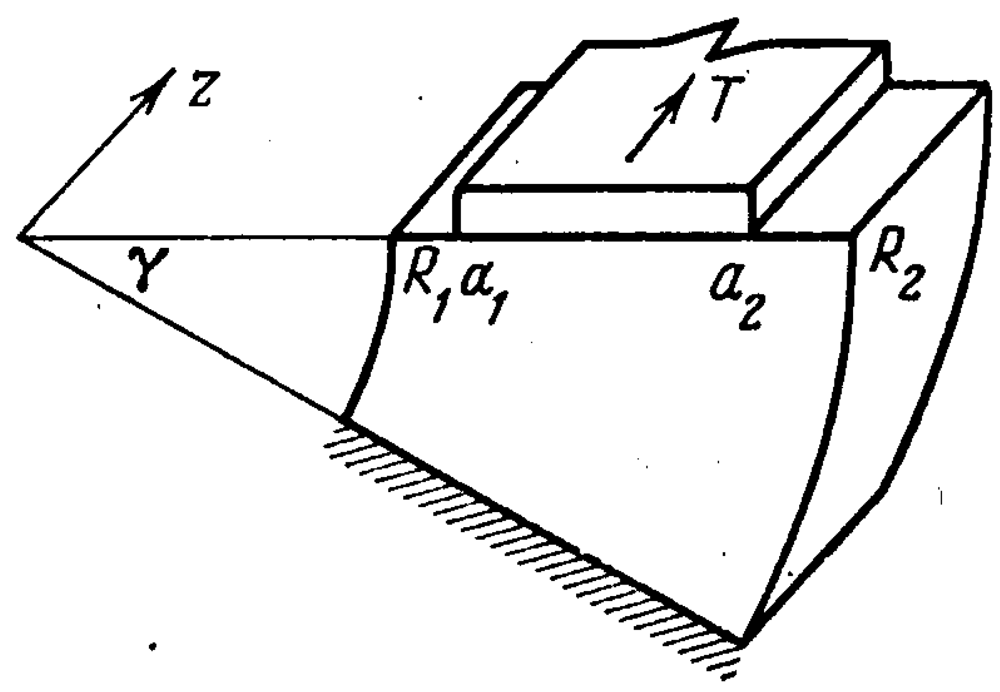
Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 5, 1983

УДК 539.3

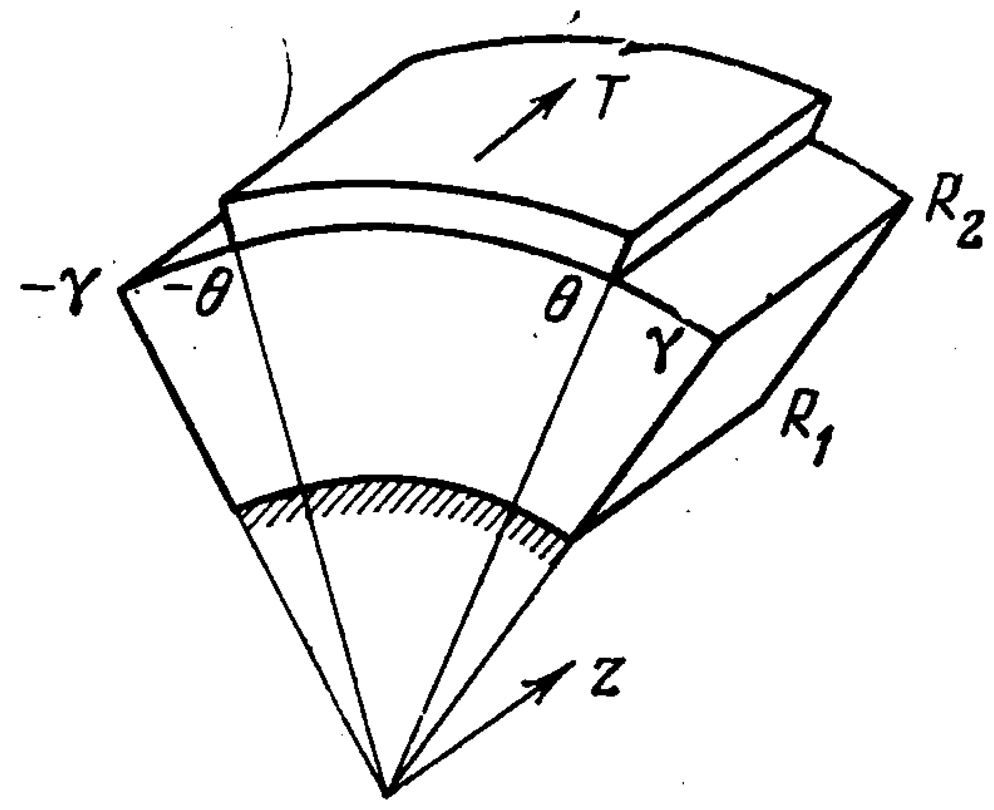
О МЕТОДЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УСЕЧЕННОГО КЛИНА И КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

Александров В. М., Чебаков М. И.

