

УДК 532.72

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КОНВЕКТИВНЫЙ МАССОПЕРЕНОС ВНУТРИ КАПЛИ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Головин А. М., Животягин А. Ф.

Исследуется нестационарная диффузия внутри движущейся капли вещества, растворенного в потоке вязкой жидкости, при больших числах Пекле. Диффундирующее вещество в объеме капли может участвовать в химической реакции первого порядка. Рассматривается случай, когда концентрация растворенного вещества в жидкости, окружающей каплю, однородна, а его перенос внутри капли зависит от распределения поля скоростей и концентрации только в этой области (внутренняя задача). Течение в капле считается стационарным и соответствующим сферическому вихрю Хилла (при малом числе Рейнольдса).

Ранее внутренняя задача исследовалась в предположении о постоянстве концентрации вдоль линии тока [1, 2], заведомо непригодном [3] в области диффузионного пограничного слоя, который реализуется в отсутствие химической реакции на временах существенно меньших a^2/D , где a — радиус капли, D — коэффициент диффузии. Для описания диффузии внутри капли рассматривалось [4] уравнение для концентрации, осредненное по поверхности тока. При условии, что отличие концентрации от ее осредненного значения пренебрежимо мало (величина порядка $1/Pe$, где Pe — число Пекле) исследование распределения концентрации в капле становится аналогичным рассмотренному ранее [1]. Расчет распределения концентрации в капле методом диффузионного пограничного слоя [3], как указано в [4], на временах порядка $(a/U) \ln Pe$ требует учета влияния переноса растворенного вещества вдоль оси симметрии капли.

Ниже методом сращиваемых асимптотических разложений внутри капли выделяются несколько областей, определяется распределение концентрации во всех областях, а также поток диффундирующего вещества через поверхность капли и локальные диффузионные потоки в окрестности передней и задней критических точек. Объясняется немонотонный характер убывания модифицированного потока со временем.

1. Пусть капля радиуса a обтекается стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U вдали от капли. В сферической системе координат с началом в центре капли (угол θ отсчитывается от направления натекающего потока) нестационарное распределение концентрации $c(r, \theta, t)$ диффундирующего вещества внутри капли при наличии объемной химической реакции первого порядка описывается следующим уравнением в безразмерных переменных (радиальная координата отнесена к радиусу капли, концентрация — к концентрации растворенного вещества на поверхности капли):

$$(1.1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) - kc$$

$$v_r = - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$\Psi = \frac{r^2}{2} (1 - r^2) \sin^2 \theta, \quad Pe = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{v_0 a}{D}, \quad v_0 = \frac{\mu U}{2(\mu + \mu')}$$

Здесь D — коэффициент диффузии, μ и μ' — динамические вязкости жидкостей вне и внутри капли, k — безразмерная константа скорости химической реакции.

В начальный момент времени диффундирующее вещество внутри капли отсутствует, а на поверхности капли концентрация не зависит от времени, т. е.

$$(1.2) \quad c(r, \theta, 0) = 0, \quad r \neq 1$$

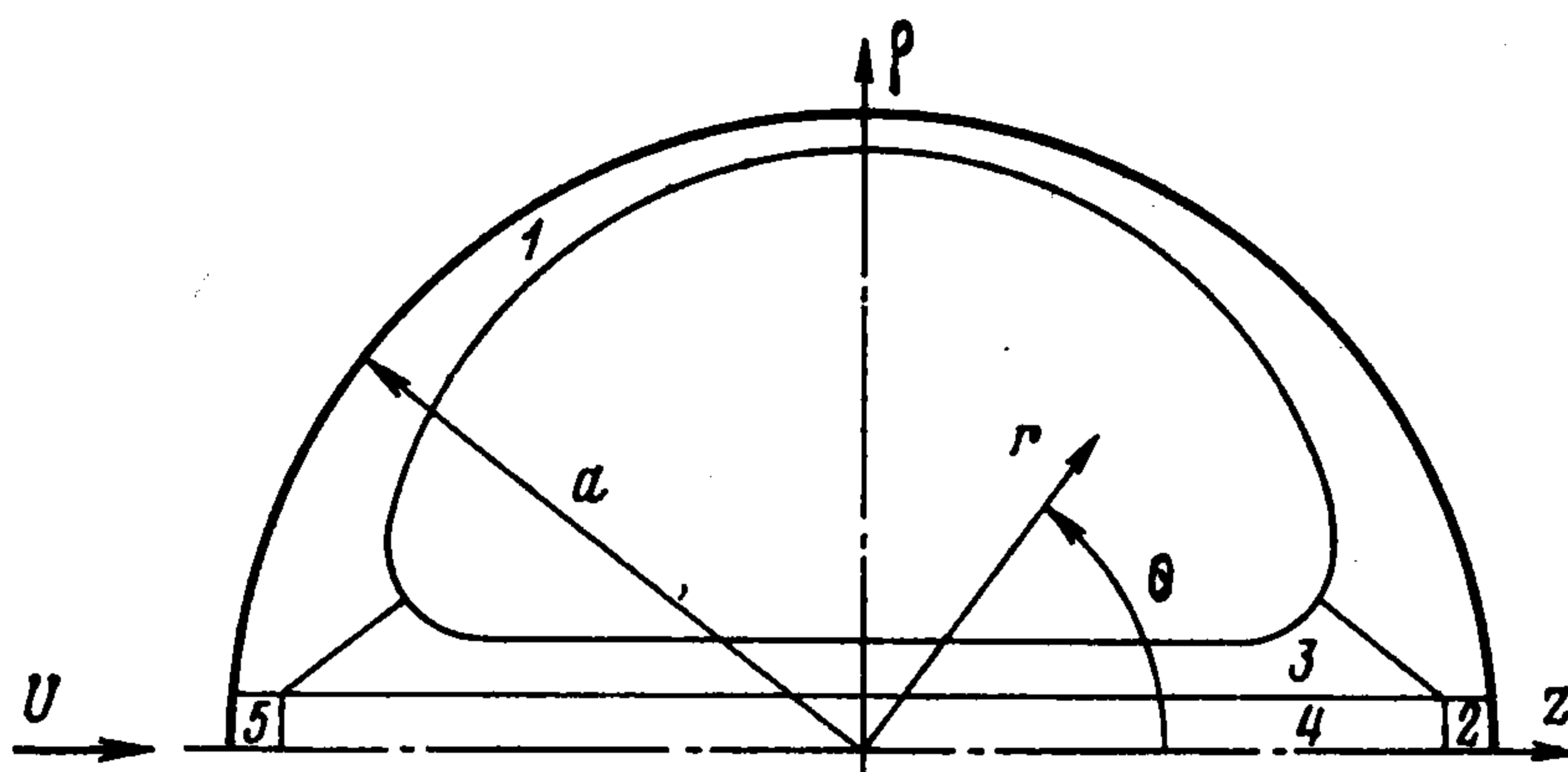
$$(1.3) \quad c(1, \theta, t) = 1, \quad t \neq 0$$

