

УДК 539.3

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Солдатов М. М.

Плоские задачи теории упругости приводятся к системам сингулярных интегральных уравнений, для которых развивается прямой метод решения, аналогичный известному в аэродинамике методу дискретных вихрей. Рассмотрено численное решение ряда плоских задач теории упругости, получены устойчивые численные решения и показана их сходимость.

При решении задач теории упругости сведением их к интегральным уравнениям обычно стремились по возможности уйти от сингулярных интегральных уравнений (СИУ) и свести их к регулярным интегральным уравнениям первого или второго рода [1, 2]. Подобная ситуация наблюдается и при решении других задач, например в электродинамике [3]. Однако оказалось, что численное решение на ЭВМ регулярных интегральных уравнений первого рода неустойчиво. Регулярные интегральные уравнения второго рода, получаемые в задачах теории упругости, зачастую обладают собственными функциями [2], и поэтому их численное решение на ЭВМ некоторыми прямыми методами также неустойчиво. В связи с указанными неудобствами сведения задач к регулярным интегральным уравнениям в аэродинамике [4] эти задачи сводят к СИУ, для которых разработан устойчивый метод численного решения («метод дискретных вихрей» [4]).

Ниже аналогичный подход развивается для решения плоских задач теории упругости. Эти задачи для ограниченных односвязных областей, граница которых — замкнутая кривая Ляпунова, приводятся к СИУ первого рода с ядрами Гильберта относительно комплексно-сопряженных функций. Получены условия, обеспечивающие единственность решения этих уравнений. Численно эти уравнения решаются методом дискретных особенностей, который является развитием метода дискретных вихрей. Идея этого метода состоит в замене системы СИУ системой линейных алгебраических уравнений относительно искомого функции в некоторых специальным образом выбранных граничных точках, специальным образом расположенных по отношению к точкам, в которых находятся значения искомого функции.

Конкретно рассмотрено численное решение второй основной задачи (на границе заданы напряжения) для круга при различных нагрузках как непрерывной, так и в виде сосредоточенных в конечном числе точек сил. Для них получены устойчивые численные решения как при наличии одной и более осей симметрии, так и при отсутствии таковых и показана сходимость этих решений. При этом разработан новый, удобный для реализации на ЭВМ, подход к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений, которые заменяют СИУ.

1. Решение плоских задач теории упругости при отсутствии объемных сил известным образом [2, 5] приводится к определению двух аналитических функций (например, φ , ψ), удовлетворяющих краевому условию

$$(1.1) \quad \kappa_k \varphi(t) - \overline{t\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = f_k(t), \quad t \in L, \quad k = 1, 2 \text{ на контуре}$$

L , ограничивающем область D . Если условие (1.1) задано в перемещениях, то $k = 1$, $\kappa_1 = \kappa$, где величина κ определена в [2] и

$$(1.2) \quad f_1 = 2 \mu (u + iv)$$

где μ — модуль сдвига, u , v — перемещения. Если условие (1.1) задано

в напряжениях, то $k = 2$, $\kappa_2 = -1$ и

$$(1.3) \quad f_2 = -i \int_{s_0}^s (\sigma_{xv} + i\sigma_{yv}) ds + c_2$$

(обозначения указаны в [2]).

2. Аналитические функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ предлагается искать в виде

$$(2.1) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t) dt}{t-z}, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{c\omega(t)} - \bar{t}\omega'(t)}{t-z} dt, \quad z \in D$$

где для вспомогательной функции $\omega(t)$ получается из (1.1) интегральное уравнение

$$(2.2) \quad \frac{\kappa_k - c}{2} \omega(t) + \frac{\kappa_k}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{c}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) d\bar{\tau}}{\bar{\tau}-\bar{t}} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\tau)} d\left(\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right) = f_k(t)$$

с комплексным параметром c , выбор которого позволяет приводить задачу к уравнениям разного типа.

При $c = -\kappa_k$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма, принадлежащему Н. И. Мусхелишвили [5]

$$(2.3) \quad \kappa_k \omega(t) + \frac{\kappa_k}{2\pi i} \int_L \omega(\tau) d\left(\ln \frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{\tau-t}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\tau)} d\left(\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right) = f_k(t)$$

Прямое решение уравнения (2.3) методом механических квадратур затруднительно [2] из-за наличия собственной функции, что приводит к вырожденной системе линейных алгебраических уравнений и получению неустойчивых значений искомой функции.