Рассматриваются две собственно смешанные задачи о чистом сдвиге полосовым штампом вдоль образующей цилиндрического упругого тела, поперечное сечение которого занимает область, ограниченную сторонами клина и двумя концентрическими окружностями с центром в вершине клина. В первой задаче штамп закреплен на плоской грани тела, при этом другая плоская грань закреплена, а цилиндрические поверхности либо закреплены, либо свободны от напряжений (фиг. 1). В другой задаче штамп закреплен на цилиндрической поверхности, при этом другая цилиндрическая поверхность закреплена, а плоские границы либо также закреплены, либо свободны от напряжений (фиг. 2). Для решения задач используется метод однородных решений [1], который позволяет рассматриваемые задачи свести к исследованию бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода высокого качества с экспоненциально убывающими элементами матриц и правых частей. Такие системы относятся к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха (см., например, [2]), и их решение может быть получено методом редукции при любых значениях параметров задач.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Сдвиг штампом усеченного клина. В цилиндрических координатах (r, φ, z) рассмотрим упругое тело, занимающее область $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma$, $-\infty < z < \infty$. Такую область здесь будем называть усеченным клином, так как исследование рассматриваемой задачи будет опираться на решение некоторых задач для бесконечного клина.

Задача 1 о сдвиге штампом усеченного клина будет эквивалентна следующей краевой задаче относительно функции перемещения $w(r, z)$ вдоль оси z:

$$\Delta w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{1.1}$$

$$w = \delta \; (\varphi = \gamma,\ a_1 \leqslant r \leqslant a_2), \quad w = 0 \; (\varphi = 0,\ R_1 \leqslant r \leqslant R_2) \tag{1.2}$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{G}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad (\varphi = \gamma,\ a_1 < r < R_1,\ a_2 < r < R_2)$$

$$w = 0 \; (r = R_1,\ r = R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma)$$

где δ — перемещение штампа, G — модуль сдвига, $\tau_{\varphi z}$ — касательные напряжения. Последнее условие означает закрепление цилиндрических поверхностей, аналогично может быть рассмотрена задача, когда цилиндрические поверхности свободны от напряжений.

В соответствии со схемой метода однородных решений [1] найдем на первом этапе решение уравнения (1.1) для бесконечного клина, когда

$$\tau_{\varphi z} = \begin{cases} \tau(r) & (a_1 \leqslant r \leqslant a_2,\ \varphi = \gamma) \\ 0 & (0 < r < a_1,\ a_2 < r < \infty,\ \varphi = \gamma) \end{cases}$$

$$w = 0 \quad (\varphi = 0)$$

В этом случае

$$w = w^{(1)}(r, \varphi) = \frac{1}{2G\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \tau(\rho)\, d\rho \int_{(L)} \frac{\sin s\varphi}{s \cos s\gamma} \left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds \tag{1.3}$$

где контур интегрирования (L) в плоскости комплексного переменного $s = \tau + i\sigma$ — прямая, параллельная мнимой оси при условии $-\pi/2\gamma < \tau < \pi/2\gamma$.

Далее построим систему однородных решений уравнения (1.1) для бесконечного клина, когда

$$w = 0 \ (\varphi = 0), \quad \tau_{\varphi z} = 0 \ (\varphi = \gamma)$$

и введем в рассмотрение их линейную комбинацию

$$w^{(2)}(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \alpha_k \varphi \,[C_k r^{-\alpha_k} + D_k r^{\alpha_k}], \quad \alpha_k = \frac{\pi(2k-1)}{2\gamma} \tag{1.4}$$

