

УДК 539.3 : 534.1

ВИБРАЦИЯ ЦИЛИНДРА НА УПРУГОМ СЛОЕ, ЧАСТИЧНО СЦЕПЛЕННОМ С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

Пельц С. П.

Рассматривается задача о нерезонансных гармонических колебаниях упругого цилиндра на упругом слое. Контакт цилиндра и слоя осуществляется по круговой области Ω_1 радиуса R_1 , трение в которой отсутствует. Слой покоится на жестком основании. Под слоем осуществляется контакт двух типов: в круговой области Ω_2 радиуса R_2 — жесткое сцепление, на остальной части поверхности — без трения. Длина проекции расстояния между центрами областей Ω_1 и Ω_2 на горизонтальную плоскость равна d . Задачи такого рода важны в дефектоскопии фундаментов и клеевых соединений.

Задачи о вибрации жесткого тела (штампа) на поверхности упругого слоя при разных условиях контакта рассматривались в [1]. Здесь же штамп заменен упругим цилиндром, что приводит к качественно новой механической системе, учитывающей влияние конечного упругого тела. Разносторонний анализ гармонических колебаний цилиндра дан в [2].

1. Ось цилиндра совместим с осью ζ , а начало координат поместим на верхней лицевой плоскости слоя. Все характеристики цилиндра будем отмечать индексом 1, слоя — индексом 2; λ_n, μ_n, ρ_n ($n = 1, 2$) — коэффициенты Ламе, плотность материала; высота цилиндра H , высота слоя h . На верхней торцевой поверхности цилиндра касательные напряжения отсутствуют, а перемещения изменяются по закону $w^{(1)}(\rho, H, t) = w^0 e^{-i\omega t}$. Боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений. Перейдем к безразмерным величинам

$$r = h^{-1}\rho, \quad z = h^{-1}\zeta, \quad h_1 = h^{-1}H, \quad w^* = h^{-1}w^0, \quad b = h^{-1}d, \\ a_n = h^{-1}R_n \quad (n = 1, 2)$$

Решение для цилиндра строится в виде ряда по однородным решениям задачи о вибрации бесконечного цилиндра со свободной боковой поверхностью [3]. Разложим перемещения и напряжения в ряды Фурье по угловой координате φ , тогда без учета временного множителя получим

$$(1.1) \quad u^{(1)}(r, z, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_s^k U_s(r, k) \frac{\cos n_{ks}(h_1 - z)}{\cos n_{ks}h_1} e^{ik\varphi} \\ v^{(1)}(r, z, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_s^k V_s(r, k) \frac{\cos n_{ks}(h_1 - z)}{\cos n_{ks}h_1} e^{ik\varphi} \\ w^{(1)}(r, z, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_s^k W_s(r, k) \frac{\sin n_{ks}(h_1 - z)}{\cos n_{ks}h_1} e^{ik\varphi} + w^*$$

(C_s^k — подлежащие определению постоянные, n_{ks} — корни дисперсионного уравнения для бесконечного цилиндра, $U_s(r, k)$, $V_s(r, k)$, $W_s(r, k)$ — известные функции, которые ввиду громоздкости не приводятся). Построенные выражения для перемещений (1.1) позволяют удовлетворить граничным условиям на верхнем торце цилиндра.

2. Построим решение задачи для слоя. Без учета $e^{-i\omega t}$ граничные условия запишем в виде]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(r, 0, \varphi) &= \sigma_z^{(2)}(r, 0, \varphi), \quad \tau_{zr}^{(1)}(r, 0, \varphi) = \tau_{z\varphi}^{(1)}(r, 0, \varphi) = 0 \\ &(r, \varphi \in \Omega_1) \\ u^{(2)}(r, -1, \varphi) &= v^{(2)}(r, -1, \varphi) = 0 \quad (r, \varphi \in \Omega_2) \\ \tau_{zr}^{(2)}(r, -1, \varphi) &= \tau_{z\varphi}^{(2)}(r, -1, \varphi) = 0 \quad (r, \varphi \in \Omega_2) \\ w^{(2)}(r, -1, \varphi) &= 0 \quad (0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi) \end{aligned}$$