Аналогичные трудности имеют место и при сведении задачи к другим регулярным интегральным уравнениям типа Мусхелишвили, Шермана — Лауричеллы [2, 6]. Рассматривались разные способы устранения этого недостатка [2]: фиксирование ω в каких-либо точках и исключение соответствующих уравнений, использование погрешности квадратурных формул для улучшения структуры алгебраических уравнений.

При $c = 0$ уравнение (2.2) становится вырожденным СИУ второго рода. Невырожденное СИУ второго рода может быть получено, например, при $c = i$. Здесь же будет исследовано приведение к СИУ первого рода, которое возможно при $c = \kappa_k$. В этом случае из (2.2) получим]

$$(2.4) \quad \frac{\kappa_k}{\pi i} \int_L \omega(\tau) \operatorname{Re} \left(\frac{d\tau}{\tau-t} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\tau)} d\left(\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}\right) = f_k(t)$$

Отметим, что СИУ (2.4) — уравнение с ядром Гильберта.

Действительно, пусть область D односвязна и контур L , ограничивающий ее, гладкий (ляпуновский) т. е. его параметрическое уравнение $x = x(\eta)$, $y = y(\eta)$ таково, что $x(\eta)$, $y(\eta)$, $x'(\eta)$ и $y'(\eta)$ — 2π -периодические функции и принадлежат классу Гельдера [7]. Заметим, что

$$(2.5) \quad \operatorname{Re} \left(\frac{d\tau}{\tau-t} \right) = \frac{x'(x-x_0) + y'(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} d\eta = \operatorname{ctg} \frac{\eta-\xi}{2} B(\eta, \xi) d\eta \\ \eta, \xi \in [0, 2\pi], \tau = x + iy, t = x_0 + iy_0, x_0 = x(\xi), y_0 = y(\xi)$$

Как следует из [7], функция $B(\eta, \xi)$ принадлежит классу Гельдера. Можно показать, что она периодическая по η и ξ с периодом 2π и $B(\xi, \xi) = 0.5$. Отсюда следует, что ядро (2.5) можно представить в виде суммы ядра Гильберта и регулярного ядра.

3. Исследование свойств СИУ (2.4)] проведем для случая, когда L —

окружность. На окружности СИУ (2.4) представляется в виде

$$(3.1) \quad \kappa_k \int_0^{2\pi} \omega(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} d\eta - i \int_0^{2\pi} \overline{\omega(\eta)} e^{i(\eta + \xi)} d\eta = 2\pi i f_k(\xi)$$

Для внутренней задачи в напряжениях необходимо равенство нулю вектора сил и вектора момента от внешних нагрузок. Поэтому уравнение (3.1) должно быть дополнено условиями на правую часть. Условие равенства нулю вектора внешних сил требует однозначности $f_2(\xi)$, при наличии которой оно автоматически выполняется. В частности, для однозначности функции f_2 необходима ее периодичность на L , тогда

$$(3.2) \quad f_2(0) = f_2(L)$$

а в задачах на окружности

$$(3.3) \quad f_2(\xi) = f_2(2\pi k + \xi); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из (3.1) очевидно, что условие (3.3) не накладывает ограничения на функцию ω .

Условие равенства нулю вектора момента внешних сил [2]

$$(3.4) \quad \operatorname{Re} \int_L \overline{f_2(t)} dt = 0$$

на окружности приводит относительно функции ω с использованием (3.1) для $\kappa_k = \kappa_2 = -1$ к соотношению

$$-iR \int_0^{2\pi} [\overline{\omega(\eta)} e^{i\eta} + \omega(\eta) e^{-i\eta}] d\eta = \int_L \overline{f_2(t)} dt, \quad t = Re^{i\theta}$$

в котором слева стоит чисто мнимое выражение для всех ω , поэтому и условие (3.4) не накладывает ограничения на ω .

Продолжая исследование задачи на круге, видим, что однородное уравнение (3.1) (при $f_k \equiv 0$) имеет собственные решения, вид которых устанавливается, например, из представления $\omega(\eta)$ в виде ряда Фурье. Собственными функциями однородного уравнения (3.1) и (2.4) являются комплексная константа

$$(3.5) \quad \omega = a + ib$$

и при $k = 2$ — функция

$$(3.6) \quad \omega(\eta) = ia_1 e^{i\eta}$$

для однородного уравнения (3.1), а для уравнения (2.4) — функция

$$\omega(\tau) = ia_2 \tau$$

Чтобы получить задачу, определенную однозначно, нужно либо поступать так же, как в [2], либо, как предлагается ниже, СИУ должно решаться совместно с некоторыми дополнительными условиями, которые «не пропускали» бы собственные функции (3.5), (3.6). Этим свойством обладают следующие условия:

$$(3.7) \quad \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau = 0, \quad k = 1, 2; \quad \int_L \left[\frac{\omega(\tau)}{\tau^2} d\tau + \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\overline{\tau^2}} d\overline{\tau} \right] = 0, \quad k = 2$$