Для достаточно большой скорости химической реакции на всех временах и для любого значения k на малых временах растворенное вещество, диффундирующее в каплю, сосредоточено в тонком слое вблизи поверхности капли и ее оси. Наряду с большим числом Пекле это позволяет применить для решения задачи метод сращиваемых асимптотических разложений. Внутри капли выделим несколько областей, в каждой из которых уравнение (1.1) упрощается, и будем искать такие решения упрощенных уравнений, которые удовлетворяют начальному (1.2) и граничному (1.3) условиям и сращиваются на границах выделенных областей (время является параметром). Выделение областей осуществляется путем асимптотического анализа решения в области пограничного слоя и последующих выделенных областях (см., например, [5]).

2. В области диффузионного пограничного слоя (на фиг. 1 область 1) уравнение (1.1) в переменных $y = (1 - r)/\epsilon$ и $v = \cos \theta$ с учетом членов только нулевого порядка по ϵ запишем в виде

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} - 2yv \frac{\partial c_1}{\partial y} - (1 - v^2) \frac{\partial c_1}{\partial v} = kc_1 + \frac{\partial c_1}{\partial t}$$

Здесь и в дальнейшем нижний индекс в обозначениях соответствует номеру области на фиг. 1.



Фиг. 1

Замена независимых переменных y, v, t на ψ_1, ω_1, τ_1 , где

$$\psi_1 = y(1 - v^2), \quad \omega_1 = t - \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}$$

$$\tau_1 = \frac{2-v}{3} (1+v)^2 - \frac{2-\kappa}{3} (1+\kappa)^2$$

$$\kappa(\omega_1) = -\text{th } \omega_1$$

и замена функции $c_1(\psi_1, \tau_1, \omega_1)$ на

$$(2.2) \quad C_1(\psi_1, \tau_1, \omega_1) = \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{k/2} c_1(\psi_1, \tau_1, \omega_1)$$

приводит уравнение (2.1) к уравнению типа теплопроводности

$$(2.3) \quad \frac{\partial C_1}{\partial \tau_1} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial \psi_1^2}$$

Аналогичная замена переменных для уравнения нестационарной конвективной диффузии без химической реакции была предложена в работах [6—8], а замена (2.2) рассматривалась в работе [3].

Граничные условия для уравнения (2.3) с учетом указанных преобразований и граничного условия (1.3) запишем в виде

$$C_1(0, \tau_1, \omega_1) = \left(\frac{1 + v(\tau_1, \omega_1)}{1 - v(\tau_1, \omega_1)} \right)^{k/2}, \quad \tau_1 \neq 0$$

$$C_1(\infty, \tau_1, \omega_1) = 0$$

Аналогом начального условия для уравнения (2.3) является

$$C_1(\psi_1, 0, \omega_1) = f(\psi_1, \omega_1), \quad \psi_1 \neq 0$$

Эта функция будет определена после построения решения во всех областях из условия сращивания. Отметим, что сделанные преобразования независимых переменных и соотношение $f(\psi_1, \omega_1) = 0$ при $t = 0$ обеспечивают выполнение начального условия (1.2).