Представим все компоненты тензоров напряжений и перемещений в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \tau_k^{(2)}(r, s, \varphi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tau_{km}^{(2)}(r, s) e^{im\varphi}, \quad u_k^{(2)}(r, s, \varphi) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{km}^{(2)}(r, s) e^{im\varphi} \quad (s = -1, 0; k = 1, 2, 3) \\ \tau_1^{(2)} &\equiv \tau_{zr}^{(2)}, \quad \tau_2^{(2)} \equiv \tau_{z\varphi}^{(2)}, \quad \tau_3^{(2)} \equiv \sigma_z^{(2)}, \quad u_1^{(2)} \equiv u^{(2)} \\ u_2^{(2)} &\equiv v^{(2)}, \quad u_3^{(2)} \equiv w^{(2)} \end{aligned}$$

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье к уравнениям Ламе и используя граничные условия (2.1), придем к выражениям, описывающим перемещения точек слоя. Далее, приравнявая полученные значения перемещений] на нижней лицевой поверхности слоя известным краевым условиям в области Ω_2 , получим интегральное уравнение первого рода относительно контактных напряжений из Ω_2

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \int_0^{a_2} \int_{\sigma} S_m(\alpha r) K(\alpha) S_m(\alpha \rho) q_m(n, p, s, \rho) \rho \alpha d\alpha d\rho &= f_m(n, p, s, r) \\ (0 \leq r \leq a_2; n = 1, 2; s = 1, 2, \dots; m, p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ q_m(r) = \{q_{1m}(r), q_{2m}(r)\} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^2 (-1)^{m+p} C_s^p b_{np}^s q_m \\ &(n, p, s, r) \\ q_{1m}(r) &= \tau_{1m}^{(2)}(r, -1) + i\tau_{2m}^{(2)}(r, -1), \quad q_{2m}(r) = \tau_{1m}^{(2)}(r, -1) - \\ &- i\tau_{2m}^{(2)}(r, -1) \\ f_m(n, p, s, r) &= \{f_{m-1}(n, p, s, r), f_{m+1}(n, p, s, r)\} \end{aligned}$$

(b_{np}^s — известные постоянные, $S_m(\alpha r)$ — диагональная матрица с элементами $J_{m-1}(\alpha r)$, $J_{m+1}(\alpha r)$; $J_m(z)$ — функции Бесселя, $H_m^{(n)}(z)$ — функции Ханкеля). Элементы матрицы $K(\alpha)$ даются соотношениями

$$\begin{aligned} k_{11}(\alpha) &= k_{22}(\alpha) = N_1(\alpha) + N_2(\alpha), \quad k_{12}(\alpha) = k_{21}(\alpha) = \\ &= N_1(\alpha) - N_2(\alpha) \\ N_1(\alpha) \Delta(\alpha) &= s_2(4\alpha^4 + b_3^2) \operatorname{ch} s_1 \operatorname{ch} s_2 - \alpha^2(4s_1 s_2^2 + s_1^{-1} b_3^2) \times \\ &\times \operatorname{sh} s_1 \operatorname{sh} s_2 - 4\alpha^2 s_2 b_3 \\ N_2(\alpha) &= s_2^{-1} \operatorname{cth} s_2, \quad \Delta(\alpha) = b_2^2 [b_3^2 \operatorname{ch} s_1 \operatorname{sh} s_2 - 4s_1 s_2 \alpha^2 \times \\ &\times \operatorname{sh} s_1 \operatorname{ch} s_2] \\ s_k^2 &= \alpha^2 - b_k^2 \quad (k = 1, 2); \quad b_1^2 = \rho_2 (\omega h)^2 (\lambda_2 + 2\mu_2)^{-1}, \quad b_2^2 = \\ &= \rho_2 (\omega h)^2 \mu_2^{-1}, \quad b_3 = 2\alpha^2 - b_2^2 \\ f_{m\pm 1}(n, p, s, r) &= \pm \int_{\sigma} \Phi_m(n, p, s, \alpha) J_{m\pm 1}(\alpha r) \alpha d\alpha \\ \Phi_m(n, p, s, \alpha) &= \alpha R(\alpha) J_{m-p}(\alpha b) M_p(\alpha, \sigma_{np}^s) \end{aligned}$$

$$M_p(\alpha, x) = a_1 \frac{\alpha J_p(xa_1) J_{p-1}(\alpha a_1) - x J_{p-1}(xa_1) J_p(\alpha a_1)}{(x^2 - \alpha^2) J_p(\sigma_{1p}^s a_1)}$$

$$\sigma_{jp}^s = r_j^2 - n_{ps}^2, \quad r_1^2 = \rho_1 (\omega h)^2 (\lambda_1 + 2\mu_1)^{-1}, \quad r_2^2 = \rho_1 (\omega h)^2 \mu_1^{-1}$$

$$R(\alpha) = b_2^2 [b_3 \operatorname{sh} s_2 - 2s_1 s_2 \operatorname{sh} s_1] \Delta^{-1}(\alpha)$$

Элементы матрицы $K(\alpha)$ ведут себя как $O(|\alpha|^{-1})$ при $\alpha \rightarrow \infty$. В работе [4] установлена однозначная разрешимость уравнения (2.2) в случае асимптотики такого вида.