Тогда решение исходной задачи (1.1), (1.2) представим в виде

$$w(r, \varphi) = w^{(1)}(r, \varphi) - w^{(2)}(r, \varphi) \tag{1.5}$$

В этом случае граничные условия (1.2), кроме первого и последнего будут удовлетворены. Последнее условие (1.2) представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \alpha_k \varphi \,[C_k R_j^{-\alpha_k} + D_k R_j^{\alpha_k}] = w^{(1)}(R_j, \varphi) \quad (j = 1, 2)$$

откуда, используя ортогональность $\sin \alpha_k \varphi$ на $[0, \gamma]$, найдем

$$[C_k R_j^{-\alpha_k} + D_k R_j^{\alpha_k}] \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \alpha_k \gamma}{G \gamma \alpha_k} R_j^{-(-1)^j \alpha_k} \int_{a_1}^{a_2} \tau(\rho)\, \rho^{(-1)^j \alpha_k} d\rho \tag{1.6}$$

$$(j = 1, 2)$$

Первое граничное условие (1.2) с учетом (1.3) — (1.5) позволяет получить интегральное уравнение относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений.

$$K_r \tau(\rho) = G\left[\delta + \sum_{k=1}^{\infty} \sin \alpha_k \gamma \,(C_k r^{-\alpha_k} + D_k r^{\alpha_k})\right] \quad (a_1 \leqslant r \leqslant a_2) \tag{1.7}$$

где оператор K_r имеет вид

$$K_r \tau(\rho) = \int_{a_1}^{a_2} \tau(\rho)\, k(\rho/r)\, d\rho, \quad k(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{\operatorname{tg} s\gamma}{s} y^s ds \tag{1.8}$$

Представим $\tau(r)$ в виде

$$\tau(r) = G\left\langle \delta \tau_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} [x_k^1 R_1^{\alpha_k} \tau_k^1(r) + x_k^2 R_2^{-\alpha_k} \tau_k^2(r)]\right\rangle \tag{1.9}$$

$$x_k^1 R_1^{\alpha_k} = C_k \sin \alpha_k \gamma, \quad x_k^2 R_2^{-\alpha_k} = D_k \sin \alpha_k \gamma$$

где $\tau_0(r)$, $\tau_k^j(r)$ — соответственно решения интегральных уравнений

$$K_r\tau_0(\rho) = 1, \quad K_r\tau_k^j(\rho) = r^{(-1)^j\alpha_k} \quad (a_1 \leqslant r \leqslant a_2,\ j = 1, 2) \tag{1.10}$$

Подставляя (1.9) в (1.6), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов x_k^1 и x_k^2

$$x_k^1 + x_k^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\alpha_k} = g_k^1 + \sum_{n=1}^{\infty}[x_n^1 a_{kn}^{11} + x_n^2 a_{kn}^{12}] \tag{1.11}$$

$$x_k^1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\alpha_k} + x_k^2 = g_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty}[x_n^1 a_{kn}^{21} + x_n^2 a_{kn}^{22}] \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$g_k^p = \frac{\delta}{\gamma\alpha_k} R_p^{-(-1)^p\alpha_k} T_k^p, \qquad a_{kn}^{pj} = \frac{1}{\gamma\alpha_k} R_p^{-(-1)^p\alpha_k} R_j^{-(-1)^j\alpha_n} T_{kn}^{pj} \tag{1.12}$$

$$T_k^p = \int_{a_1}^{a_2} \tau_0(\rho)\,\rho^{(-1)^p\alpha_k}d\rho, \qquad T_{kn}^{pj} = \int_{a_1}^{a_2} \tau_n^j(\rho)\,\rho^{(-1)^p\alpha_k}d\rho \tag{1.13}$$

Исследуем бесконечную систему (1.11), для этого оценим ее коэффициенты

$$|T_k^p| \leqslant a_p^{(-1)^p\alpha_k} T_0, \qquad T_0 = \int_{a_1}^{a_2} \tau_0(\rho)\,d\rho < \infty$$

Следовательно

$$|g_k^p| \leqslant \frac{\delta}{\gamma\alpha_k}\left(\frac{a_p}{R_p}\right)^{(-1)^p\alpha_k} T_0 \tag{1.14}$$

Для оценки коэффициентов T_{kn}^{pj} второе интегральное уравнение (1.1) умножим на $\tau_0(r)$ и проинтегрируем в пределах от a_1 до a_2. Учитывая, что для ядра (1.8) этого уравнения справедливо соотношение $k(y) = k(1/y)$, изменив порядок интегрирования, получим

$$\int_{a_1}^{a_2} \tau_k^j(\rho)\,d\rho = \int_{a_1}^{a_2} \tau_0(r)\,r^{(-1)^j\alpha_k}dr$$