Как дополнительные слагаемые левые части уравнений (3.7) вводил в интегральное уравнение типа (2.3) Д. И. Шерман [2, 6] для обеспечения

единственности решения. На окружности условия (3.7) записываются так:

$$(3.8) \quad \int_0^{2\pi} \omega(\eta) d\eta = 0, \quad k = 1, 2$$

$$\operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \overline{\omega(\eta)} e^{i\eta} d\eta = 0, \quad k = 2$$

и, следовательно, первому уравнению (3.8) не удовлетворяет ω в виде (3.5), а второму уравнению (3.8) не удовлетворяет ω в виде (3.6).

Кроме того, уравнение (3.1) обладает тем свойством, что интеграл по ξ от 0 до 2π от левой части равен нулю, следовательно, и интеграл от правой части (3.1) должен быть равен нулю

$$(3.9) \quad \int_0^{2\pi} f_k(\xi) d\xi = 0$$

что приводит к требованию равенства нулю интеграла как от действительной, так и от мнимой части функции f_k . Условие (3.9) при решении задачи в напряжениях определяет комплексную константу c_2 в (1.3), а при решении задачи в перемещениях соотношение (3.9) выполняется автоматически для функции f_1 , аналитической в области D и непрерывной на L . Условие (3.4), в частности, для круга приводит к соотношению

$$(3.10) \quad \int_0^{2\pi} (f_R \sin \xi - f_I \cos \xi) d\xi = 0 \quad (f_2 = f_R + if_I)$$

Для произвольного замкнутого гладкого контура L , интегрируя (2.4) по ξ — параметру задания контура L , получим соотношение

$$(3.11) \quad \int_L f_k(\xi) d\xi = 0$$

аналогичное условию (3.9) на круге.

Итак, вторая основная задача для области, ограниченной замкнутым гладким контуром L , сведена к интегральному уравнению (2.4) и условиям (3.2), (3.4), (3.7), (3.11), из которых определяется функция ω , а в случае, когда L — окружность, — соответственно к (3.1) и (3.3), (3.8) — (3.10), где в СИУ имеется сингулярность вида $\operatorname{ctg}[(\eta - \xi)/2]$. Эта же сингулярность в СИУ сохраняется, как это показано выше, и в задачах для произвольной области, ограниченной гладким контуром, однако регулярная часть СИУ меняется.

4. Продемонстрируем метод дискретных особенностей для уравнения (3.1), дополненного условиями (3.3), (3.8) — (3.10), полагая $k = 2$, т. е. $\kappa_k = -1$. Для этого запишем уравнения (3.1), (3.8), выделив действительную и мнимую части. Получим систему уравнений (интегралы берутся в пределах от 0 до 2π)

$$(4.1) \quad \int \omega_R(\eta) \left[\operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} - \sin(\eta + \xi) \right] d\eta + \int \omega_I(\eta) \cos(\eta + \xi) d\eta =$$

$$= 2\pi f_I(\xi)$$

$$\int \omega_R(\eta) \cos(\eta + \xi) d\eta +$$

$$+ \int \omega_I(\eta) \left[\operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} + \sin(\eta + \xi) \right] d\eta = -2\pi f_R(\xi)$$

$$\int \omega_R(\eta) d\eta = 0, \quad \int \omega_I(\eta) d\eta = 0$$

$$\int [\omega_R(\eta) \sin \eta - \omega_I(\eta) \cos \eta] d\eta = 0$$

где нижним индексом R обозначена действительная часть соответствующей функции, а индексом I — мнимая.

Предположим вначале, что функции $f_R(\eta)$ и $f_I(\eta)$ принадлежат классу Гельдера на $[0, 2\pi]$. Пусть точки η_i ($i = 1, \dots, n$), интерпретируемые как точки единичной окружности, разбивают окружность на n равных частей, а точки ξ_j — середины дуг $\eta_i\eta_{i+1}$. Заменяем теперь систему (4.1) интегральных уравнений для $k = 2$ следующей системой линейных алгебраических уравнений (суммирование по i от 1 до n):

