопределенная функция. В первом приближении

$$H_0 w_1 + \left[\xi P_0 \left(a \frac{\partial H_0}{\partial q} + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} \right) - i P_0' \frac{\partial H_0}{\partial q} \right] w_0{}^0 = 0 \tag{5.2}$$

$$w_1 + \xi P_0 s' \frac{\partial w_0{}^0}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} + \xi P_0 s' \frac{\partial^3 w_0{}^0}{\partial s^3} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_k$$

В силу (4.4)—(4.7) условие существования решения задачи (5.2) эквивалентно равенствам (4.2), из кототрых были определены параметры q^0, $\varphi_0{}^0$. Отсюда, в частности, следует, что не любая образующая φ_0 может быть принята за наиболее слабую в (3.1). Из (5.2) находим

$$w_1 (\xi, s) = P_1 (\xi)\, w_0{}^0 + \xi P_0 (a w_q + w_\varphi) - i P_0' w_q \tag{5.3}$$

где w_q, w_φ — решения задач (4.4) при $w_0 = w_0{}^0$, функция P_1 пока не определена.

Во втором приближении имеем уравнение, из которого с учетом граничных условий (3.5), (3.6) в силу (4.6) получаем условие существования решения w_2

$$LP_0 \equiv -{}^1\!/_2 \lambda_{qq} P_0'' + b \xi P_0' + (\eta - \lambda_2 + {}^1\!/_2 b + c\xi^2) P_0 = 0 \tag{5.4}$$

$$b = - i (a\lambda_{qq} + \lambda_{q\varphi}), \quad 2c = a^2 \lambda_{qq} + 2a\lambda_{q\varphi} + \lambda_{\varphi\varphi}$$

$$\eta = \frac{i}{2z} \left\{ \int\limits_{s_1}^{s_2} \left(w_0{}^0 \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial q} \overline{w}_\varphi - \overline{w}_0{}^0 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_\varphi \right) ds - 2i \int\limits_{s_1}^{s_2} \overline{w}_0{}^0 H_* w_0{}^0\, ds + \right.$$

$$\left. + \frac{4k^2 s^3 s'}{q^5} \left(\frac{dw_0{}^0}{ds} \frac{d^3 \overline{w}_0{}^0}{ds^3} - \frac{d\overline{w}_0{}^0}{ds} \frac{d^3 w_0{}^0}{ds^3} \right) \Big|_{s_1}^{s_2} \right\}, \qquad z = - \int\limits_{s_1}^{s_2} \overline{w}_0{}^0 N w_0{}^0\, ds$$

Условие $c = 0$ необходимо для существования решения уравнения (5.4) в виде полинома. Из квадратного уравнения $c = 0$ в силу положительной определенности матрицы Λ находим единственную величину a, такую, что $\operatorname{Im} a > 0$. При

$$c = 0, \quad \lambda_2 = (n + {}^1\!/_2)\, b + \eta, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5.5}$$

уравнение (5.4) имеет решение $P_0 = H_n (\xi)$, где H_n — полином Эрмита степени n. В первую очередь представляет интерес случай $n = 0$, $H_n \equiv 1$, ибо при этом величина λ_2 минимальна (заметим, что $b > 0$).

Последующие приближения строятся аналогично. Заметим только, что $w_k (\xi, s)$ — четные либо нечетные полиномы ξ, а условие существования w_{k+2} дает

$$LP_k + \lambda_k P_0 + F_k(\xi) = 0, \; k > 0 \tag{5.6}$$

где L — оператор в левой части (5.4) при $c = 0$. Величина λ_k определяется из условия существования решения (5.6) в виде полинома. Четность полиномов w_k, P_k, F_k при переходе к следующему приближению меняется, поэтому $\lambda_k = 0$ для нечетных k, что отмечено в (3.1).

Отделяя вещественную и мнимую части в (3.1), получаем, что каждое собственное значение (3.1) асимптотически двукратно. Форма прогиба имеет вид

$$w = (\operatorname{Re} w_* \cos z - \operatorname{Im} w_* \sin z) \exp \{-{}^1/_2 \operatorname{Im} a\xi^2\} \tag{5.7}$$
$$z = \varepsilon^{-1/2} q^0 \xi + {}^1/_2 \operatorname{Re} a\xi^2 + \theta$$

Используемый здесь метод не дает возможности определить начальную фазу $\theta = \text{const}$, которая принимает одно из двух значений: $0 \leqslant \theta_1$, $\theta_2 < 2\pi$, а также различить соответствующие собственные значения.