Тогда

$$|T_{kn}^{pj}| \leqslant a_p^{(-1)^p\alpha_k}\left|\int_{a_1}^{a_2} \tau_n^j(\rho)\,d\rho\right| \leqslant a_p^{(-1)^p\alpha_k} a_j^{(-1)^j\alpha_n} T_0$$

и, следовательно

$$|a_{kn}^{pj}| \leqslant \frac{1}{\gamma\alpha_k}\left(\frac{a_p}{R_p}\right)^{(-1)^p\alpha_k}\left(\frac{a_j}{R_j}\right)^{(-1)^p\alpha_n} T_0 \tag{1.15}$$

Учитывая, что $R_1 < a_1 < a_2 < R_2$, $\alpha_n \sim n$ $(n \to \infty)$, из оценок (1.14)—(1.15) заключаем, что коэффициенты бесконечной системы (1.11) a_{kn}^{pj} и g_k^p экспоненциально убывают с ростом номеров k, n. Следовательно, система (1.11) принадлежит к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха и ее решение может быть получено методом редукции для любых значений параметров задачи.

Таким образом, контактные напряжения под штампом определяются формулой (1.9), в которой x_k^j — решение бесконечной системы (1.11), а функции $\tau_k^j(r)$ — решения интегральных уравнений (1.10). При этом следует особо отметить, что для интегральных уравнений (1.10) может быть получено точное решение [3], не содержащее квадратур.

Опуская выкладки, выпишем решение уравнений (1.10)

$$
(1.16)\quad r\tau_k^j(r) = \varphi_k^j(x), \quad r\tau_0(r) = \varphi_0(x), \quad x = \lambda \ln \frac{r}{a_1} - 1
$$

$$
\varphi_k^j(x) = \lambda \varkappa_k^j [\varphi_k^+(x) + (-1)^j \varphi_k^-(x)], \quad \varkappa_k^j = (\sqrt{a_1 a_2})^{(-1)^j \alpha_k}
$$

$$
\varphi_k^+(x) = \frac{b}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{C_k^*}{\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} bx}} - \frac{\pi(2k-1)^2}{4} \eta_k(x) \right]
$$

$$
\varphi_k^-(x) = -\frac{2k-1}{2\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \eta_k(x), \quad b = \frac{\pi}{\lambda\gamma}, \quad \lambda = 2\left(\ln\frac{a_2}{a_1}\right)^{-1}
$$

$$
\varphi_0(x) = b\lambda \operatorname{ch}\frac{b}{2} \left[K\left(\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \frac{b}{2}}\right) \sqrt{2(\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} bx)} \right]^{-1}
$$

$$
\eta_k(x) = 2\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} bx} \sum_{m=0}^{[k-1/2]} \beta_{km} \sum_{p=0}^{k-2m-1} \binom{k-2m-1}{p} \times
$$

$$
\times \frac{\operatorname{ch}^p bx (\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} bx)^{k-2m-p-1}}{2(k-2m-1-p)+1}, \quad C_k^* = \frac{\pi \operatorname{ch}(b/2) P_{k-1}(\operatorname{ch} b)}{K(\sqrt{1-\operatorname{th}^2(b/2)}) P_{-1/2}(\operatorname{ch} b)} -
$$

$$
- \frac{\pi \operatorname{ch} b [P_{k-1}(\operatorname{ch} b) P_{-1/2}^1(\operatorname{ch} b) - P_{-1/2}(\operatorname{ch} b) P_{k-1}^1(\operatorname{ch} b)]}{P_{-1/2}(\operatorname{ch} b)}
$$

$$
\beta_{km} = (-1)^m 2^{1-k} \binom{k-1}{m} \binom{2(k-m-1)}{k-1}
$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл, $P_\alpha^n(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