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \sum \omega_{nR}(\eta_i) \left[\operatorname{ctg} \frac{\eta_i - \xi_j}{2} - \sin(\eta_i + \xi_j) \right] \frac{2\pi}{n} + \\ & + \sum \omega_{nI}(\eta_i) \cos(\eta_i + \xi_j) \frac{2\pi}{n} + \beta_1 + \beta_3 \cos \xi_j = 2\pi f_I(\xi_j) \\ & \sum \omega_{nR}(\eta_i) \cos(\eta_i + \xi_j) \frac{2\pi}{n} + \sum \omega_{nI}(\eta_i) \left[\operatorname{ctg} \frac{\eta_i - \xi_j}{2} + \right. \\ & \left. + \sin(\eta_i + \xi_j) \right] \frac{2\pi}{n} + \beta_2 + \beta_3 \sin \xi_j = -2\pi f_R(\xi_j) \\ & \sum \omega_{nR}(\eta_i) \frac{2\pi}{n} = 0, \quad \sum \omega_{nI}(\eta_i) \frac{2\pi}{n} = 0 \\ & \sum [\omega_{nR}(\eta_i) \sin \eta_i - \omega_{nI}(\eta_i) \cos \eta_i] \frac{2\pi}{n} = 0; \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Здесь β_1, β_2 и β_3 — регуляризующие факторы [8].

Без неизвестных β_1, β_2 и β_3 система (4.2) переопределена (т. е. число уравнений больше числа неизвестных) и в общем случае может быть несовместна из-за погрешностей вычислений. Если даже она и совместна, то трудно найти те три уравнения, которые надо выбросить, чтобы она стала определенной. Введение же неизвестных β_1, β_2 и β_3 делает систему (4.2) определенной и невырожденной. При этом β_1, β_2 и β_3 стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (3.9), (3.10).

Действительно, просуммировав первые n уравнений в системе (4.2), получим

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \omega_{nR}(\eta_i) \frac{2\pi}{n} S_{si} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \omega_{nI}(\eta_i) \frac{2\pi}{n} S_{ci} + \beta_1 + \\ & + \frac{\beta_3}{2\pi} S_0 = \sum_{j=1}^n f_I(\xi_j) \frac{2\pi}{n} \\ & \left(S_{si} = \sum_{j=1}^n \sin(\eta_i + \xi_j) \frac{2\pi}{n}, \quad S_{ci} = \sum_{j=1}^n \cos(\eta_i + \xi_j) \frac{2\pi}{n} \right. \\ & \left. S_0 = \sum_{j=1}^n \cos \xi_j \frac{2\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

суммы S_{si}, S_{ci}, S_0 равны нулю при нечетном n и стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ для произвольных n , так как они аппроксимируют соответствующие интегралы. В силу условия (3.9) и сумма справа в (4.3) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, получаем, что (4.3) можно записать в виде

$$(4.4) \quad \beta_1 + \alpha_1 \beta_3 = \alpha_2; \quad \alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Аналогично, суммируя следующие n уравнений, получим

$$(4.5) \quad \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \alpha_4; \quad \alpha_3, \alpha_4 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Если теперь первые n уравнений умножить на $\cos \xi_j$ ($j = 1, \dots, n$) соответственно, а вторые n уравнений — на $\sin \xi_j$ ($j = 1, \dots, n$) и затем просуммировать все $2n$ уравнений, то с учетом условия (3.10) получим

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \alpha_5 \beta_1 + \alpha_6 \beta_2 + (1 + \alpha_7) \beta_3 = \alpha_8 \\ & \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Из системы уравнений (4.4) — (4.6) следует сделанное выше утверждение относительно β_1 , β_2 и β_3 .

Заметим, что регуляризирующие факторы β_1 , β_2 и β_3 можно вводить и другими способами так, чтобы выполнилось условие их стремления к нулю при $n \rightarrow \infty$ и система при этом была невырожденной. Например, можно взять в первых n уравнениях β_1 , $\xi_j \beta_2$ и $\xi_j^2 \beta_3$, а в последующих n уравнениях β_1 , $(2\pi + \xi_j) \beta_2$, $(2\pi + \xi_j)^2 \beta_3$.

Аппроксимируемость интеграла с $\operatorname{ctg} [(\eta - \xi)/2]$ на отрезке $[0, 2\pi]$ рассмотренными выше суммами следует из [8]. Из результатов этой же работы для характеристического СИУ первого рода с ядром $\operatorname{ctg} [(\eta - \xi)/2]$ следует, что систему (4.2) можно эквивалентно преобразовать в систему линейных алгебраических уравнений для регулярного уравнения Фредгольма второго рода, которое имеет единственное решение, так как система (4.1) имеет единственное решение. Отсюда получим, что система (4.2) не вырождена и ее решение сходится к решению системы (4.1) интегральных уравнений. При этом, если $f_R(\xi)$ и $f_I(\xi)$ принадлежат классу $H(\alpha)$ [5] и n — произвольное натуральное число, то

$$(4.7) \quad \begin{aligned} |\omega_R(\eta_i) - \omega_{nR}(\eta_i)| &\leq O_1(n^{-\alpha} \ln n) \\ |\omega_I(\eta_i) - \omega_{nI}(\eta_i)| &\leq O_2(n^{-\alpha} \ln n) \end{aligned}$$

если же n нечетно и $f_R^{(r)}(\xi)$, $f_I^{(r)}(\xi)$ принадлежат классу $H(\alpha)$, то из [7] следует, что справа в неравенствах (4.7) будут величины порядка $(\ln n)/n^{r+\alpha}$.