Метод решения (2.2) построен в [1]. Расположение контура σ диктуется принципом предельного поглощения. Следуя [1], получим

$$(2.3) \quad q_m(n, p, s, r) = \int_{\sigma} S_m(\alpha r) K^{-1}(\alpha) A_m(n, p, s, \alpha) \alpha d\alpha + \\ + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \kappa_{2m}(\alpha) S_m(\alpha r) K_+^{-1}(\alpha) X_m(n, p, s, \alpha) d\alpha \\ A_m(n, p, s, \alpha) = \{1, -1\} \Phi_m(n, p, s, \alpha)$$

Предполагается выполненной факторизация $K(\alpha) = K_-(\alpha) K_+(\alpha)$. Вектор-функция $X_m(n, p, s, \alpha)$ определяется из уравнения второго рода

$$(2.4) \quad X_m(n, p, s, z) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_-} K_+(\alpha) D_m(\alpha, u) K_+^{-1}(u) \times \\ \times X_m(n, p, s, u) \frac{du d\alpha}{\alpha - z} = \int_{\Gamma} \int_{\sigma} \kappa_{1m}(\alpha) K_+(\alpha) \theta(m, \alpha, u, a_2) \times \\ \times K^{-1}(u) A_m(n, p, s, u) \frac{udu d\alpha}{\alpha - z} \quad (z > \Gamma > \Gamma_-)$$

Контур Γ_- лежит ниже Γ , но так, что между ними подынтегральные функции регулярны. Здесь введены следующие обозначения:

$$\kappa_{1m}(\alpha) = \frac{\sqrt{a_2}}{iH_m^{(2)}(\alpha a_2)}, \quad \kappa_{2m}(\alpha) = \pi \alpha \sqrt{a_2} H_m^{(2)}(\alpha a_2)$$

$\theta(m, \alpha, u, a)$ — диагональная матрица второго порядка с элементами

$$\theta_{11} = [\alpha J_{m-1}(ua) H_m^{(2)}(\alpha a) - u J_m(ua) H_{m-1}^{(2)}(\alpha a)] (\alpha^2 - u^2)^{-1}$$

$$\theta_{22} = [u J_m(ua) H_{m+1}^{(2)}(\alpha a) - \alpha J_{m+1}(ua) H_m^{(2)}(\alpha a)] (\alpha^2 - u^2)^{-1}$$

$$D_m(\alpha, u) = \kappa_{1m}(\alpha) \theta(m, \alpha, u, a_2) \kappa_{2m}(\alpha) - (\alpha - u)^{-1} E$$

где E — единичная матрица. Уравнение (2.4) эффективно решается путем одновременной деформации контуров Γ и Γ_- в нижнюю полуплоскость. Вычисляя вычеты подынтегральных функций в полюсах, пересекаемых деформируемыми контурами, и пренебрегая малыми интегральными членами, сведем решение уравнения к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Приближенная факторизация матрицы-функции $K(\alpha)$ проводится на основе ее аппроксимации матрицей с дробно-рациональными элементами. Погрешность приближенного решения оценивается на основании теоремы 2 работы [4].

Перемещения точек верхней лицевой плоскости слоя даются соотно-

$$(2.5) \quad w_m^{(2)}(r) = \varepsilon \sum_{n=1}^2 \left\langle \int_{\sigma} \sum_{s=1}^{\infty} C_s^m b_{nm}^s P_1(\alpha) M_m(\alpha, \sigma_{nm}^s) \times \right. \\ \times J_m(\alpha r) \alpha d\alpha + \int_0^{a_2} \int_{\sigma} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{l+p} C_s^p b_{np}^s P_2(u) \times \\ \times J_m'(ur) J_{m-l}(ub) [J_{l+1}(u\rho) q_{1l}(n, p, s, \rho) - \\ - J_{l-1}(u\rho) q_{2l}(n, p, s, \rho)] u \rho du d\rho \rangle \quad (0 \leq r < \infty), \quad \varepsilon = \mu_1/\mu_2 \\ P_1(\alpha) \Delta(\alpha) = -b_2^4 s_1 \operatorname{sh} s_1 \operatorname{sh} s_2, \quad P_2(\alpha) \Delta(\alpha) = -\alpha b_2^2 \times \\ \times [s_1 s_2 \operatorname{sh} s_1 - 0,5 b_3 \operatorname{sh} s_2]$$