Из способа построения решения следует, что сформулированное выше требование замкнутости оболочки в окружном направлении не обязательно. Нужно только, чтобы наиболее слабая образующая была достаточно далеко от прямолинейных краев.

6. Задача (4.1) имеет собственные значения $\lambda_0 > 0$, если $T_2(s, \varphi) > 0$ (что соответствует сжимающим усилиям) хотя бы на части оболочки. Пусть это условие выполнено и пусть S и T_1 имеют тот же порядок, что и T_2. При этом функция w_0° вещественна и $\eta = 0$. Отсюда следует, что усилия S и T_1 не входят ни в нулевое, ни в первое приближение параметра нагрузки λ, а входят только в величину λ_4 (см. (3.1)), для вычисления которой надо построить еще два приближения.

Для оценки влияния S и T_1 на величину λ, а также для рассмотрения случая $T_2 \leqslant 0$ на всей оболочке (внутреннее давление) предположим временно, что величины T_2, εS и εT_1 имеют одинаковый порядок. Это вызовет изменение операторов N и H_*, приведенных в (3.4)

$$N(z) = -\frac{q^2 T_2}{s} z + i\varepsilon q \left(\frac{\partial S}{\partial s} z + 2S \frac{\partial z}{\partial s} \right) \tag{6.1}$$
$$H_* z = \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(s T_1 \frac{\partial z}{\partial s} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial s \, \partial \varphi_0} z \right]$$

при сохранении остальных приведенных выше формул. Краевая задача (4.1) при таком N также имеет вещественный спектр, однако собственные функции w_0 комплексны. От усилия S зависит величина λ_0, а усилие T_1 входит в величины η и λ_2.

Случай $T_2 \equiv 0$, $S \not\equiv 0$ не исключается из рассмотрения, а случай $T_2 = S \equiv 0$, $T_1 \not\equiv 0$ не рассматривается, ибо при этом решение имеет вид, отличный от (3.1).

7. Перейдем к рассмотрению цилиндрической оболочки. Пусть ее размеры и форма определяются соотношениями

$$s_1(\varphi) \leqslant s \leqslant s_2(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \quad d\sigma^2 = R^2(ds^2 + d\varphi^2), \quad R_2 = \frac{R}{k(\varphi)} \tag{7.1}$$

причем для круговой цилиндрической оболочки радиуса R будет $\varphi_2 = 2\pi$, $k(\varphi) \equiv 1$.

Непосредственный переход от конической оболочки к цилиндрической не так прост, ибо в (1.1) $s_1, s_2 \to \infty$, а $\varphi_1 \to 0$. Однако всеми приведенными выше формулами можно воспользоваться, заменив в них явно входящий множитель s на единицу.

Для цилиндрической оболочки краевая задача (4.1) при $Nz = -q^2T_2z$, если T_2 не зависит от s, имеет (в отличие от случая конической оболочки) явное решение

$$w_0 = \sin\frac{\pi(s - s_1(\varphi_0))}{l(\varphi_0)}, \quad l = s_2 - s_1, \quad \lambda_0 = \frac{q^2}{T_2} + \frac{k^2\pi^4}{T_2 l^4 q^6} \tag{7.2}$$

Отсюда находим

$$\lambda_0{}^0 = \min_{\varphi_0}\frac{4\pi k^{1/2}(\varphi_0)}{3^{3/4}l(\varphi_0)T_2(\varphi_0)}, \quad (q^0)^8 = \frac{3\pi^4k^2(\varphi_0{}^0)}{l^4(\varphi_0{}^0)} \tag{7.3}$$

а величина λ_2 в (3.1) находится по формуле (5.5) при $n = \eta = 0$ после вычисления матрицы Λ путем дифференцирования λ_0.

Заметим, что нулевое приближение критической нагрузки $\lambda_0{}^0$ совпадает со значением, определяемым по формуле Саутуэлла — Папковича ([3], с. 138) для круговой цилиндрической оболочки постоянной длины $Rl(\varphi_0{}^0)$ и радиуса $R\,[k(\varphi_0{}^0)]^{-1}$.