Используя (1.16), найдем выражения для коэффициентов (1.11) — (1.12) бесконечной системы (1.11)

$$
(1.17)\quad T_{kn}^{pj} = 2\varkappa_k^p \varkappa_n^j [T_{kn}^+ + (-1)^{j+p} T_{kn}^-], \quad T_k^p = 2\varkappa_k^p T_{k0}
$$

$$
T_{kn}^+ = \frac{1}{2} C_n^* P_{k-1}(\operatorname{ch} b) - \frac{\pi(2n-1)^2}{8} P_{k,n}
$$

$$
T_{kn}^- = \frac{\pi(2n-1)(2k-1)}{8} P_{k,n}, \quad T_{k0} = \frac{\pi\lambda \operatorname{ch}(b/2) P_{k-1}(\operatorname{ch} b)}{2K(\sqrt{1-\operatorname{th}^2(b/2)})}
$$

$$
P_{k,n} = \operatorname{sh} b [P_{n-1}(\operatorname{ch} b) P_{k-1}^1(\operatorname{ch} b) - P_{k-1}(\operatorname{ch} b) P_{n-1}^1(\operatorname{ch} b)] \times
$$

$$
\times [(k-n)(k+n-1)]^{-1}, \quad k \neq n
$$

$$
P_{k,k} = -\operatorname{sh} b \left[\frac{d}{dk} P_{k-1}(\operatorname{ch} b) P_{k-1}^1(\operatorname{ch} b) - \right.
$$

$$
\left. - P_{k-1}(\operatorname{ch} b) \frac{d}{dk} P_{k-1}^1(\operatorname{ch} b) \right] (2k-1)^{-1}
$$

Выражения для контактных напряжений и коэффициентов бесконечной системы не содержат квадратур и могут быть легко подсчитаны. Отметим также, что для получения практически приемлемого решения задачи для широкого диапазона изменения параметров бесконечную систему достаточно урезать до 2—4 уравнений.

2. Сдвиг штампом кольцевого сектора. В цилиндрических координатах рассмотрим упругое тело, занимающее область $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $-\gamma \leqslant \varphi \leqslant \gamma$, $-\infty < z < \infty$. Поперечное сечение такой области при $z = \mathrm{const}$ будем называть кольцевым сектором, так как исследование рассматриваемой здесь задачи будет опираться на решение некоторых краевых задач для кругового кольца.

Задача 2 о сдвиге штампом кольцевого сектора будет эквивалентна краевой задаче относительно функции перемещения $w(r, \varphi)$ вдоль оси z

для уравнения (1.1) при следующих граничных условиях:

$$w = \delta \; (r = R_2, \; |\varphi| \leqslant \theta), \; w = 0 \; (r = R_1, \; |\varphi| \leqslant \gamma) \tag{2.1}$$

$$\tau_{rz} = G\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (r = R_2, \theta < |\varphi| < \gamma)$$

$$w = 0 \; (|\varphi| = \gamma, \; R_1 < r < R_2)$$

где δ — перемещение штампа вдоль оси z, G — модуль сдвига, τ_{rz} — касательные напряжения.

Для решения этой задачи используем также метод однородных решений [1]. Как и в п. 1, сначала найдем решение уравнения (1.1) для кругового кольца $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, когда

$$\tau_{rz} = \begin{cases} \tau(\varphi) & (|\varphi| \leqslant \theta, \; r = R_2) \\ 0 & (\theta < |\varphi| < \pi, \; r = R_2) \end{cases}, \quad w = 0 \; (r = R_1) \tag{2.2}$$

В этом случае

$$w = w^{(1)} = \frac{1}{G}\left\langle \frac{t_0 R_2}{2} \ln\frac{r}{R_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_2 t_k (r^k R_1^{-k} - r^{-k} R_1^k)}{k(\varkappa^k + \varkappa^{-k})} \cos k\varphi \right\rangle \tag{2.3}$$

$$t_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \tau(\varphi)\cos k\varphi \, d\varphi, \quad \varkappa = \frac{R_1}{R_2}$$

Далее построим систему однородных решений для уравнения (1.1) для кругового кольца, когда

$$w = 0 \; (r = R_1), \quad \tau_{rz} = 0 \; (r = R_2)$$

и введем в рассмотрение их линейную комбинацию

$$w^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k W_k(r) \operatorname{ch} \beta_k \varphi, \quad W_k(r) = \left(\frac{r}{R_1}\right)^{i\beta_k} - \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-i\beta_k} \tag{2.4}$$

$$\beta_k = \frac{\pi(2k-1)}{2\ln\varkappa}$$

Можно показать, что функции $W_k(r)$ ортогональны на отрезке $[R_1, R_2]$ с весом r^{-1}, а именно выполняется соотношение

$$\int_{R_1}^{R_2} W_k(r) W_n(r) \frac{dr}{r} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 2\ln\varkappa, & k = n \end{cases} \tag{2.5}$$

