Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 5, 1983

УДК 539.3 : 534.1

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА С ФИКСИРОВАННЫМИ ЧАСТОТАМИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Братусь А. С.

Асимптотическими методами получены приближенные решения задач оптимального проектирования цилиндрической оболочки переменной толщины, имеющей минимальный вес при фиксированных частотах свободных колебаний, в осесимметричном и неосесимметричном случаях. Найдены качественные картины распределений толщин в оптимальных решениях и проведен их анализ.

1. Основные уравнения. Рассмотрим свободные колебания круговой цилиндрической оболочки переменной толщины. Полагаем, что срединная поверхность отнесена к криволинейным координатам x и α таким образом, что первая квадратичная форма имеет вид $R^2\ (dx^2 + d\alpha^2)$, где R — радиус круговой цилиндрической оболочки, x меняется вдоль образующей, α — угловая координата, меняющаяся в поперечном направлении. Рассмотрим оболочки с прямыми срезами, занимающие в безразмерных переменных (x, α) прямоугольную область (l — длина оболочки)

$$D = \{x, \alpha : 0 \leqslant x \leqslant k,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 < 2\pi\},\quad k = l/R$$

Систему уравнений в перемещениях, определяющую свободные колебания круговой цилиндрической оболочки переменной толщины $h\ (x, \alpha)$, можно получить (например, [1]) в следующем виде:

$$A\ (h)\ z\ (x,\ \alpha) = \lambda hz\ (x,\ \alpha);\ A\ (h) = \|\ A_{ij}\ (h)\ \|_{i,j=1,2,3} \tag{1.1}$$

$$\lambda = \rho \frac{R^2(1-\mu^2)}{E}\omega^2,\quad A_{11} = -\frac{\partial}{\partial x} h \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha} h \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$A_{12} = -\mu\frac{\partial}{\partial x} h \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha} h \frac{\partial}{\partial x}$$

$$A_{13}(h) = \mu\frac{\partial}{\partial x}h,\quad A_{31}(h) = -\mu h\frac{\partial}{\partial x}$$

$$A_{21}(h) = -\frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial}{\partial x} h \frac{\partial}{\partial \alpha} - \mu\frac{\partial}{\partial \alpha} h \frac{\partial}{\partial x}$$

$$A_{22}(h) = -\frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial}{\partial x} h \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \alpha} h \frac{\partial}{\partial \alpha} -$$

$$-\ \delta_0^2\left[2(1-\mu)\frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \alpha} h^3 \frac{\partial}{\partial \alpha}\right]$$

$$A_{23}(h) = \frac{\partial}{\partial \alpha} h - \delta_0^2\left[2(1-\mu)\frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha} + \right.$$

$$\left. +\ \mu\frac{\partial}{\partial \alpha} h^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} h^3 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right]$$

$$A_{32}(h) = -h\frac{\partial}{\partial \alpha} + \delta_0^2\left[2(1-\mu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha} h^3 \frac{\partial}{\partial x} + \right.$$

$$\left. +\ \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2} h^3 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} h^3 \frac{\partial}{\partial \alpha}\right]$$

$$A_{33}(h) = h + \delta_0^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} h^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} h^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\ \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + 2(1-\mu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha} h^3 \frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha}\right]$$

(μ — коэффициент Пуассона, $\delta_0^2 = (12 R^2)^{-1}$, $h = h(x, \alpha)$ — толщина оболочки).

Через $z(x, \alpha)$ в (1.1) обозначена вектор-функция перемещений, $z^* = (u(x, \alpha), v(x, \alpha) w(x, \alpha))$, где u, v, w — компоненты перемещений в направлении образующей, направляющей и нормальном направлении к цилиндрической оболочке соответственно, λ — собственное число задачи, ρ — плотность материала, E — модуль Юнга, ω — частота колебаний.

Оператор $A(h)$ формально самосопряжен; это означает, что для любых гладких вектор-функций z_1 и z_2, обращающихся в нуль в окрестности границы Γ области D, справедливо тождество

$$(A(h) z_1, z_2) = (z_1, A(h) z_2) \tag{1.2}$$

Здесь и далее скобки означают скалярное произведение в векторном трехкомпонентном пространстве функций

$$(z_1, z_2) = \iint_D (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)\, dx d\alpha$$

Если вектор-функции z_1 и z_2 не обращаются тождественно в нуль в окрестности Γ, то граничные условия, которые необходимо наложить на компоненты векторов z_i для того, чтобы равенство (1.2) выполнялось, называются самосопряженными. Далее будет рассматриваться лишь одно из так называемых простых самосопряженных граничных условий ([2], с. 81) — условия шарнирного опирания (условия Навье)

$$(\omega)_\Gamma = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_\Gamma = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_\Gamma = 0 \tag{1.3}$$
$$(v)_\Gamma = 0$$