Первое интегральное слагаемое в (2.5) учитывает влияние цилиндра, а второе — также наличие жесткого сцепления на нижней грани слоя. Представим первое слагаемое в виде ряда по вычетам

$$(2.6) \quad w_{m,1}^{(2)}(r) = \varepsilon \sum_{n=1}^2 \sum_{s=1}^{\infty} C_s^m \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_{ks}^{mn} J_m(\gamma_k r) + \right. \\ \left. + B_{sn}^m J_m(\sigma_{nm}^s r) \right] \quad (0 \leq r \leq a_1)$$

$$(2.7) \quad w_{m,1}^{(2)}(r) = \varepsilon \sum_{n=1}^2 \sum_{s=1}^{\infty} C_s^m \sum_{k=1}^{\infty} D_{ks}^{mn} H_m^{(2)}(\gamma_k r) \quad (r > a_1)$$

$$\Delta(\gamma_k) = 0$$

($A_{ks}^{mn}, B_{sn}^m, D_{ks}^{mn}$ — постоянные). Таким образом, количество стоячих волн под цилиндром и их характеристики зависят от всех параметров слоя и цилиндра. Количество же распространяющихся от цилиндра волн равно числу вещественных корней γ_k , их фазовые скорости зависят только от параметров слоя. Влияние характеристик цилиндра сказывается на их амплитуде и сдвиге фаз. Задача свелась к определению постоянных C_s^k

3. В [5] получены соотношения обобщенной ортогональности для динамических однородных решений цилиндра. В цилиндрической системе координат они имеют вид

$$(3.1) \quad (U_j(r, -k), \tau_{1p}^{(1)}(r, k)) + \delta_k (V_j(r, -k), \tau_{2p}^{(1)}(r, k)) - \\ - (\sigma_{zj}^{(1)}(r, k), W_p(r, -k)) = \begin{cases} 0, & n_{kj}^2 \neq n_{kp}^2 \\ R_j^k, & n_{kj}^2 = n_{kp}^2 \end{cases} \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \delta_k = \begin{cases} 1, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

$$(f(r, -k), g(r, k)) = \int_0^{a_1} f(r, -k) g(r, k) r dr$$

Напряжения $\tau_{1p}^{(1)}, \tau_{2p}^{(1)}, \sigma_{zp}^{(1)}$ вычисляются на основании (1.1). Удовлетворим граничным условиям на нижнем торце цилиндра

$$w^{(1)}(r, 0, \varphi) = w^{(2)}(r, 0, \varphi), \quad \tau_{zr}^{(1)}(r, 0, \varphi) = \tau_{z\varphi}^{(1)}(r, 0, \varphi) = 0 \\ (r, \varphi \in \Omega_1)$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$(3.2) \quad (1 - \delta_k) w^* - \sum_{s=1}^{\infty} C_s^k W_s(r, k) \operatorname{tg} n_{ks} h_1 = \\ = \varepsilon \sum_{s=1}^{\infty} C_s^k L_1(k, s, r) + \varepsilon \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_s^p L_2(k, s, p, r)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} C_s^k \tau_{1s}^{(1)}(r, k) \operatorname{tg} n_{ks} h_1 = 0$$

$$\delta_k \sum_{s=1}^{\infty} C_s^k \tau_{2s}^{(1)}(r, k) \operatorname{tg} n_{ks} h_1 = 0$$

$$(0 \leq r \leq a_1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

($L_1(k, s, r)$, $L_2(k, s, p, r)$ — известные функции). Применяя к (3.2) соотношение обобщенной ортогональности, приходим к системе

$$(3.3) \quad C_l^k = (1 - \delta_k) A_l^k + \varepsilon \sum_{s=1}^{\infty} C_s^k F_1(s, l, k) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_s^p F_2(s, p, l, k) \quad (l = 1, 2, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(3.4) \quad F_1(s, l, k) R_l^k = - \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{nk}^s b_{jk}^l \int_{\sigma} P_1(u) M_k(u, \sigma_{nk}^s) M_k(u, \sigma_{jk}^l) u du$$