Таким образом, распределение концентрации в пограничном слое вблизи поверхности капли описывается выражением

$$(2.4) \quad c_1(\psi_1, \tau_1, \omega_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1 - v(\tau_1, \omega_1)}{1 + v(\tau_1, \omega_1)} \right)^{k/2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \int_0^\infty f(\xi, \omega_1) E(\xi, \psi_1, \tau_1) d\xi + \right.$$

$$\left. + \psi_1 \int_0^{\tau_1} \left(\frac{1 + v(\eta, \omega_1)}{1 - v(\eta, \omega_1)} \right)^{k/2} \exp\left(-\frac{\psi_1^2}{4(\tau_1 - \eta)}\right) \frac{d\eta}{(\tau_1 - \eta)^{3/2}} \right]$$

$$E(\xi, \psi_1, \tau_1) = \exp\left(-\frac{(\psi_1 - \xi)^2}{4\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{(\psi_1 + \xi)^2}{4\tau_1}\right)$$

Во втором интеграле решения (2.4) сделаем замену переменной интегрирования $x = \frac{1}{2}\psi_1(\tau_1 - \eta)^{-1/2}$. В результате получаем следующее выражение для концентрации:

$$(2.5) \quad c_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1 - v}{1 + v} \right)^{k/2} \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \int_0^\infty f(\xi, \omega_1) E(\xi, \psi_1, \tau_1) d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty \left(\frac{1 - v}{1 + v} \frac{1 + \zeta(x)}{1 - \zeta(x)} \right)^{k/2} \exp(-x^2) dx, \quad u = \frac{1}{2}\psi_1/\sqrt{\tau_1}$$

где функция $\zeta(x)$ определяется из выражения

$$\tau_1 - \frac{\psi_1^2}{4x^2} = \frac{2 - \zeta(x)}{3} (1 + \zeta(x))^2 - \frac{2 - \kappa(\omega_1)}{3} (1 + \kappa(\omega_1))^2$$

Для выяснения распределения концентрации в окрестности задней критической точки (область 2) необходимо получить асимптотику решения (2.5) при $v \rightarrow 1$ и при фиксированном значении y . Первое слагаемое выражения (2.5) — малая величина при $v \rightarrow 1$, и основной вклад в предельное значение вносит второе слагаемое. В окрестности точки $v = 1$ справедливы следующие приближения:

$$\tau_1 = (1 - v)^2 (e^{4t} - 1), \quad 1 - \zeta(x) = (1 - v) \sqrt{1 + (y/x)^2}$$

Следовательно

$$(2.6) \quad \lim_{v \rightarrow 1} c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_p^\infty \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)^{-k/4} \exp(-x^2) dx, \quad p = y(e^{4t} - 1)^{-1/2}$$

В области задней критической точки переменные y и $\varphi = \theta/\varepsilon$ имеют порядок единицы. Предположим, что производные от концентрации в этой области по y и φ также порядка единицы. Тогда уравнение (1.1) после линеаризации коэффициентов несколько упрощается

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial \varphi^2} - 2y \frac{\partial c_2}{\partial y} + \left(\varphi + \frac{1}{\varphi} \right) \frac{\partial c_2}{\partial \varphi} = kc_2 + \frac{\partial c_2}{\partial t}$$

Для данного уравнения имеем начальное условие $c_2 = 0$ при $t = 0$ и граничное условие $c_2 = 1$ при $y = 0$. Необходимо также, чтобы решение этого уравнения срачивалось при $\varphi \rightarrow \infty$ с асимптотикой (2.6). Если ограничиться отысканием решения уравнения (2.7), не зависящего от φ , то можно убедиться, что выражение (2.6) является решением данной задачи, т. е.

$$(2.8) \quad c_2(y, \varphi, t) = \lim_{\nu \rightarrow 1} c_1$$

В цилиндрической системе координат $z, \eta = \varepsilon^{-1/2} r \sin \theta$ с осью z , направленной по полярной оси, уравнение конвективной диффузии для распределения концентрации в области конвективного переноса (область 3) имеет вид

$$(1 - z^2) \frac{\partial c_3}{\partial z} + \eta z \frac{\partial c_3}{\partial \eta} = kc_3 + \frac{\partial c_3}{\partial t}$$

Для данного уравнения имеем начальное условие $c_3 = 0$ при $t = 0$. Общее решение этого уравнения записываем следующим образом:

$$(2.9) \quad c_3 = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{k/2} F(\psi_3, \omega_3) \\ \psi_3 = \frac{\eta^2}{2} (1 - z^2), \quad \omega_3 = t - \frac{1}{2} \ln \frac{1-z}{1+z}$$

Условие срачивания на границе областей 1 и 3 позволяет определить функцию $F(\psi_3, \omega_3)$. Для ограниченных значений k решение (2.5) при $\nu \rightarrow 1$ и $\psi_1 \neq 0$ имеет асимптотику

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} c_1 = \left(\frac{\varepsilon \psi_1}{4(1-r)} \right)^{k/2} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_1^0}} \int_0^\infty f(\xi, \omega_1) E(\xi, \psi_1, \tau_1^0) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u^0}^\infty \left(\frac{1+\zeta(x)}{1-\zeta(x)} \right)^{k/2} \exp(-x^2) dx \right] \\ u^0 = \frac{\psi_1}{2\sqrt{\tau_1^0}}, \quad \tau_1^0 = \frac{4}{3} - \frac{2 - \kappa(\omega_1)}{3} (1 + \kappa(\omega_1))^2 \\ \frac{4}{3} - \frac{\psi_1^2}{4x^2} = \frac{2 - \zeta(x)}{3} (1 + \zeta(x))^2$$