Решение краевой задачи (1.1), (1.3) будем понимать в слабом смысле. Пусть V — множество вектор-функций $z(x, \alpha)$ с компонентами из $C^\infty(\bar{D})$, удовлетворяющих (1.3). Через $H_2(D)$ обозначим пространство С. Л. Соболева трехкомпонентных вектор-функций, имеющих суммируемые с квадратом производные до второго порядка включительно. Замыкание множества V в $H_2(D)$ обозначим через $W(D)$. Вектор-функция $z \in W(D)$ — решение задачи (1.1), (1.3) в слабом смысле, если для любой вектор-функции $z_1 \in W(D)$ справедливо равенство

$$(A(h) z, z_1) = \lambda (hz, z_1)$$

Предположим, что распределение толщин круговой цилиндрической оболочки выбирается из множества функций Q, определяемых равенством

$$Q = \left\{ h(x, \alpha) : \iint_D \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)^2\right] dx d\alpha \leqslant c^2, \right. \tag{1.4}$$
$$\left. 0 < a \leqslant h(x, \alpha) \leqslant b \right\}$$

Здесь c, a, b — положительные постоянные, выбираемые таким образом, чтобы множество Q было не пусто.

Первое условие в (1.4) задает ограничение на рост производных допустимых распределений толщин. Необходимость выполнения этого условия следует из известных результатов [3] и гарантирует существование решения задачи оптимизации, которая будет рассмотрена ниже.

С точки зрения механики отсутствие первого условия (1.4) означает произвольность градиентов толщин, что ставит под сомнение правомерность гипотезы о прямолинейном нормальном элементе, лежащей в основе теории деформации тонких оболочек.

Второе условие в (1.4) — ограничение на величины минимального и максимального значений распределений толщин.

Из компактности вложения $H_2(D) \to L_2(D)$ следует [4], что спектральная задача (1.1) имеет последовательность ненулевых решений z^i_h ($i = 1, 2, 3, \ldots$), отвечающих последовательности собственных значений λ^i_h, таких, что

$$(A(h) z_h^i, z) = \lambda^i_h (hz^i_h, z), \ \forall z \in W(D)$$

$$0 < \lambda_h^1 \leqslant \lambda_h^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_h^i \leqslant \ldots$$

Нижний индекс h у функции z^i и чисел λ^i введен, чтобы подчеркнуть, что решение задачи (1.1) зависит от выбора распределений толщин $h(x, \alpha) \in Q$.

2. Постановка задачи оптимизации. В ряде случаев свободные колебания круговых цилиндрических оболочек можно разделить на преимущественно продольные, крутильные и поперечные (по поводу более полной классификации колебаний см. [2]). Каждому виду колебаний соответствует свое собственное число при одной и той же собственной функции.

Рассмотрим задачу о проектировании оболочки минимального объема (веса), у которой частота одного из преимущественных видов колебаний не ниже некоторого заданного фиксированного значения. Проектирование оболочки заключается в подходящем выборе распределений ее толщин из множества допустимых распределений Q заданным равенством (1.4).

Пусть λ° — фиксированное положительное число, а $\lambda(h)$ — наименьшее из собственных чисел, соответствующее преимущественно поперечным колебаниям, $h \in Q$. В этом случае поставленная задача может быть сформулирована следующим образом: найти $h \in Q$, такое, что

$$\iint_D h(x, \alpha)\, dx d\alpha \to \min_h, \quad \lambda(h) \geqslant \lambda^\circ \tag{2.1}$$

Ясно, что решение задачи (2.1) существует не при всех λ°. В качестве естественного значения λ° можно выбрать наименьшее из собственных чисел, соответствующее преимущественно поперечным колебаниям для оболочки постоянной толщины h_0, $a \leqslant h_0 \leqslant b$. Тогда задача (2.1) переходит в задачу оптимального конструирования оболочки переменной толщины минимального объема (веса), у которой собственное значение, соответствующее одному из выбранных видов преимущественных колебаний, не ниже соответствующего собственного значения оболочки постоянной толщины.

3. Асимптотический подход к задаче оптимизации. Решение поставленной задачи связано с необходимостью многократного варьирования h из Q и отыскания решений системы (1.1), (1.3), что является причиной известных трудностей. С другой стороны, во многих важных случаях границы варьирования искомого распределения толщин заключены в относительно малых пределах, что позволяет применить асимптотические методы, рассматривая оболочку как слабо управляемую систему.

Предположим, что функция $h(x, \alpha) \in Q$ изменяется по закону

$$h(x, \alpha) = h_0 + \varepsilon h_1(x, \alpha); \ \varepsilon > 0, \ h_0 = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

Множество Q, определенное равенством (1.6), перейдет в множество

$$(3.2)\qquad Q_1 = \left\{h_1(x,\alpha): \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial \alpha}\right)^2\right] dx d\alpha \leqslant c^2, \right.$$
$$\left. |h_1(x,\alpha)| \leqslant 1 \right\}$$

Действительно, не умаляя общности, считаем, что $h_0 = 1$, чего всегда можно добиться введя новую безразмерную функцию

$$(3.3)\qquad h'(x,\alpha) = \frac{h(x,\alpha)}{h_0} = 1 + \varepsilon \frac{h_1(x,\alpha)}{h_0} = 1 + \varepsilon h_1'(x,\alpha)$$

Поэтому ограничение в (1.4) на величину минимального и максимального значения $h(x,\alpha)$: $0 < a \leqslant h(x,\alpha) \leqslant b$ перейдет в ограничение $|h_1'(x,\alpha)| \leqslant 1$, если $a = h_0 - \varepsilon$ и $b = h_0 + \varepsilon$, т. е. если максимальный интервал варьирования толщин h' равен 2ε.