Решение исходной задачи представим в виде

$$w(r, \varphi) = w^{(1)}(r, \varphi) - w^{(2)}(r, \varphi) \tag{2.6}$$

В этом случае граничные условия (2.1), кроме первого и последнего, будут удовлетворены. Последнее условие (2.1) представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k W_k(r) \operatorname{ch} \beta_k \gamma = w^{(1)}(r, \gamma)$$

Используя условие ортогональности (2.5), отсюда найдем

$$2D_k \ln\varkappa \operatorname{ch}\beta_k\gamma = \frac{R_2}{G}\left\langle -\frac{t_0 \ln\varkappa\,(\varkappa^{-i\beta_k} + \varkappa^{i\beta_k})}{2i\beta_k} + \right. \tag{2.7}$$

$$\left. + \frac{W_k(R_2)\operatorname{ch}\beta_k(\pi - \gamma)}{\beta_k \operatorname{sh}\pi\beta_k} \int_0^\theta \tau(\varphi) \operatorname{ch}\beta_k\varphi \, d\varphi \right\rangle$$

Первое граничное условие (2.1) с учетом (2.3)—(2.4) позволяет получить интегральное уравнение для функции $\tau(\varphi)$

$$M_\varphi \tau(\psi) = \frac{t_0 \ln \varkappa}{2} + \frac{G}{R_2} \left\langle \delta + \sum_{k=1}^{\infty} D_k W_k(R_2) \operatorname{ch} \beta_k \varphi \right\rangle \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \theta) \tag{2.8}$$

где оператор M_φ имеет вид

$$M_\varphi \tau(\psi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \tau(\psi) M(\psi, \varphi)\, d\psi, \tag{2.9}$$

$$M(\psi, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa^{-k} - \varkappa^k}{k(\varkappa^{-k} + \varkappa^k)} \cos k\varphi \cos k\psi$$

Представим $\tau(\varphi)$ в виде

$$\tau(\varphi) = \left(\frac{t_0 \ln \varkappa}{2} + \frac{G\delta}{R_2}\right) \left[\tau_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \tau_n(\varphi)}{\operatorname{ch} \beta_n \gamma}\right] \tag{2.10}$$

$$D_n W_n(R_2) = \left(\delta + \frac{R_2}{2G} t_0 \ln \varkappa\right) \frac{y_n}{\operatorname{ch} \beta_n \gamma}$$

где $\tau_n(\varphi)$ — решения хорошо изученных интегральных уравнений

$$M_\varphi \tau_n(\psi) = \operatorname{ch} \beta_n \varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \theta,\ n \geqslant 0,\ \beta_0 = 0) \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10) в (2.7), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$y_k = g_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} y_n \tag{2.12}$$

$$g_k = \frac{W_k^2(R_2) \operatorname{ch} \beta_k (\pi - \gamma)}{2 \ln \varkappa \beta_k \operatorname{sh} \pi \beta_k} T_{k,0}, \quad a_{kn} = \frac{W_k^2(R_2) \operatorname{ch} \beta_k (\pi - \gamma) T_{k,n}}{2\beta_k \ln \varkappa \operatorname{sh} \pi \beta_k \operatorname{ch} \beta_k \gamma}$$

$$T_{k,n} = \int_0^\theta \tau_n(\varphi) \operatorname{ch} \beta_k \varphi\, d\varphi \quad (k \geqslant 1, n \geqslant 0) \tag{2.13}$$

Выражение (2.10) для определения касательных напряжений содержит постоянную

$$t_0 = \frac{T}{\pi R_2}, \quad T = R_2 \int_{-\theta}^{\theta} \tau(\varphi)\, d\varphi$$

Для определения постоянной T воспользуемся условием статики, для чего равенство (2.10) проинтегрируем по φ в пределах от $-\theta$ до θ. Получив уравнение для T, найдем

$$T = G\delta T^*, \quad T^* = P\left[1 - \frac{\ln \varkappa}{2\pi} P\right] \tag{2.14}$$

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{\operatorname{ch} \beta_n \gamma} P_n, \quad P_n = \int_{-\theta}^{\theta} \tau_n(\varphi)\, d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Формулы (2.14) устанавливают связь между перемещением штампа δ и силой T, действующей на штамп.