8. Для оценки погрешности предлагаемого метода выберем задачу, для которой известно численное решение ([3], с. 231). Рассмотрим устойчивость консольной круговой цилиндрической оболочки постоянной длины $L = lR$ под действием неоднородного по окружности внешнего давления. В приведенных выше обозначениях

$$T_2' = pRT_2, \quad T_2 = 1 + \alpha_1\cos\varphi + \alpha_2\cos 2\varphi \tag{8.1}$$
$$S = s(\alpha_1\sin\varphi + 2\alpha_2\sin 2\varphi), \quad T_1 = -{}^1/_2 s^2(\alpha_1\cos\varphi + 4\alpha_2\cos 2\varphi)$$

Пусть $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$. Тогда наиболее слабой будет образующая $\varphi_0{}^\circ = 0$. Сохраняя в (3.1) два слагаемых, формулу для критического значения параметра p запишем в виде

$$p = \frac{4\pi}{3^{3/4}}\frac{Eh\varepsilon^6k_*}{L(1+\alpha_1+\alpha_2)}, \quad k_* = 1 + \frac{\varepsilon\lambda_2}{\lambda_0{}^0} \tag{8.2}$$

Вычисления по формулам п. 5 дают

$$a = \frac{i}{4}[\lambda_0{}^0(\alpha_1 + 4\alpha_2)]^{1/2}, \quad \lambda_0{}^0 = \frac{4\pi 3^{-3/4}}{l(1+\alpha_1+\alpha_2)}, \quad \lambda_2 = \frac{-8ai}{1+\alpha_1+\alpha_2} \tag{8.3}$$

и выражение для параметра k_*, учитывающего неоднородность нагружения, принимает вид

$$k_* = 1 + 0{,}624\left(\frac{\alpha_1 + 4\alpha_2}{1+\alpha_1+\alpha_2}\right)^{1/2} y, \quad y = \left(\frac{h^2L^4}{(1-\nu^2)R^6}\right)^{1/8} \tag{8.4}$$

Введем еще длину полуволны вмятины в окружном направлении $\Delta\varphi$ и параметр ρ, учитывающий убывание глубины вмятин при удалении от наиболее слабой образующей. Получим

$$\Delta\varphi = \frac{\pi\varepsilon}{q^0} = 1{,}132y, \quad \rho = \frac{(\Delta\varphi)^2\operatorname{Im}a}{2\varepsilon} = 0{,}513\left(\frac{\alpha_1+4\alpha_2}{1+\alpha_1+\alpha_2}\right)^{1/2} y \tag{8.5}$$

При этом глубины вмятин пропорциональны числам 1, $e^{-\rho}$, $e^{-4\rho}$ и т. д.

Использование формулы (3.1) основано на предположении о большом числе вмятин в окружном направлении. Учитывая выражения для $\Delta\varphi$ и y, заключаем, что предложенный здесь метод годится для оболочек средней длины. С ростом L величина $\Delta\varphi$ растет и точность метода уменьшается.

Формула (8.4) качественно полностью согласуется с результатами, приведенными в [3]. В количественном отношении погрешность формулы (8.4) существенно зависит от параметров задачи. Наименее благоприятно сочетание $R/h = 100$, $L/R = 10$, для которого при некоторых значениях α_1, α_2 погрешность достигает 15%. С уменьшением h/R и L/R погрешность уменьшается и при $R/h = 400$, $L/R = 2{,}5$ не превосходит 5%.

Для $R/h = 1000$, $L/R = 10$, $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0$ на рис. 17.4 в [3] показана форма потери устойчивости. Ясно видна локализация вмятин в окрестности наиболее слабой образующей $\varphi_0{}^\circ = 0$. Формулы (8.5) в этом случае дают $\Delta\varphi = 36{,}4°$,

$\rho = 0{,}186$; значит, амплитуды вмятин пропорциональны числам 1; 0,83; 0,48; 0,19; 0,05. Из рис. 17.4 [3] видно, что $\Delta\varphi = 30°$. Заметим, что в этом случае погрешность формулы (8.4) менее 1%.

Формула (8.4) не учитывает начальных усилий T_1', S'. Их вклад может быть оценен по формулам (6.1), (5.4). В результате к величине k_* добавляется слагаемое $0{,}181\ (\alpha_1 + 4\alpha_2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2)^{-1} y^2$, которое лишь частично учитывает члены порядка ε^2 в k_*.

В [3] в качестве координатных функций метода Бубнова были взяты четные функции φ, поэтому построенная форма потери устойчивости $w\ (s, \varphi)$ — также четная функция φ. При нагрузке, весьма близкой к критической, возможна потеря устойчивости и по нечетной форме.