Учитывая, что в области срачивания $\psi_3 = \psi_1$ и $\omega_3 = \omega_1 - 1/2 \ln(\varepsilon\psi_3/8)$ для функции $F(\psi_3, \omega_3)$ получаем следующее выражение:

$$(2.10) \quad F(\psi_3, \omega_3) = \left(\frac{\varepsilon\psi_3}{8} \right)^{k/2} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_3(\omega_3^0)}} \int_0^\infty f(\xi, \omega_3^0) E(\xi, \psi_3, \omega_3^0) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u_3}^\infty \left(\frac{1+\zeta(x)}{1-\zeta(x)} \right)^{k/2} \exp(-x^2) dx \right], \quad u_3 = \frac{\psi_3}{2\sqrt{\tau_3(\omega_3^0)}} \\ \omega_3^0 = \omega_3 + 1/2 \ln(\varepsilon\psi_3/8), \quad \tau_3(\omega_3^0) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} (2 - \\ - \kappa(\omega_3^0)) (1 + \kappa(\omega_3^0))^2, \quad \frac{4}{3} - \frac{1}{4} (\psi_3/x)^2 = \frac{1}{3} (2 - \zeta) (1 + \zeta)^2$$

Вблизи оси симметрии капли (область 4) введем новые переменные z и $\rho = \varepsilon^{-1} r \sin \theta = \varepsilon^{-1/2} \eta$. Предполагая, что в этой области производные от концентрации по введенным переменным имеют порядок единицы, с учетом ведущих членов получаем следующее уравнение:

$$(2.11) \quad (1 - z^2) \frac{\partial c_4}{\partial z} + \rho z \frac{\partial c_4}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 c_4}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c_4}{\partial \rho} = k c_4 + \frac{\partial c_4}{\partial t}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять двум условиям срачивания

$$(2.12) \quad \lim_{z \rightarrow 1} c_4 = \lim_{y \rightarrow \infty} c_2, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} c_4 = \lim_{\psi_4 \rightarrow 0} c_3$$

и начальному условию $c_4 = 0$ при $t = 0$. Асимптотика решения (2.8) имеет вид

$$\lim_{y \rightarrow \infty} c_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} y^{-k/2} \int_p^\infty \xi^{k/2} \exp(-\xi^2) d\xi$$

Для концентрации в области 3 при $\psi_3 \rightarrow 0$, принимая во внимание, что

$$\tau_3(\omega_3^0) = \frac{\varepsilon^2 \psi_3^2}{16} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 e^{4t}, \quad 1 - \zeta(x) = \frac{\psi_3}{2x}$$

получим

$$(2.13) \quad \lim_{\psi_3 \rightarrow 0} c_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{k/2} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{k/2} \int_{p_3}^\infty x^{k/2} \exp(-x^2) dx,$$

$$p_3 = \frac{2}{\varepsilon} \frac{1-z}{1+z} e^{-2t}$$

Можно убедиться, что выражение для концентрации (2.13)

$$c_4(z, t) = \lim_{\psi_3 \rightarrow 0} c_3(z, \psi_3, \omega_3)$$

является решением уравнения (2.11) и удовлетворяет условиям срачивания (2.12) и начальному условию, если в соответствии с принятой точностью асимптотического разложения пренебречь членами, имеющими экспоненциально малый порядок.

Распределение концентрации в области конвективного переноса должно срачиваться с погранслойным решением

$$(2.14) \quad \lim_{v \rightarrow -1} c_1 = \lim_{z \rightarrow -1} c_3$$

Если учесть, что при $v \rightarrow -1$ и $z \rightarrow -1$ справедливо соотношение $\omega_3 = \omega_1 + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon \psi_1 / 8)$, то получаем следующие предельные значения концентрации в областях 1 и 3:

$$\lim_{v \rightarrow -1} c_1 = \left(\frac{4(1-r)}{\varepsilon \psi_1} \right)^{k/2} f(\psi_1, \omega_1), \quad \psi_1 \neq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} c_3 = \left(\frac{\varepsilon \psi_3 (1-r)}{16} \right)^{k/2} \left[\frac{1}{2 \sqrt{\pi \tau_3(\omega_1^0)}} \int_0^\infty f(\xi, \omega_1^0) E(\xi, \psi_3, \tau_3(\omega_1^0)) d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u_3^0}^\infty \left(\frac{1+\zeta(x)}{1-\zeta(x)} \right)^{k/2} \exp(-x^2) dx \right]$$

$$u_3^0 = \frac{1}{2} \frac{\psi_3}{\sqrt{\tau_3(\omega_1^0)}}, \quad \omega_1^0 = \omega_1 + \ln \frac{\varepsilon \psi_1}{8}$$