Исследуем бесконечную систему (2.12). Для этого оценим вначале коэффициенты $T_{k,n}$

$$|T_{k,0}| \leqslant {}^1/_2 P_0 \operatorname{ch} \beta_k \theta, \quad |T_{k,n}| \leqslant {}^1/_2 P_n \operatorname{ch} \beta_k \theta \tag{2.15}$$

Для оценки P_n умножим правые и левые части интегральных уравнений (2.11) при $n \geqslant 1$ на $\tau_0(\varphi)$ и проинтегрируем в пределах от $-\theta$ до θ. Учитывая симметричность ядра (2.9) уравнений (2.11), равенство (2.11) при $n = 0$ и изменив порядок интегрирования, получим

$$P_n = \int_{-\theta}^{\theta} \tau_0(\varphi) \operatorname{ch} \beta_n \varphi d\varphi, \quad |P_n| \leqslant P_0 \operatorname{ch} \beta_n \theta \tag{2.16}$$

С помощью оценок (2.15) — (2.16) можно сделать вывод о том, что коэффициенты g_k и a_{kn} бесконечной системы (2.12) экспоненциально убывают с ростом номеров k, n. Следовательно, система (2.12) относится к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха и ее решение может быть получено методом редукции при любых значениях параметров задачи.

Учитывая значение ряда [4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cos kx = -\ln\left|2 \sin \frac{x}{2}\right|$$

интегральные уравнения (2.11) можно преобразовать к виду

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \tau_n(\psi) k(\psi - \varphi) d\psi = f_n(\varphi) \quad (|\varphi| \leqslant \theta, n \geqslant 0) \tag{2.17}$$

$$f_n(\varphi) = \operatorname{ch} \beta_n \varphi$$

$$k(y) = -\ln\left|2 \sin \frac{y}{2}\right| - F(y), \quad F(y) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa^{2k} \cos ky}{k(1 + \varkappa^{2k})} \tag{2.18}$$

Интегральные уравнения (2.17), (2.18) и свойства их решений хорошо изучены (например, [5]). Для отыскания их решения можно воспользоваться методом ортогональных многочленов [5], в результате чего получим

$$\tau_n(\varphi) = \frac{\cos(\varphi/2)}{2\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k{}^n T_{2k}\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\theta/2)}\right) \tag{2.19}$$

где $T_{2k}(x)$ — полиномы Чебышева, а коэффициенты $a_k{}^n$ определяются из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода, эффективное решение которых можно получить методом редукции при любых значениях параметров [5]. В большинстве случаев для получения практически приемлемого решения достаточно ограничиться 2—4 уравнениями.

3. Замкнутое решение интегральных уравнений (2.17). Продифференцируем уравнение (2.17) по φ. Используя соотношение [4]

$$\frac{K(b) \operatorname{cn}(uK(b))}{\operatorname{sn}(uK(b))} = \frac{\pi}{2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa^{2k} \sin \pi k u}{1 + \varkappa^{2k}}\right],$$

$$\varkappa = \exp\left[-\frac{\pi K'(b)}{K(b)}\right]$$

где $K(b)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ — эллиптические функции Якоби, придем к интегральным уравнениям [6]

$$\int_{-1}^{1} \varphi_k(\xi) \operatorname{cs}\left(\frac{\xi - x}{\eta}\right) d\xi = \frac{g_k'(x)}{K(b)} \quad (|x| \leqslant 1) \tag{3.1}$$

Здесь

$$\eta = \frac{\pi}{\theta K(b)}, \quad \varphi_k(\xi) = 2\tau_k(\xi\theta), \quad g_k(x) = f_k(x\theta), \quad \operatorname{cs} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$

Учитывая четность функций $\varphi_k(\xi)$, $g_k(x)$, уравнения (3.1) преобразуем к виду

$$(3.2)\qquad \int_0^1 \varphi_k(\xi)\left[\operatorname{cs}\left(\frac{\xi-x}{\eta}\right)-\operatorname{cs}\left(\frac{\xi+x}{\eta}\right)\right]d\xi=\frac{g_k'(x)}{K(b)}\qquad (|x|\leqslant 1)$$

Можно показать, что

$$(3.3)\qquad \operatorname{cs}(\xi-x)-\operatorname{cs}(\xi+x)=\frac{2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}\xi}{\operatorname{sn}^2\xi-\operatorname{sn}^2 x}$$

$$\operatorname{cs}(\xi-x)+\operatorname{cs}(\xi+x)=\frac{2\operatorname{sn}\xi\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}^2\xi-\operatorname{sn}^2 x}$$

где $\operatorname{dn} x$ — эллиптическая функция Якоби.