9. Рассмотрим задачу о потере устойчивости круговой цилиндрической оболочки средней длины с косым краем под действием однородного внешнего давления p. Пусть

$$s_1(\varphi) = 0, \quad s_2(\varphi) = l(\varphi) = l_* + \operatorname{tg}\beta \cos\varphi \tag{9.1}$$

где β — угол наклона края. В формулах п. 7 нужно считать $T_2 = 1$, $k = 1$. Тогда

$$\varphi_0^0 = 0, \quad \lambda_0^0 = \frac{4\pi}{3^{3/4} l_0}, \quad (q^0)^8 = \frac{3\pi^4}{l_0^4}, \quad l_0 = l_* + \operatorname{tg}\beta \tag{9.2}$$

$$\lambda_{qq} = 16, \quad \lambda_{q\varphi} = 0, \quad \lambda_{\varphi\varphi} = \frac{4\pi \operatorname{tg}\beta}{3^{3/4} l_0^2}$$

и критическое значение давления равно

$$p = \frac{4\pi}{3^{3/4}} \frac{Eh\varepsilon^6 k_*}{Rl_0}, \quad k_* = 1 + 0{,}624 \left(\frac{h^2 \operatorname{tg}^4 \beta}{(1 - \nu^2) R^2} \right)^{1/8} \tag{9.3}$$

При $k_* = 1$ получаем формулу Саутуэлла — Папковича, соответствующую максимальной длине оболочки, а второе слагаемое в k_* учитывает влияние косого края. Например, при $\beta = 45°$, $R/h = 400$, $\nu = 0{,}3$ наличие косого края увеличивает критическое давление на 14%.

10. Изложенный способ может быть использован и для построения нижней части спектра при свободных колебаниях конической оболочки и цилиндрической оболочки средней длины. Для конической оболочки в (1.2), (3.4) нужно положить

$$\lambda \Delta_T w = -\lambda w, \quad \lambda = \frac{E\omega^2}{\rho R^2 \varepsilon^4}, \quad Nz = -sz, \quad H_* z = 0 \tag{10.1}$$

где ω, ρ — частота колебаний и плотность материала. Асимптотически двукратные собственные значения параметра частоты λ даются формулой

$$\lambda^{(n)} = \lambda_0^0 + \varepsilon\,(n + 1/2)\, b + O(\varepsilon^2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.2}$$

где λ_0^0 — собственное значение задачи (4.1), а b определяется по формуле (5.4).

Переход к цилиндрической оболочке (в общем случае некруговой и с косым краем) проводится так же, как в п. 7. Имеем

$$\lambda_0 = q^4 + \pi^4 q^{-4} F^2(\varphi_0), \quad F = kl^{-2} \tag{10.3}$$

На наиболее слабой образующей φ_0^0 функция F принимает наименьшее значение. Вычисляя производные λ_{qq}, $\lambda_{\varphi\varphi}$ ($\lambda_{q\varphi} = 0$), по формулам (10.2), (5.4) находим

$$\lambda^{(n)} = 2\pi^2 F_0\,[1 + 4\,(n + 1/2)\varepsilon\pi^{-1/2} (F_0'')^{1/2}] + O(\varepsilon^2)\, F_0^{-3/4} \tag{10.4}$$

где $F_0 = F(\varphi_0^0)$. Отсюда как частный случай при $l = \mathrm{const}$, $n = 0$ получается формула для некруговой цилиндрической оболочки постоянной длины ([8], с. 335). Укажем на опечатку в формулах (6.23) и (6.24) из [8]: коэффициент 8 следует заменить на 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Локальная устойчивость оболочек.— Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 2, с. 111—112.
2. *Ширшов В. П.* Локальная устойчивость оболочек.— В кн.: Теория пластин и оболочек. Тр. 2-й Всес. конференции. Львов, 1961, Киев: Изд-во АН УССР, 1962, с. 314—317.
3. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. *Товстик П. Е.* Устойчивость оболочек вращения в линейном приближении.— В кн.: Расчет пространственных конструкций. Вып. 13. М.: Стройиздат, 1970, с. 118—138.
6. *Товстик П. Е.* К вопросу о локальной потере устойчивости оболочек.— Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон., 1982, № 13, вып. 3, с. 72—78.
7. *Черных К. Ф.* Простой краевой эффект и расчленение граничных условий в линейной теории тонких оболочек.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1, с. 89—98.
8. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
22.XI.1982