$$(3.5) \quad F_2(s, p, l, k) R_l^k = - \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{np}^s b_{jk}^l \int_0^{a_2} \int_{\sigma} P_2(u) \times$$

$$\times M_k(u, \sigma_{nk}^l) \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{m-j}(ub) [J_{j+1}(u\rho) q_{1j}(n, p, s, \rho) -$$

$$- J_{j-1}(u\rho) q_{2j}(n, p, s, \rho)] u \rho du d\rho$$

$$A_l^k R_l^k = - \sum_{n=1}^2 b_{nk}^l \int_0^{a_1} J_k(\sigma_{nk}^l \rho) J_k^{-1}(\sigma_{1k}^l a_1) \rho d\rho$$

В соотношениях (3.4), (3.5) перейдем к новой переменной интегрирования заменой $u = (y^2 + k^2 + l^2 + s^2)^{1/2}$. Здесь радикал определен на римановой плоскости с разрезом, соединяющим точки $\pm i(k^2 + l^2 + s^2)^{1/2}$ при условии положительности при $y > 0$.

Рассмотрим систему (3.3) как операторное уравнение в пространстве l_2 . Из асимптотических оценок для коэффициентов системы и произведенной замены следует сходимость рядов

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |F_1(s, l, k)|^2, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |F_2(s, p, l, k)|^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |A_l^k|^2$$

Следовательно, (3.3) порождает в l_2 вполне непрерывный оператор [6] и бесконечная система однозначно разрешима для всех частот колебаний, отличных от собственных частот механической системы. Бесконечную систему можно решать методом редукции, и решения [урезанных систем] стремятся к точному при увеличении порядка.

Характер особенности контактных напряжений в окрестности границы области Ω_1 устанавливается методом работы [7]

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0, \varphi) = (a_1 - r)^{-\nu_0} \sigma(r, 0, \varphi), \quad \nu_0 = 1 - a \quad (0 < a < 1)$$

где $\sigma(r, 0, \varphi)$ — регулярная функция, a — корень уравнения

$$2\varepsilon(1 - \nu_2)(1 - \nu_1)^{-1} \left(a^2 - \sin^2 \frac{a\pi}{2} \right) \cos a\pi - \sin^2 a\pi = 0$$

(ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона).

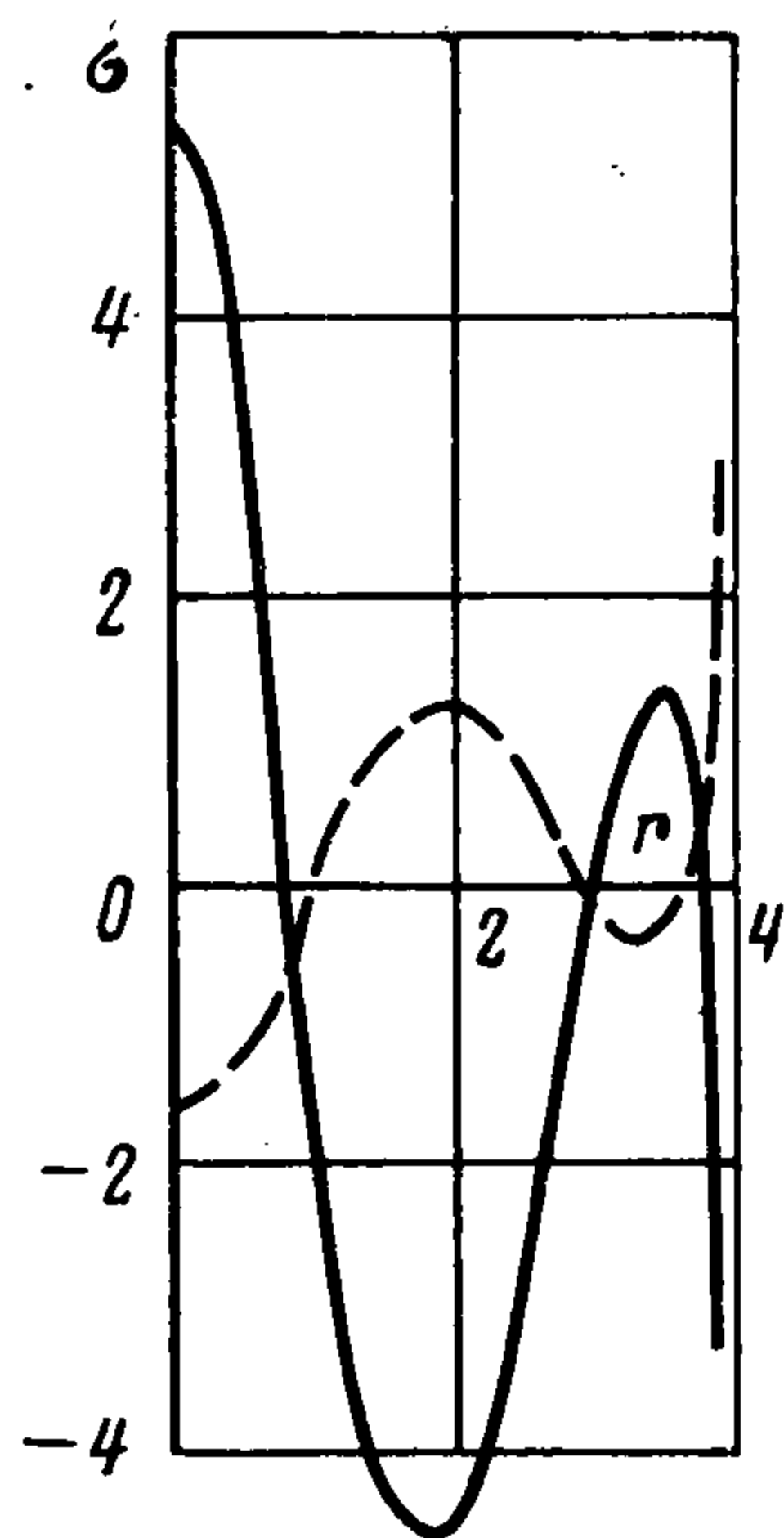
У границы пятна контакта Ω_2 контактные напряжения имеют следующее представление [1] (A, r_{nk}, p_{nk} — постоянные):