При выводе уравнений теории оболочек считается, что величинами порядка $(h/R)^2$ можно пренебречь. Учитывая это, имеем

$$(h_0/R)^2 \leqslant \varepsilon h_1/R \sim \varepsilon\, h_0/R \leqslant h_0/R$$

откуда следует, что $h_0/R \leqslant \varepsilon \leqslant 1$; в противном случае величина $\varepsilon\, h_1/R$ сравнима с погрешностью математической модели задачи.

Далее для удобства записи штрихи у функций h и h_1 будем опускать.

Согласно теореме Реллиха [5—7], спектр оператора $A(h)$, определенного равенствами в (1.1) при $h = 1 + \varepsilon h_1$, может быть представлен в виде аналитического возмущения спектра оператора $A(h_0) = A^\circ$. Оператор A° определяется из формул (1.1), если положить $h(x,\alpha) \doteq 1$. Используя (3.1), представим оператор $A(h)$ в виде суммы по степеням параметра ε

$$(3.4)\qquad A(h) = \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i A^i(h_1)$$

Для вычисления компонент оператора $A^1(h_1)$ необходимо в формулах (1.1) заменить $h(x,\alpha)$ на $h_1(x,\alpha)$, $h^3(x,\alpha)$ на $3h_1(x,\alpha)$, а коэффициент δ_0^2 (учитывая замену (3.3)) станет равным $\delta_1^2 = h_0^2(12R^2)^{-1}$.

Собственные значения спектральной задачи и собственные функции могут быть представлены в виде ряда по степеням ε

$$(3.5)\qquad \lambda^k(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda^{k,i}(h_1), \quad z_h^k = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z^{k,ih_1}.$$

Подставляя (3.4) в (3.5), и собирая члены при нулевой и первой степени ε, получим краевые задачи для нулевого и первого приближений к решению исходной спектральной задачи (1.1) в виде

$$(3.6)\qquad (A^\circ z^{k,0}, z) = \lambda^{k,0}(z^{k,0}, z), \quad \forall z \in W(D)$$

$$(3.7)\qquad (A^\circ z^{k,1}, z) + (A^1(h_1) z^{k,0}, z) = \lambda^{k,0}(z^{k,1}, z) + \lambda^{k,0}(h_1 z^{k,0}, z) +$$
$$+ \lambda^{k,1}(h_1)(z^{k,0}, z), \quad \forall z \in W(D)$$

Полагая в (3.6) и (3.7) $z = z^{k,0}$ и используя самосопряженность оператора A°, получим формулу

$$(3.8)\qquad \lambda^{k,1}(h_1) = (A^1(h_1) z^{k,0}, z^{k,0}) - \lambda^{k,0}(h_1 z^{k,0}, z^{k,0})$$
$$(z^{k,0}, z^{k,0}) = 1$$

определяющую первую поправку к вычислению собственного значения $\lambda^k(h)$ в виде линейного функционала от $h_1 \in Q_1$.

С учетом проведенных рассмотрений вернемся к исходной задаче (2.1). В силу того что

$$\iint_D (1 + \varepsilon h_1)\, dx d\alpha = S + \varepsilon \iint_D h_1 dx d\alpha$$

где S — площадь поверхности оболочки, исходный функционал примет вид

$$\iint_D h_1 dx d\alpha \to \min_{h_1}, \quad h_1 \in Q_1 \tag{3.9}$$

Выбирая в (2.1) $\lambda^\circ = \lambda^{k,0}$, используя разложение (3.5) и произвольность ε, получим ограничение на величину первой поправки собственного значения $\lambda^k(h)$ в виде

$$\lambda^{k,1}(h_1) \geqslant 0, \quad h_1 \in Q_1 \tag{3.10}$$

Здесь величина $\lambda^{k,1}(h_1)$ задана формулой (3.8). В итоге имеем задачу

$$\iint_D h_1 dx d\alpha \to \min_{h_1}, \quad \lambda^{k,1}(h_1) \geqslant 0, \quad h_1 \in Q_1 \tag{3.11}$$

Множество функций h_1, таких, что $h_1 \in Q_1$ и $\lambda^{k,1}(h_1) \geqslant 0$, выпукло и замкнуто в топологии пространства С. Л. Соболева, суммируемых с квадратом функций вместе со своими производными до первого порядка включительно. Поэтому линейный функционал (3.9) достигает на указанном множестве минимального значения, причем любой локальный экстремум будет и глобальным. Можно показать [8], что по функционалу (3.9) решение задачи (3.11) отличается от оптимального решения в указанном классе распределений Q при $b - a = 2\varepsilon$ на величину порядка ε^2.

Решение задачи (3.11) облегчается тем, что для вычисления линейного функционала $\lambda^{k,1}(h_1)$ достаточно знать лишь собственные функции и собственные значения невозмущенной задачи.