Из условия срачивания (2.14) получаем интегральное уравнение для

Определения функции $f(\psi_1, \omega_1)$

$$(2.15) \quad f(\psi_1, \omega_1) = \left(\frac{\varepsilon\psi_1}{8}\right)^k \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_3(\omega_1^0)}} \int_0^\infty f(\xi, \omega_1^0) E(\xi, \psi_1, \tau_3(\omega_1^0)) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1^0}^\infty \left(\frac{1+\zeta(x)}{1-\zeta(x)}\right)^{k/2} \exp(-x^2) dx \right], \quad u_1^0 = \frac{\psi_1}{2\sqrt{\tau_3(\omega_1^0)}}$$

При ограниченных значениях $k > 1/2$ или для любых k при $t \ll \ln(8/\varepsilon)$ с точностью до членов порядка ε решением уравнения (2.15) служит первая итерация

$$(2.16) \quad f(\psi_1, \omega_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\varepsilon\psi_1}{8}\right)^k \int_{u_1^0}^\infty \left(\frac{1+\zeta(x)}{1-\zeta(x)}\right)^{k/2} \exp(-x^2) dx$$

Уравнение (2.15) допускает получение асимптотики функции $f(\psi_1, \omega_1)$ при $\psi_1 \rightarrow 0$ и ограниченных значениях k . В этом случае решение определяется вторым слагаемым в правой части уравнения (2.15), в котором

$$\tau_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon\psi_1}{4}\right)^4 \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^2 e^{4t}, \quad 1 - \zeta(x) = \frac{\psi_1}{2x}$$

Окончательный вид асимптотики функции $f(\psi_1, \omega_1)$ при $\psi_1 \rightarrow 0$

$$f(\psi_1, \omega_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^k \psi_1^{k/2} \int_{u_1^0}^\infty x^{k/2} \exp(-x^2) dx, \quad u_1^0 = 1/4 \psi_1 \exp(-2\omega_1^0)$$

позволяет найти необходимый для определения концентрации в передней критической точке предел решения (2.5) при $\nu \rightarrow -1$ и фиксированном значении y . Заметим, что в этом случае

$$\kappa = -1 + (1+\nu)e^{-2t}, \quad \tau_1 = (1+\nu)^2 (1 - e^{-4t}) \\ 1 + \zeta(x) = (1+\nu) \sqrt{1 - (y/x)^2}$$

После некоторых преобразований получим

$$(2.17) \quad \lim_{\nu \rightarrow -1} c_1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k (1 - e^{-4t})^{-1/2} \exp\left(-\frac{y^2}{1 - e^{-4t}}\right) \int_0^\infty d\lambda \times \\ \times \exp\left(-\frac{\lambda^2}{1 - e^{-4t}}\right) \lambda^{k/2} \operatorname{sh} \frac{2y\lambda}{1 - e^{-4t}} \int_{u_1}^\infty dx x^{k/2} \exp(-x^2) + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{p_1}^\infty \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^{k/4} \exp(-x^2) dx, \quad u_1 = \frac{4e^{-2t}}{\varepsilon^2 \lambda}, \quad p_1 = \frac{y}{\sqrt{1 - e^{-4t}}}$$

Предположим, что в передней критической точке (область 5) производные от концентрации по переменным y и $\alpha = \varepsilon^{-1}(\pi - \theta)$ порядка единицы. Оставляя в уравнении (1.1) ведущие члены, получим

$$(2.18) \quad \frac{\partial^2 c_5}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_5}{\partial \alpha^2} + 2y \frac{\partial c_5}{\partial y} + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) \frac{\partial c_5}{\partial \alpha} = kc_5 + \frac{\partial c_5}{\partial t}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять начальному $c_5 = 0$ при $t = 0$ и граничному условиям $c_5 = 1$ при $y = 0$, а также двум условиям срачивания

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} c_5 = \lim_{\nu \rightarrow -1} c_1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} c_5 = \lim_{z \rightarrow -1} c_4$$

Непосредственной подстановкой можно показать, что выражение (2.17) — решение уравнения (2.18), удовлетворяющее приведенным выше условиям.

К этому же результату можно прийти путем следующих рассуждений. Сделаем в уравнении (2.18) замену переменных

$$c_5 = e^{-kt} C_5, \quad \xi = ye^{2t}, \quad \tau = 1/4 (e^{4t} - 1)$$

Тогда оно преобразуется к виду

$$\frac{\partial C_5}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 C_5}{\partial \xi^2}$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$(2.19) \quad c_5 = \lim_{v \rightarrow -1} c_1$$

Если заметить, что при $y \rightarrow \infty$ основной вклад в предел первого слагаемого выражения (2.17) вносит окрестность точки $y = \lambda$, а второе слагаемое имеет более высокий порядок малости, то можно убедиться, что обеспечивается сращивание решений в областях 5 и 4. Тем самым установлено, что выражение (2.19) — решение уравнения (2.18), удовлетворяющее всем поставленным условиям.

Итак, в капле выделено пять областей, в каждой из которых получено распределение концентрации. Пределы этих выражений при $t \rightarrow \infty$ соответствуют стационарному распределению концентрации, приведенному в [9].