Используя первое соотношение (3.3) и снова учитывая четность функций $\varphi_k(\xi)$, $g_k(x)$, преобразуем уравнения (3.2) к виду

$$(3.4)\qquad \int_{-1}^1 \varphi_k(\xi)\operatorname{dn}\frac{\xi}{\eta}\frac{d\xi}{\operatorname{sn}(\xi/\eta)-\operatorname{sn}(x/\eta)}=\frac{g'(x)}{K(b)\operatorname{cn}(x/\eta)}\qquad (|x|\leqslant 1)$$

Функция $\operatorname{sn}(K\theta x/\pi)$ возрастает при $x\in[0,1]$, $\theta\in[0,\pi]$.

Замена переменных по формулам

$$\tau=\operatorname{sn}(\xi/\eta),\quad t=\operatorname{sn}(x/\eta)$$

позволяет свести уравнения (3.4) к интегральному сингулярному уравнению первого рода с ядром Коши

$$(3.5)\qquad \int_{-d}^{d}\Phi_k(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}=p_k(t)\qquad \left(|t|\leqslant d,\ d=\operatorname{sn}\frac{1}{\eta}\right)$$

Здесь

$$(3.6)\qquad \Phi_k(\tau)=\frac{\varphi_k(\xi)}{\operatorname{cn}(\xi/\eta)},\quad p_k(t)=\frac{\theta g_k'(x)}{\pi\operatorname{cn}(x/\eta)}$$

Воспользуемся решением сингулярного уравнения (3.5) в форме, содержащей сингулярные интегралы [7]. В результате получим замкнутое решение интегральных уравнений (2.17) в виде

$$(3.7)\qquad \tau_k(\psi)=\frac{\operatorname{cn}(K\psi/\pi)}{2\pi^2\sqrt{\operatorname{sn}^2(K\theta/\pi)-\operatorname{sn}^2(K\psi/\pi)}}\left[C_k-\right.$$
$$\left.-\frac{K\theta^2}{\pi^2}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{f_k'(\tau)\operatorname{dn}(K\tau/\pi)\sqrt{\operatorname{sn}^2(K\theta/\pi)-\operatorname{sn}^2(K\tau/\pi)}}{\operatorname{sn}(K\tau/\pi)-\operatorname{sn}(K\psi/\pi)}d\tau\right]$$

где C_k — произвольные постоянные. Подставляя в интегральное уравнение (2.17) при $n=0$ значение $\tau_0(\psi)$, даваемое соотношением (3.7) с учетом $f_0'(\tau)=0$, и учитывая, что интеграл, стоящий слева, есть некоторая постоянная при любом $\varphi\in[-\theta,\theta]$, в частности при $\varphi=0$, будем иметь условие для нахождения постоянной C_0. Отсюда найдем

$$(3.8)\qquad C_0=\pi^3\left\{\int_{-\theta}^{\theta}\frac{\operatorname{cn}(K\psi/\pi)\,k(\psi)\,d\psi}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(K\theta/\pi)-\operatorname{sn}^2(K\psi/\pi)}}\right\}^{-1}$$

где $k(\psi)$ дается формулой (2.18).

Постоянные C_k ($k=1, 2, \ldots$) можно найти из первого условия (2.16).

Отметим, что в случае нечетности функций $\varphi_k(\xi)$ и $g_k(x)$ интегральные уравнения (2.17) можно также свести к сингулярному уравнению (3.5), если использовать второе соотношение (3.3).

Метод однородных решений, изложенный в п. 2, может быть также использован для исследования контактной задачи о вдавливании штампа в цилиндрическую поверхность кольцевого сектора, когда на поверхностях $|\varphi| = \gamma$ отсутствуют касательные напряжения и нормальные перемещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров.— Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. школы. Сер. естеств. н., 1974, № 4, с. 12—16.
2. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 620—631.
3. *Александров В. М.* Об одной контактной задаче для упругого клина.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, т. 20, № 1, с. 3—14.
4. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. *Александров В. М.*, *Коваленко Е. В.* Периодические контактные задачи для упругой полосы.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1977, т. 30, № 4, с. 18—33.
6. *Александров В. М.* Аналитические методы решения задач теории упругости для тел конечных размеров с собственно смешанными граничными условиями.— В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1979, с. 21—27.
7. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
14.I.1983