4. Осесимметрические колебания. Рассмотрим осесимметрические колебания свободно опертой круговой цилиндрической оболочки. Форма колебаний в этом случае определяется вектор-функцией одного переменного x, $x \in [0, k]$, $k = l/R$. Уравнения состояния (1.1) распадаются на краевую задачу для компоненты, определяющей частоты крутильных колебаний

$$-\frac{(1-\mu)}{2}\frac{d}{dx}\left(h\frac{dv}{dx}\right) - 2\delta_1^2(1-\mu)\frac{d}{dx}\left(h^3\frac{dv}{dx}\right) = \lambda h v \tag{4.1}$$

$$v(0) = v(k) = 0 \tag{4.2}$$

и на краевую задачу для связанных продольных и поперечных колебаний

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx}\left(h\frac{du}{dx}\right) + \mu\frac{d}{dx}(hw) = \lambda h u \\ -\mu h\frac{du}{dx} + hw + \delta_1^2\frac{d^2}{dx^2}\left(h^3\frac{d^2w}{dx^2}\right) = \lambda h w \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} w(0) = w(k) = 0, \quad \frac{d^2w}{dx^2}(0) = \frac{d^2w(k)}{dx^2} = 0 \\ \frac{du}{dx}(0) = \frac{du(k)}{dx} = 0, \quad \delta_1^2 = \frac{h_0^2}{12R^2} \end{gathered} \tag{4.4}$$

Пусть толщина оболочки $h(x)$ изменяется по закону (3.1). Множество Q_1 в этом случае состоит из функций, таких, что

$$\int_0^k \left(\frac{dh_1}{dx}\right)^2 dx \leqslant c^2, \quad |h_1| \leqslant 1 \tag{4.5}$$

Для нулевого приближения имеем уравнения

$$-\frac{(1-\mu)}{2}\frac{d^2v^\circ}{dx^2} - 2(1-\mu)\,\delta_1^2\frac{d^2v^\circ}{dx^2} = -\lambda^\circ v^\circ \tag{4.6}$$

с краевыми условиями (4.2) для функции $v^\circ(x)$ и систему уравнений

$$\begin{gathered}-\frac{d^2u^\circ}{dx^2} + \mu\frac{dw^\circ}{dx} = \lambda^\circ u^\circ \\ -\mu\frac{du^\circ}{dx} + w^\circ + \delta_1^2\frac{d^4w^\circ}{dx^4} = \lambda^\circ w^\circ\end{gathered} \tag{4.7}$$

с краевыми условиями (4.4) для функций $u^\circ(x)$ и $w^\circ(x)$. Собственные значения задач (4.6) и (4.7) в этом случае можно получить взяв форму собственных колебаний в виде [2]

$$u^\circ(x) = u_0\cos px, \quad v^\circ(x) = v_0\sin px, \quad w^\circ(x) = w_0\sin px \tag{4.8}$$

где u_0, w_0, v_0 — некоторые постоянные, $p = \pi n/k$, $n = 1, 2, \ldots$

Частоты, соответствующие крутильным колебаниям, определяемым уравнением (4.6), задаются соотношением

$$\lambda_1^\circ = \frac{1-\mu}{2}p^2(1+4\delta_1^2) \tag{4.9}$$

Для связанных поперечных и продольных колебаний получим

$$\lambda_{2,3}^\circ = \frac{1}{2}[1+p^2+\delta_1^2p^4 \pm (1-p^2+\delta_1^2p^4+4\mu^2p^2)^{1/2}] \tag{4.10}$$

Поставим задачу о выборе распределений толщин в виде (3.1), удовлетворяющих ограничениям (4.5), с целью минимизации объема (веса) цилиндрической оболочки, у которой собственное значение, соответствующее преимущественно поперечным колебаниям, не менее, чем то же собственное значение для оболочки постоянной толщины h_0. Для выделения первой собственной частоты, соответствующей преимущественно поперечным колебаниям, исследуем отношением амплитуд связанных продольных и поперечных колебаний вида (4.8), подставив их в (4.7), что дает отношение

$$\varkappa = \frac{u_0}{w_0} = \frac{\mu p}{\lambda_i^\circ - p^2}, \quad i = 2,3 \tag{4.11}$$

Из (4.11) можно установить, что $|\varkappa| < 1$ при $p > 1 - \delta_1^2 = a_0^2$ и $|\varkappa| > 1$ при $p < a_0^2$ для собственного значения λ_3° в (4.10). Значения p вычислены с точностью до величин порядка δ_1^4. Аналогично $|\varkappa| > 1$ при $p > a_0^2$ и $|\varkappa| < 1$ при $p < a_0^2$ для собственного значения λ_2° в (4.10); этот результат ранее был получен в [9] для частного случая цилиндрической оболочки.

Используя формулу (3.8), найдем поправку к значениям частот λ_2° и λ_3°, если толщина меняется по закону (3.1).