В задаче о нагружении сосредоточенными силами, равномерно расположенными на окружности, функции $f_R(\xi)$ и $f_I(\xi)$ в точках расположения сил имеют разрывы первого рода. В этих точках помещались расчетные точки ξ_j и в них брались средние арифметические односторонних пределов для $f_R(\xi)$ и $f_I(\xi)$. Далее остальные точки ξ_j разбивали окружность на равные части, а точки η_i , $i = 1, \dots, n$ брались в серединах этих частей.

Если задача имеет оси симметрии, то систему интегральных уравнений (4.1) можно преобразовать в систему СИУ первого рода на отрезке; при этом часть или все интегральные условия на ω оказываются удовлетворены. При численном решении системы СИУ на отрезке необходимо соблюдать следующее правило размещения расчетных точек ξ_j и дискретных особенностей η_i на отрезке интегрирования, которое в случае одного СИУ первого рода на отрезке было на основе эвристических соображений и численных расчетов получено в [4] и математически обосновано в [9]. Ближайшей к концу отрезка, на котором решение неограничено, будет дискретная особенность, а ближайшей к концу отрезка, на котором решение ограничено, будет расчетная точка. В случае системы (2.4) относительно функций ω_R и ω_I это правило надо применять в каждом уравнении по отношению к той искомой функции, относительно которой это уравнение сингулярно.

Таким образом, в общем случае для ω_R и ω_I надо брать свои множества точек η_{Ri} и η_{Ii} . Примеры численного решения системы (4.2) при различных нагрузках даны на фиг. 1, 2.

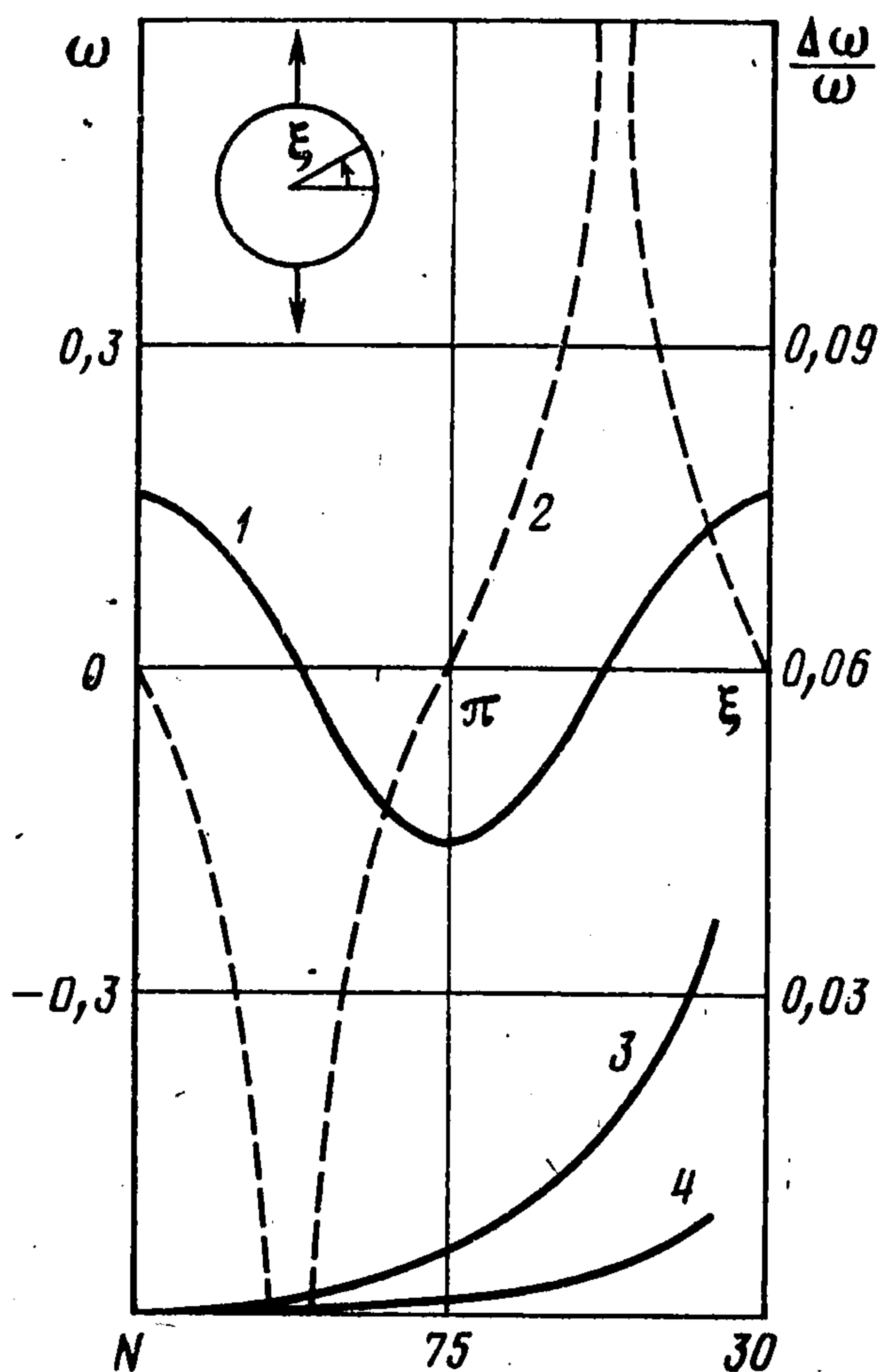
Во всех случаях получен устойчивый счет и хорошая сходимость при увеличении порядка системы, исследованного в интервале от 30 до 110. Это подтверждается также сравнением с точными решениями.