$$\tau_{nk}^{(2)}(r, -1) = (a_2 - r)^{-1/2} [r_{nk} \sin \lambda(r) + p_{nk} \cos \lambda(r)]$$

$$(r \rightarrow a_2; n = 1, 2) \quad \lambda(r) = A \ln [(a_2 + r)(a_2 - r)^{-1}]$$

Полагая всюду $b = 0$, придем к решению для осесимметричной постановки исходной задачи. Переходя к пределу при $\mu_2 \rightarrow \infty$, получим решение задачи о вибрации цилиндра на жестком основании.

Для численного анализа выберем случай, соответствующий $b = a_2 = 0, \mu_1 = \mu_2 = \mu$. Придем к осесимметричной задаче о вибрации цилиндра на упругом слое, нижняя грань которого сцеплена с жестким основанием в одной точке. В силу осевой симметрии жесткое сцепление в точке не оказывает влияния на решение задачи, т. е. можно считать, что нижняя лицевая плоскость упругого слоя контактирует без трения с жестким основанием. Такая задача служит своеобразным эталоном, сравнивая с которым можно выделить эффекты, вносимые наличием области жесткого сцепления Ω_2 . В рассматриваемом случае бесконечная алгебраическая система (3.3) упрощается ввиду отсутствия членов, порождаемых областью Ω_2 . Система (3.3) решалась методом редукции. Расчеты проводились при $\nu_1 = \nu_2, \rho_1 = \rho_2, h_1 = 2, w^* = 0,001, a_1 = 4, b_2^2 = 5$. На фигуре приведены графики безразмерной величины контактных напряжений $\sigma = \mu^{-1} \sigma_z^{(1)} \cdot 10^4$ (действительная часть — сплошная линия, мнимая — штриховая). Наличие зон отрицательных напряжений объясняется тем, что рассматривается лишь динамическая составляющая задачи. Полная постановка предполагает наличие статической нагрузки, прижимающей цилиндр к слою и препятствующей образованию зон отрыва. Общее решение — сумма статического и динамического решений. Решение статической задачи получаем из динамической при $\omega \rightarrow 0$.



Автор благодарит В. А. Бабешко за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. М. — Л.: Глав. ред. общетехн. лит. и номбгр., 1935. 674 с.
4. Бабешко В. А., Румянцев А. Н. Вибрация штампа, частично сцепленного с упругой средой. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1085—1092.
5. Зильбергейт А. С., Нуллер Б. М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости. — Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 333—335.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
7. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178—186.