Оператор $A^1(h_1)$ представляется компонентами

$$A^1_{11} = -\frac{d}{dx}\left(h_1\frac{d}{dx}\right),\quad A^1_{12} = \mu\frac{d}{dx}h_1$$

$$A^1_{21} = -\mu h_1\frac{d}{dx},\quad A^1_{22} = h_1 + 3\delta_1^2\frac{d^2}{dx^2}\left(h_1\frac{d^2}{dx^2}\right)$$

Из (3.8) имеем

$$\lambda_i^{\circ,1}(h_1) = \frac{2r_1}{k}\int\limits_0^k h_1(x)\sin^2 px dx,\quad i = 2,3$$

$$r_1 = [p^2u_0^2 + 2\mu p u_0 w_0 + w_0^2 + 3p^4\delta_1^2 w_0^2 - \lambda_i^\circ(u_0^2 + w_0^2)]\,e^{-1}$$

$$e = u_0^2 + w_0^2$$

Из соотношений (4.10) и (4.11) получим после преобразований

$$(4.12)\qquad \lambda_i^{\circ,1}(h_1) = r_2\int\limits_0^k h_1(x)\sin^2 px dx,\quad i = 2,3$$

$$r_2 = \frac{4\delta_1^2p^4(\lambda_i^\circ - p^2)^2}{k[(\lambda_i^\circ - p^2)^2 + \mu^2p^2]} = \frac{4\delta_1^2p^4}{k(1+\varkappa^2)} > 0$$

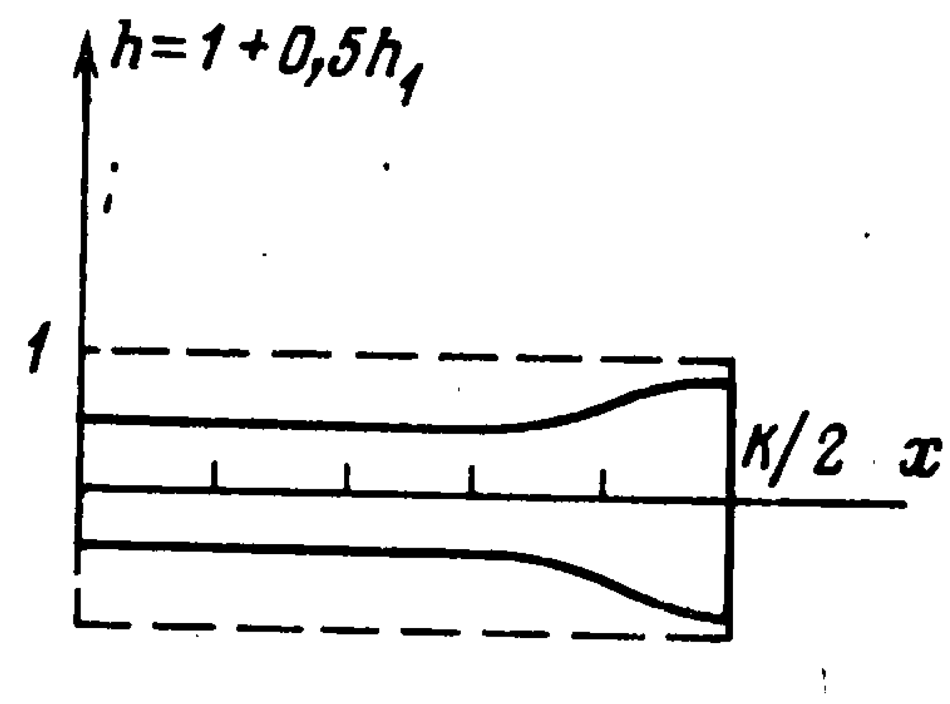
Для крутильных колебаний выражение величины первой поправки к собственному значению λ_1° имеет аналогичный вид

$$(4.13)\qquad \lambda_1^{\circ,1}(h_1) = r_3\int\limits_0^k h_1\sin^2 px dx,\quad r_3 = 8k^{-1}p^2\delta_1^2(1-\mu) > 0$$

Так как линейные функционалы $\lambda_i^{\circ,1}(h_1)$ ($i = 2, 3$) и $\lambda_1^{0,1}(h_1)$ различаются лишь постоянными положительными множителями, то исходную задачу можно обобщить на все три вида колебаний. Найдем такое распределение толщин вида (3.1) с ограничениями (4.5), при котором вес оболочки будет минимален, а соответствующие частоты преимущественно продольных и поперечных, а также крутильных колебаний будут не менее, чем те же значения частот для оболочки постоянной толщины h_0. Последнее означает, что необходимо решить задачу

$$(4.14)\qquad \int\limits_0^k h_1 dx \to \min_{h_1},\ h_1\in Q_1,\quad \int\limits_0^k h_1\sin^2 px dx \geqslant 0$$

Решение вариационной задачи (4.14) может быть получено в аналитическом виде [10, 11]. На фиг. 1 показано оптимальное распределение толщи-