5. В качестве примера было рассмотрено непрерывное нагружение, при котором в системе (4.1) правые части — тригонометрические функции $f_R = \sin \xi$, $f_I = \cos \xi$ (задача 1). В этом случае функции $\omega_R = \sin \eta$, $\omega_I = \cos \eta$ — точные решения системы

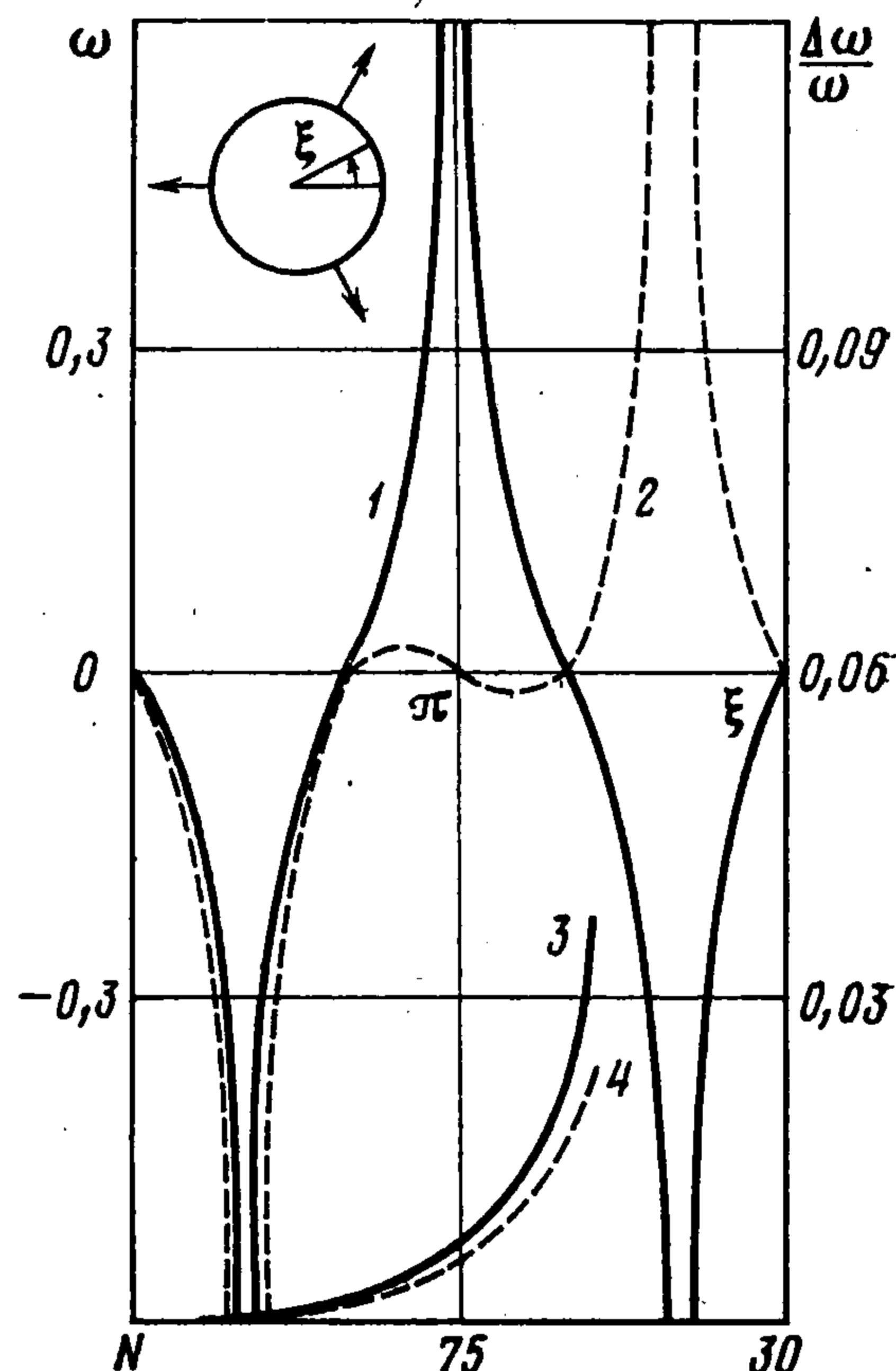
(4.1). С их значениями сопоставлялись результаты, полученные для этой задачи методом дискретных особенностей. Решение системы (4.2) для всех $n \geq 3$ (при $n_{\max} = 54$) при общем порядке N системы (4.2), равном $2n + 3$, дало следующие результаты: значения ω_{nR} , ω_{nI} в точках их определения совпадают с аналитическим решением; регуляризующие факторы β_1 , β_2 , β_3 равны нулю.