3. По распределению концентрации в области диффузионного пограничного слоя вычислим безразмерную плотность диффузионного потока через поверхность капли. После интегрирования по частям и замены во втором слагаемом выражения (2.4) переменной интегрирования для плотности потока получим следующее выражение:

$$j = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1-v^2}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-kt}}{\sqrt{\tau_1}} + k \int_0^t \frac{e^{-k\xi}}{\sqrt{\tau_1(v, \kappa(\xi, v))}} d\xi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\tau_1 \sqrt{\tau_1}} \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^{k/2} \int_0^\infty \xi f(\xi, \omega_1) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau_1}\right) d\xi \right]$$

$$\tau_1(v, \kappa(\xi, v)) = 1/3 (2-v)(1+v)^2 - 1/3 (2-\kappa)(1+\kappa)^2$$

$$\kappa(\xi, v) = (1+v - (1-v)e^{2\xi}) / (1+v + (1-v)e^{2\xi})$$

где функция $f(\xi, \omega_1)$ определяется из интегрального уравнения (2.15).

Для определения плотности диффузионного потока в окрестности задней и передней критической точки воспользуемся соответственно выражениями (2.8), (2.19). Получим

$$j_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial c_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{(2-k)t}}{\sqrt{1-e^{-4t}}} - (2-k) \int_0^t \frac{e^{(2-k)\tau}}{\sqrt{1-e^{-4\tau}}} d\tau \right]$$

$$j_5 = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial c_5}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-kt}}{\sqrt{1-e^{-4t}}} + k \int_0^t \frac{e^{-k\tau}}{\sqrt{1-e^{-4\tau}}} d\tau - \right. \\ \left. - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{(\varepsilon/2)^k}{(1-e^{-4t})^{3/2}} \int_0^\infty d\lambda \exp\left(-\frac{\lambda^2}{1-e^{-4t}}\right) \lambda^{1+k/2} \int_{u_1}^\infty x^{k/2} \exp(-x^2) dx \right]$$

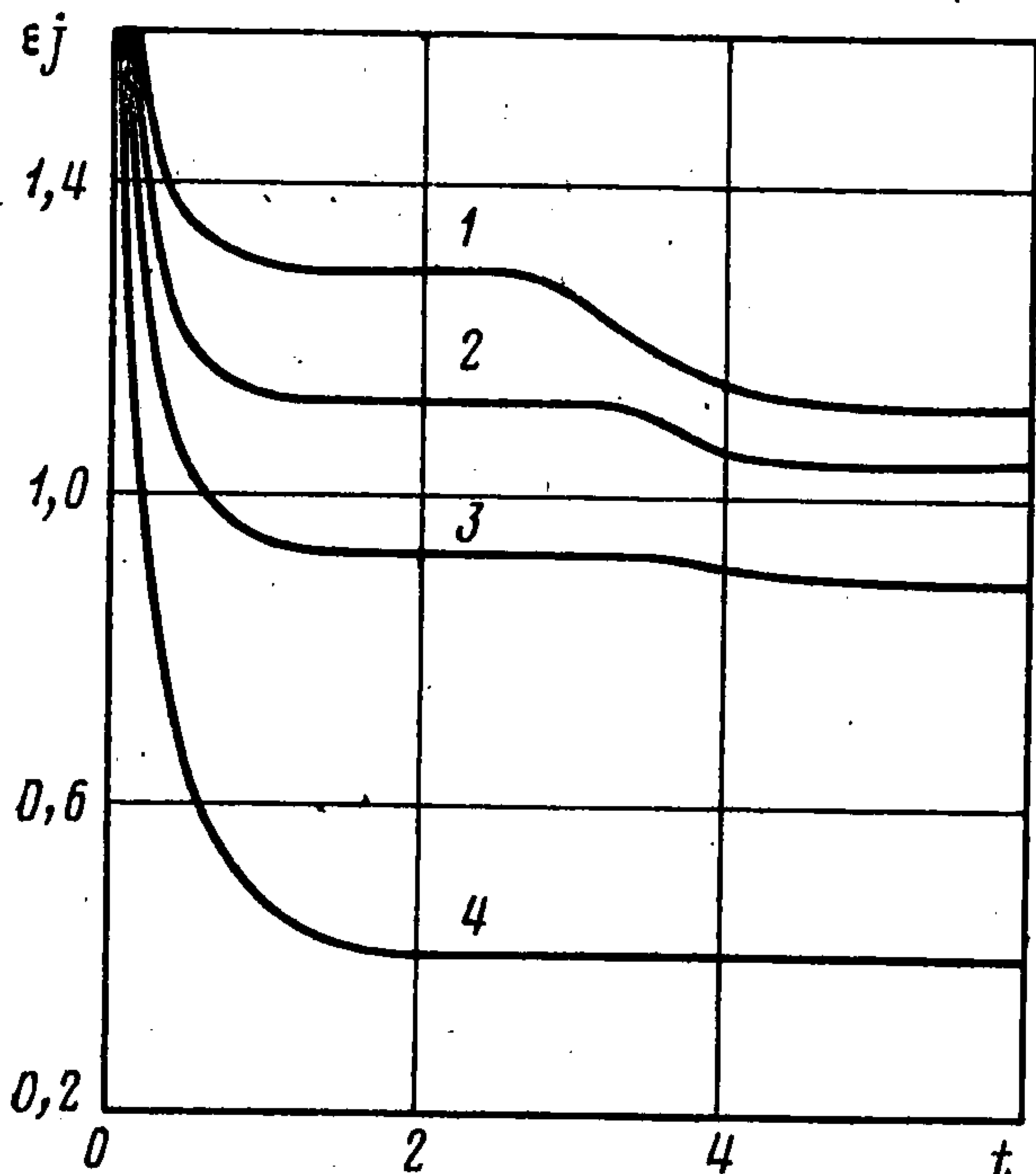
При вычислении полного безразмерного потока растворенного веще