Фиг. 1

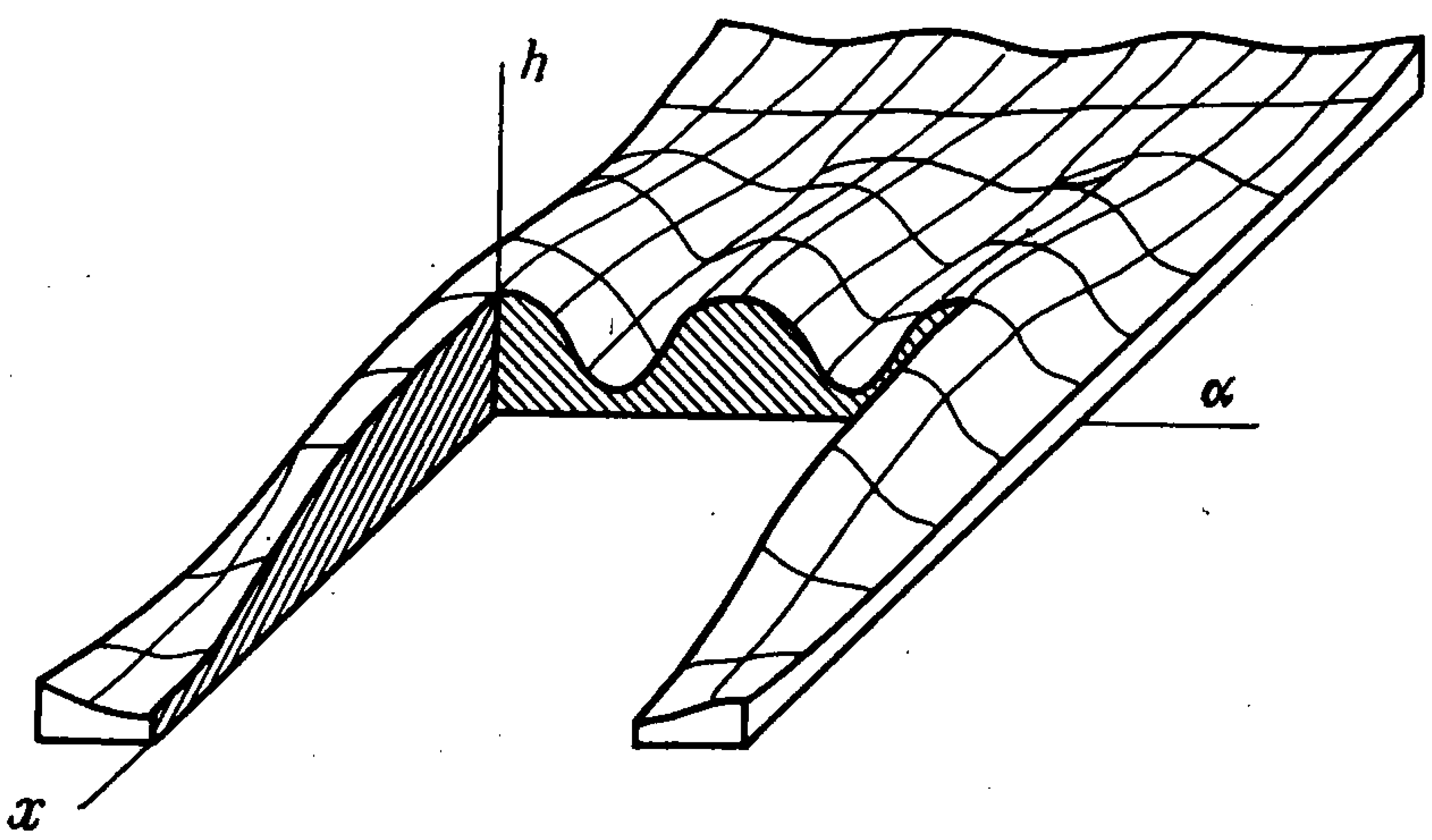
ны, полученное в результате точного решения задачи $c^2 = 16$ при минимальном $p = \pi/k$. Особенно простой вид [1] имеет решение при $c^2 < (8p^2k)/9$

$$h_1(x) = -\frac{(1+2\cos px)}{3},\quad x\in[0,k]$$

[1] *Братусь А. С., Картвелишвили В. М.* Метод возмущений в задачах оптимизации устойчивости, частот колебаний, изгиба и прочности упругих пластин переменной толщины.— Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 180. 66 с.

Относительный выигрыш в весе составляет в этом случае 33 ε%. Для случая, изображенного на фиг. 2, выигрыш близок к 50 ε%.

Из анализа результатов следует, что для всех трех видов осесимметрических колебаний цилиндрической оболочки оптимальное распределение толщин в середине оболочки образует утолщение типа ребра жесткости, которое разделяет оболочку на два более коротких участка с меньшей тол-



Фиг. 2

щиной. Ранее аналогичный результат был получен численно в [12] для достаточно длинных оболочек.

5. **Неосесимметрический случай.** Рассмотрим систему уравнений, определяющую свободные колебания цилиндрической оболочки (1.1) с краевыми условиями, соответствующими случаю шарнирного опирания (1.3). Форма свободных колебаний оболочки постоянной толщины в этом случае имеет вид

$$u(x, \alpha) = u_0 \cos px \sin q\alpha, \quad v(x, \alpha) = v_0 \sin px \cos q\alpha$$
$$w(x, \alpha) = w_0 \sin px \sin q\alpha, \quad p = \pi n/k, \quad q = m, \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

Здесь u_0, v_0, w_0 — постоянные, определяемые с точностью до некоторого постоянного множителя из решения линейной системы уравнений, получаемой при подстановке (5.1) в уравнение состояния (1.1). Собственные значения λ_i^k $(i = 1, 2, 3,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ находятся из условия равенства нулю определителя указанной системы.

Поставим задачу проектирования оболочки минимального объема (веса), у которой первые частоты, соответствующие квазипоперечным колебаниям, для которых $w_0 > \max\{u_0, v_0\}$, и квазитангенциальным колебаниям, для которых $w_0 < \max\{u_0, v_0\}$ [2], будут не менее, чем соответствующие значения частот в случае оболочки постоянной толщины h_0.