Таким образом, для системы (4.1) с рассмотренной непрерывной правой частью численный эксперимент показал абсолютную сходимость метода дискретных особенностей.

Далее было рассмотрено нагружение круга двумя сосредоточенными силами, приложенными в диаметрально противоположных точках (задача 2, фиг. 1). Эта задача ре-



Фиг. 1



Фиг. 2

шена методом дискретных особенностей как с введением трех регуляризующих факторов (система (4.2)), так и с отбрасыванием одной расчетной точки вдали от точек разрыва правой части системы, что позволяет в этом случае вводить всего один регуляризующий фактор. Оба решения практически совпадают и обладают хорошей сходимостью по $N = 2n + 3$. Результаты счета с введением трех регуляризующих факторов приведены на фиг. 1, где кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют функциям ω_R , ω_I , $\Delta\omega_I/\omega_I$, $\Delta\omega_R/\omega_R$, причем $\Delta\omega_R$, $\Delta\omega_I$ — соответственно разности значений функций ω_{nR} , ω_{nI} , вычисленные для n_{\max} и текущего n .

Решение задачи 2 четно для функции $\omega_R(\eta)$ и нечетно для функции $\omega_I(\eta)$. С учетом этого (4.1) приводим к системе СИУ на отрезке $[0, \pi]$,

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sin \xi \left\{ \omega_R(\eta) [(\cos \eta - \cos \xi)^{-1} + \cos \eta] d\eta + \int \omega_I(\eta) \sin \eta d\eta \right\} &= -\pi f_I(\xi) \\ \cos \xi \int \omega_R(\eta) \cos \eta d\eta + \int \omega_I(\eta) [(\cos \eta - \cos \xi)^{-1} - \cos \xi] \sin \eta d\eta &= \pi f_R(\xi) \\ \int \omega_R(\eta) d\eta &= 0 \end{aligned}$$

где из трех интегральных условий в (4.1) два последних теперь тождественно удовлетворены. Применение метода дискретных особенностей для системы (5.1) требует выполнения приведенного выше правила размещения на отрезке расчетных точек и дискретных особенностей.

Сопоставление решений систем (5.1) и (4.2) для задачи 2 показывает хорошее совпадение функций ω_{nR} и ω_{nI} при соответствующих n , а также их быструю сходимость по n .

Задача 2 может быть сведена к системе СИУ на отрезке $[0, \pi/2]$, если использовать свойство симметрии ω_I и обратной симметрии ω_R относительно вертикальной оси.