ства через поверхность капли

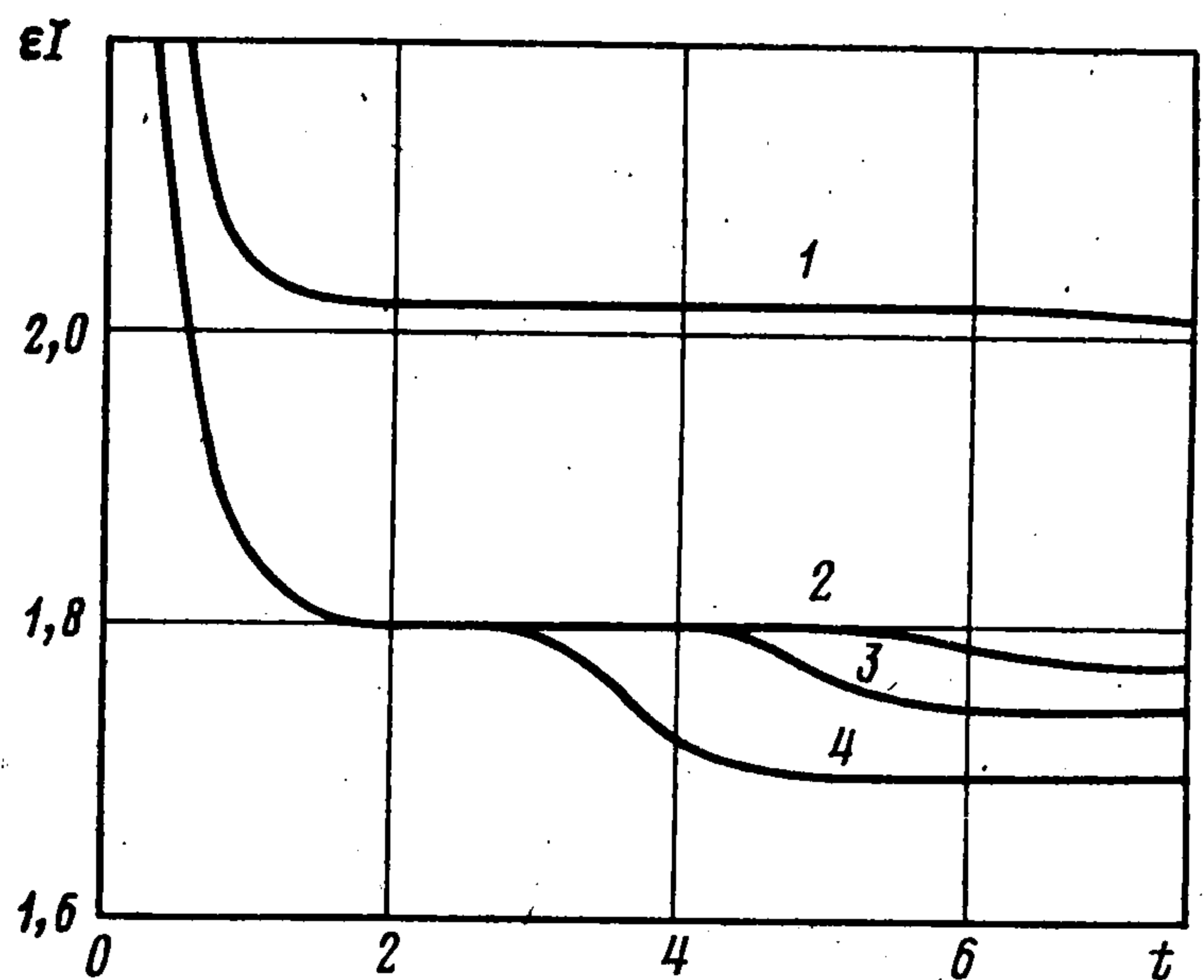
$$I = \int_{-1}^1 j dv$$

предварительно необходимо численно, например методом итерации, решить интегральное уравнение (2.15). Однако, как было отмечено ранее, при $k > 1/2$ или при любых значениях k , но $t \ll \ln(8/\varepsilon)$, можно с точностью до членов порядка ε ограничиться первой итерацией. Ниже для вычисления потоков использовалось выражение (2.16) для функции $f(\psi_1, \omega_1)$.

На фиг. 2 приведены зависимости локального потока от времени для различных точек поверхности капли. Расчет проводился для значений па-



Фиг. 2



Фиг. 3

раметров $Re = 100$ и $k = 0,5$. Кривая 1 соответствует потоку в передней критической точке, 2 — при $\theta = 2/3 \pi$, 3 — $\theta = 1/2 \pi$ и 4 — в задней критической точке. Видно, что за времена $t \approx 1$ локальный поток выходит на постоянное значение и только позже, при $t \approx 3$, происходит уменьшение потока из-за влияния переносимого вдоль оси капли растворенного вещества с последующим выходом на константу. Это влияние, достаточно сильное в передней критической точке, быстро уменьшается с ростом θ и уже при $\theta = \pi/2$ становится незначительным, а в задней критической точке полностью отсутствует.