Применяя асимптотический подход п. 3, получим при помощи формулы (3.8) выражение для первой поправки к вычислению собственного значения $\lambda^\circ{}_i$ в следующем виде:

$$\lambda_i^{\circ,1}(h_1) = \frac{2}{3k\pi} \int_0^k \int_0^{2\pi} [A \sin^2 px \sin^2 q\alpha + B \cos^2 px \cos^2 q\alpha]\, h_1(x, \alpha)\, dx d\alpha \tag{5.2}$$

$$A = \{u_1^2 p^2 + 2\mu u_1 p\,(v_1 q + 1) + (v_1 q + 1)^2 + 3\delta_1^2[(v_1 + q)^2 q^2 + 2\mu p^2 q\,(v_1 + q) + p^4]\}\,(u_1^2 + v_1^2 + 1)^{-1} - \lambda_i^\circ$$

$$B = \frac{1-\mu}{2}\, \frac{(qu_1 + pv_1)^2 + 12\delta_1^2 p^2 (v_1 + q)^2}{u_1^2 + v_1^2 + 1}$$

$$u_1 = \frac{u_0}{w_0}, \quad v_1 = \frac{v_0}{w_0}, \quad \delta_1^2 = \frac{h_0^2}{12R^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

Величины λ_i° и q определяются в зависимости от значений k, δ_1^2 при минимальном $p = \pi/k$.

Остановимся на случае $h_0/R = 0{,}01$. Непосредственные вычисления с использованием таблиц из [13] показывают, что величина A, заданная формулой (5.2), остается положительной при значениях $k = 1, 2, \ldots, 9$.

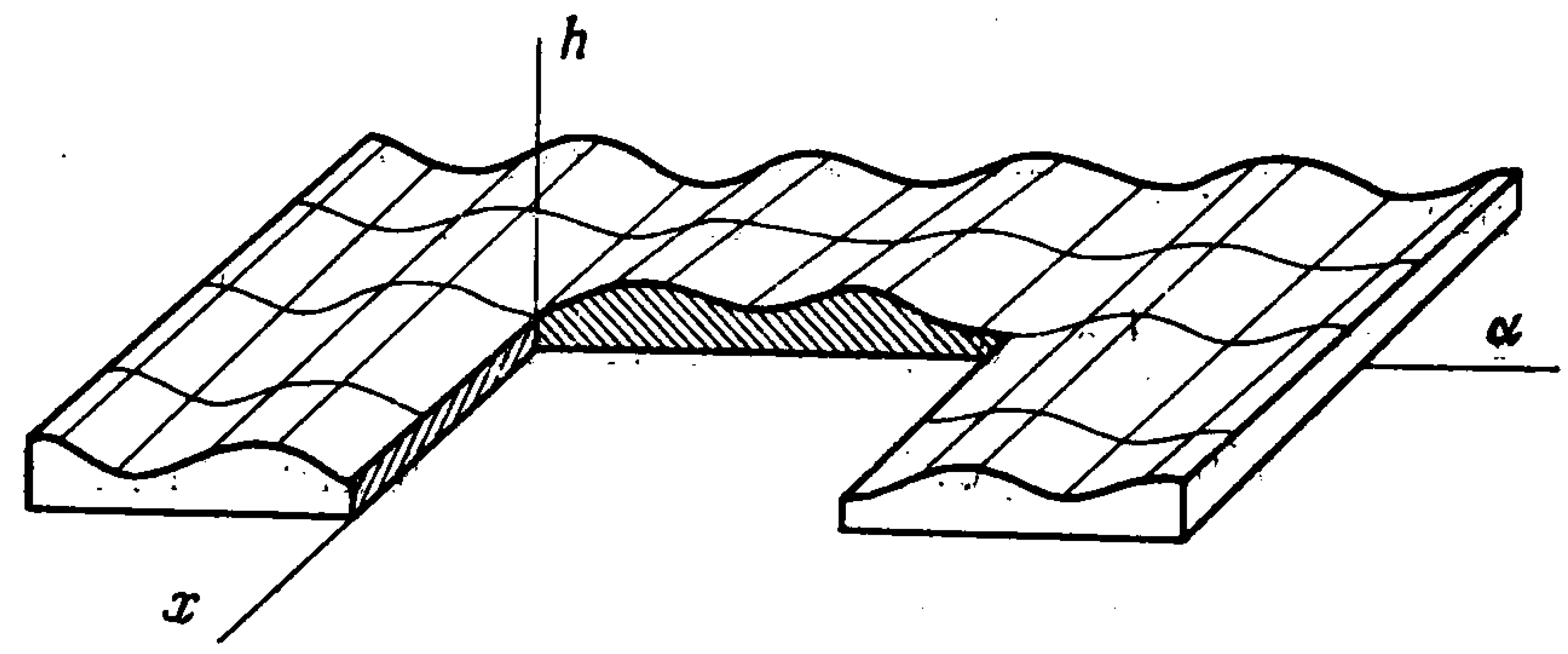
Это означает, что поставленная вариационная задача имеет вид

$$(5.3)\qquad \int_0^k\int_0^{2\pi}\left[A\sin^2\frac{\pi x}{k}\sin^2 q\alpha + B\cos^2\frac{\pi x}{k}\cos^2 q\alpha\right]h_1(x,\alpha)\,dx\,d\alpha \geqslant 0$$

$$\int_0^k\int_0^{2\pi} h_1(x,\alpha)\,dx d\alpha \to \min_{h_1}, \quad h_1 \in Q_1$$

В качестве A в (5.3) выбирается минимальное положительное из всех значений, задаваемых (5.2) при разных λ_i°, $i = 1, 2, 3$.