С учетом этих свойств систему (5.1) приводим к системе СИУ на отрезке $[0, \pi/2]$ для задач на круге с двумя перпендикулярными осями симметрии

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \sin \xi \left\{ \int \omega_R(\eta) \cos \eta [(\cos^2 \eta - \cos^2 \xi)^{-1} + 1] d\eta + \right. \\ & \left. + \int \omega_I(\eta) \sin \eta d\eta \right\} = -\frac{\pi}{2} f_I(\xi) \\ & \cos \xi \left\{ \int \omega_R(\eta) \cos \eta d\eta - \int \omega_I(\eta) \sin \eta [(\cos^2 \eta - \cos^2 \xi)^{-1} + 1] d\eta \right\} = \frac{\pi}{2} f_R(\xi) \end{aligned}$$

В систему (5.2) не входят] дополнительные интегральные условия, так как теперь все они с учетом двух осей симметрии задачи оказались тождественно выполненными.

Рассмотрено нагружение круга тремя радиальными равными сосредоточенными силами, приложенными на равном расстоянии одна от другой задача 3, фиг. 2. Решение системы (4.2) для этого случая получено методом дискретных особенностей, причем правая часть системы определялась с учетом условия (3.9). Результаты решения и сходимость по N показаны на фиг. 2, где обозначения кривых те же, что и на фиг. 1. При очевидном выборе начала отсчета координаты ξ эта задача имеет горизонтальную ось симметрии, относительно которой функция ω_R — четная, а ω_I — нечетная. Это позволяет свести задачу 3 к системе (5.1).

6. Если на круге рассматривается первая основная задача, т. е. заданы на границе перемещения, то вместо системы (4.1) надо рассматривать другую систему, так как функция (3.6) не является собственной функцией однородного уравнения (3.1) при $\kappa_k = \pm 1$ (интегрирование в пределах от 0 до 2π)

$$(6.1) \quad \begin{aligned} & \int \omega_R(\eta) \left[\kappa_1 \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} + \sin(\eta + \xi) \right] d\eta - \\ & - \int \omega_I(\eta) \cos(\eta + \xi) d\eta = -2\pi f_{1I}(\xi) \\ & - \int \omega_R(\eta) \cos(\eta + \xi) d\eta + \\ & + \int \omega_I(\eta) \left[\kappa_1 \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} - \sin(\eta + \xi) \right] d\eta = 2\pi f_{1R}(\xi) \\ & \int \omega_R(\eta) d\eta = 0, \quad \int \omega_I(\eta) d\eta = 0 \end{aligned}$$

при условии (3.9) на правые части. Эта система имеет единственное решение для любых $\kappa_1 \neq \pm 1$. Точки η_i и ξ_j надо выбирать так же, как и выше, что приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений (суммирование по i от 1 до n):

$$(6.2) \quad \begin{aligned} & \sum \omega_R(\eta_i) \left[\kappa_1 \operatorname{ctg} \frac{\eta_i - \xi_j}{2} + \sin(\eta_i + \xi_j) \right] \frac{2\pi}{n} - \\ & - \sum \omega_I(\eta_i) \cos(\eta_i + \xi_j) \frac{2\pi}{n} + \beta_1 = -2\pi f_{1I}(\xi_j) \\ & - \sum \omega_R(\eta_i) \cos(\eta_i + \xi_j) \frac{2\pi}{n} + \\ & + \sum \omega_I(\eta_i) \left[\kappa_1 \operatorname{ctg} \frac{\eta_i + \xi_j}{2} - \sin(\eta_j + \xi_j) \right] \frac{2\pi}{n} + \beta_2 = 2\pi f_{1R}(\xi_j) \\ & \sum \omega_R(\eta_i) \frac{2\pi}{n} = 0, \quad \sum \omega_I(\eta_i) \frac{2\pi}{n} = 0 \end{aligned}$$

Относительно регуляризирующих факторов β_1 и β_2 , сходимости решения системы (6.2) к решению системы (6.1), а также устойчивости решения системы (6.2) верны утверждения, аналогичные сделанным в п. 5 для второй основной задачи.

Аналогично решаются задачи для любых односвязных областей, у которых контур — гладкая замкнутая кривая, параметрическое уравнение которой удовлетворяет условиям, описанным в п. 2. Для решения надо только знать параметрическое задание контура области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
2. *Партон В. Э., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
3. Вычислительные методы в электродинамике. М.: Мир, 1977. 485 с.
4. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965. 242 с.
5. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи в теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. *Шерман Д. И.* Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двусвязных областей. — Докл. АН СССР, 1947, т. 55, № 8, с. 701—704.
7. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
8. *Лифанов И. К.* О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. — Докл. АН СССР, 1980, т. 255, № 5, с. 1046—1050.
9. *Лифанов И. К.* О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши. — Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2, с. 265—268.

Москва

Поступила в редакцию
14.I.1983