В рассмотренных случаях минимальное A соответствует собственному значению λ_3°, соответствующему квазипоперечным колебаниям оболочки.



Фиг. 3

Решение задачи (5.3) в некоторых случаях может быть получено в аналитическом виде [10, 11]. В частности, решение, не выходящее на ограничение $|h_1| = 1$, везде, кроме множества нулевой меры (линии и точки), имеет вид

$$h_1 = \left[\cos\frac{2\pi}{k}x\cos 2q\alpha - 2d\left(\cos\frac{2\pi}{k}x + \cos 2q\alpha\right) - 2d^2 - \frac{1}{4}\right]\left[4d^2 - 2d + \frac{3}{4}\right]^{-1}, \quad d = \frac{A-B}{A+B}$$

В соответствии с ранее сделанным замечанием величина параметра ε должна удовлетворять условию $\varepsilon \gg 0{,}01$. Для этого случая интегральное ограничение в (3.2) взято в виде

$$(5.4)\qquad \int_0^k\int_0^{2\pi}\left[\frac{4\pi^2}{k^2}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4q^2}\left(\frac{\partial h_1}{\partial \alpha}\right)^2\right]dx d\alpha \leqslant c^2, \quad c = \text{const}$$

Ограничение (5.4) обеспечивает однородный рост производных по направлениям, параллельным направляющим и образующим линиям оболочки. Относительный выигрыш по функционалу равен $\eta = (2d^2 + 0{,}25)(4d^2 - 2d + 0{,}75)^{-1}$. Так, например, для случая $\mu = 0{,}3$, $h_0/R = 0{,}01$ и $k = 4$ имеем $\eta = 55\varepsilon\%$; при $k = 6$ $\eta = 33\varepsilon\%$.

В случае, когда ограничение $|h_1| = 1$ учитывается, решение задачи (5.3) можно получить численно [11] и относительные выигрыши оказываются примерно в 1,5 раза больше. Если в качестве возможных значений величин A рассматривать лишь положительные, то $|d| < 1$. Максимальный выигрыш на этом интервале изменения d равен $100\varepsilon\%$ при $d = 0{,}5$, минимальный — $10\varepsilon\%$ при $d = -0{,}125$.

На фиг. 2 показаны распределения толщин, соответствующие случаю $k = 6$, $h_0/R = 0{,}01$, $\mu = 0{,}3$. Цилиндрическая оболочка представлена в развернутом виде и для большей наглядности сделан вырез части оболочки. Полученная форма распределений толщин представляет из себя поверхность с симметрично расположенными точками локальных максимумов и минимумов, чередующихся в шахматном порядке и обращенных поочередно к центру и от центра кривизны. Аналогичная форма получается и при других значениях. Отметим линии на развертке оболочки, соединяющие точки локальных максимумов толщин. Это линия, проходящая через середину оболочки параллельно направляющей, и линии, наклоненные под углом $\gamma = \operatorname{arctg}(kq/2\pi)$ к направляющей оболочки. Расположение этих линий дает дополнительную информацию, которая может быть использована для оптимального выбора направлений подкрепляющих элементов.

На фиг. 3 показаны распределения толщин в предположении, что h_1 — функция только переменной α при $h_0/R = 0{,}01$, $\mu = 0{,}3$ и $k = 4$. Относительный выигрыш по функционалу достигает $40\varepsilon\%$. В этом случае в оболочке параллельно ее оси расположен ряд утолщений и впадин, образующих гофрированную поверхность. Число утолщений определяется значением q при минимальном $p = \pi/k$.

В заключение отметим, что предложенный асимптотический метод позволяет исследовать чувствительность частот свободных колебаний оболочки к распределениям толщины вблизи заданного опорного решения. Он может быть применен и к оболочкам других типов в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний, а также в задачах изгиба оболочки под действием распределенных нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
3. *Литвинов В. Г.* Задача оптимального управления собственной частотой пластины переменной толщины.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 4, с. 866—877.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. *Rellich F.* Storungstheorie der Spektralzerlegung.— Math. Ann., 1942, B. 118, H. 4, S. 462—484.
6. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587с.
7. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
8. *Братусь А. С.* Асимптотические решения в задачах оптимального управления коэффициентами эллиптических операторов.— Докл. АН, 1981, т. 259, № 5, с. 1035—1038.
9. *Ливанов К. К.* Осесимметрические колебания свободно опертых цилиндрических оболочек.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 742—745.
10. *Братусь А. С.* Метод возмущений в задачах оптимизации пластинок переменной толщины.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 6, с. 135—142.
11. *Братусь А. С., Картвелишвили В. М.* Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 119—139.
12. *Малков В. П., Угодчиков А. Г.* Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.
13. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник под ред. Биргера И. А. и Пановко Я. Г. Т. 3. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.1982