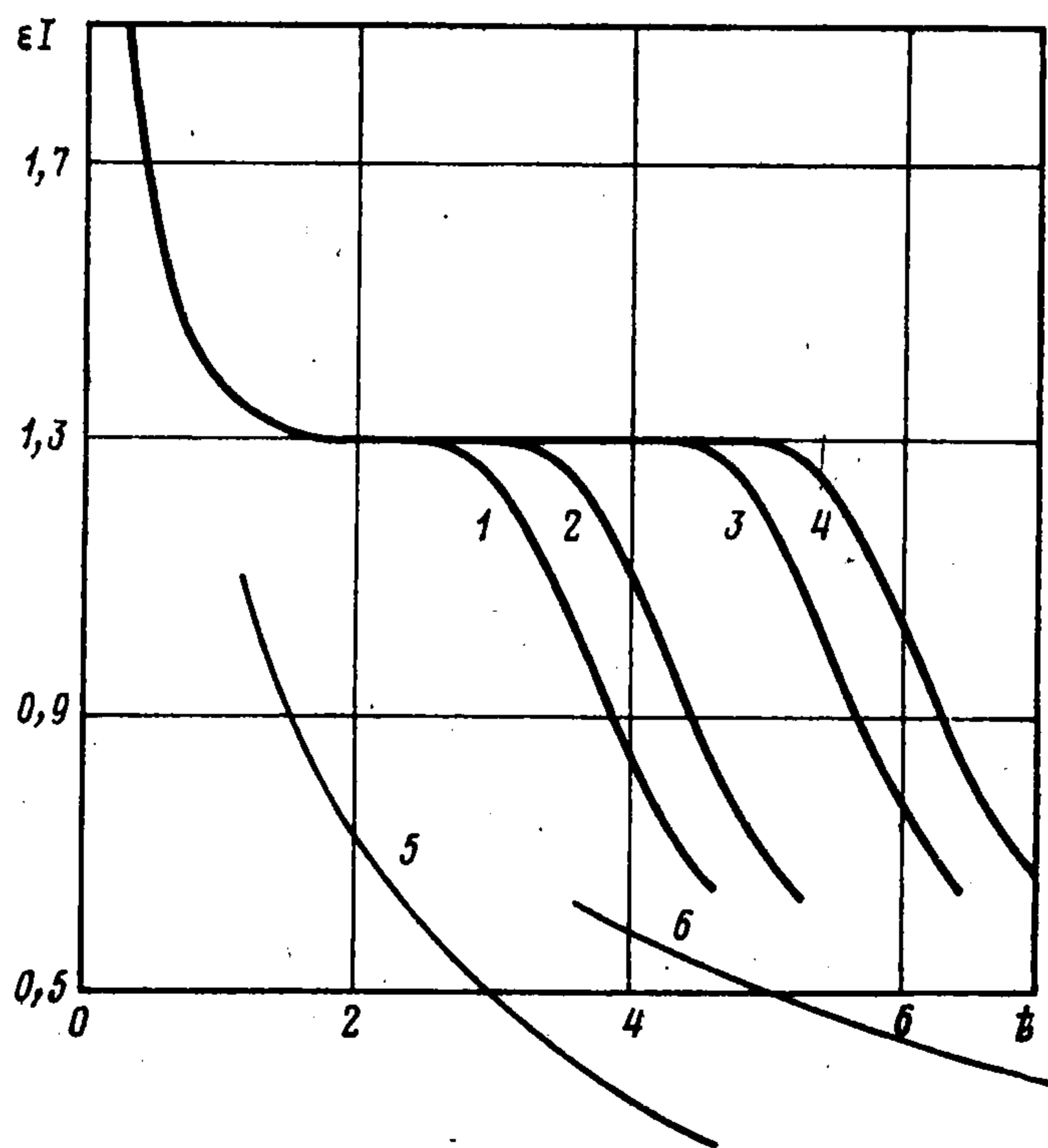
На фиг. 3 показана зависимость полного потока от времени для значений $Re = 10^4$ и $k = 0,75$ — кривая 1, $Re = 10^4$ и $k = 0,5$ — кривая 2, $Re = 10^3$ и $k = 0,5$ — кривая 3, $Re = 10^2$ и $k = 0,5$ — кривая 4. Видно, что с ростом Re и k влияние на поток переносимого вдоль оси вещества уменьшается.

В нестационарной задаче без химической реакции полученные результаты, показанные на фиг. 4, описывают только начало влияния переносимого вдоль оси вещества. Расчеты проводились для значений $Re = 80$ — кривая 1, $Re = 250$ — кривая 2, $Re = 3 \cdot 10^3$ — кривая 3 и $Re = 10^4$ — кривая 4. С ростом Re становится более продолжительной по времени «палочка» на графике потока, соответствующая стадии, когда поток вышел на стационарное значение, а влияние вещества, диффундирующего вдоль оси капли, на поток пренебрежимо мало.

Из полученных результатов следует, что в начале процесса переноса

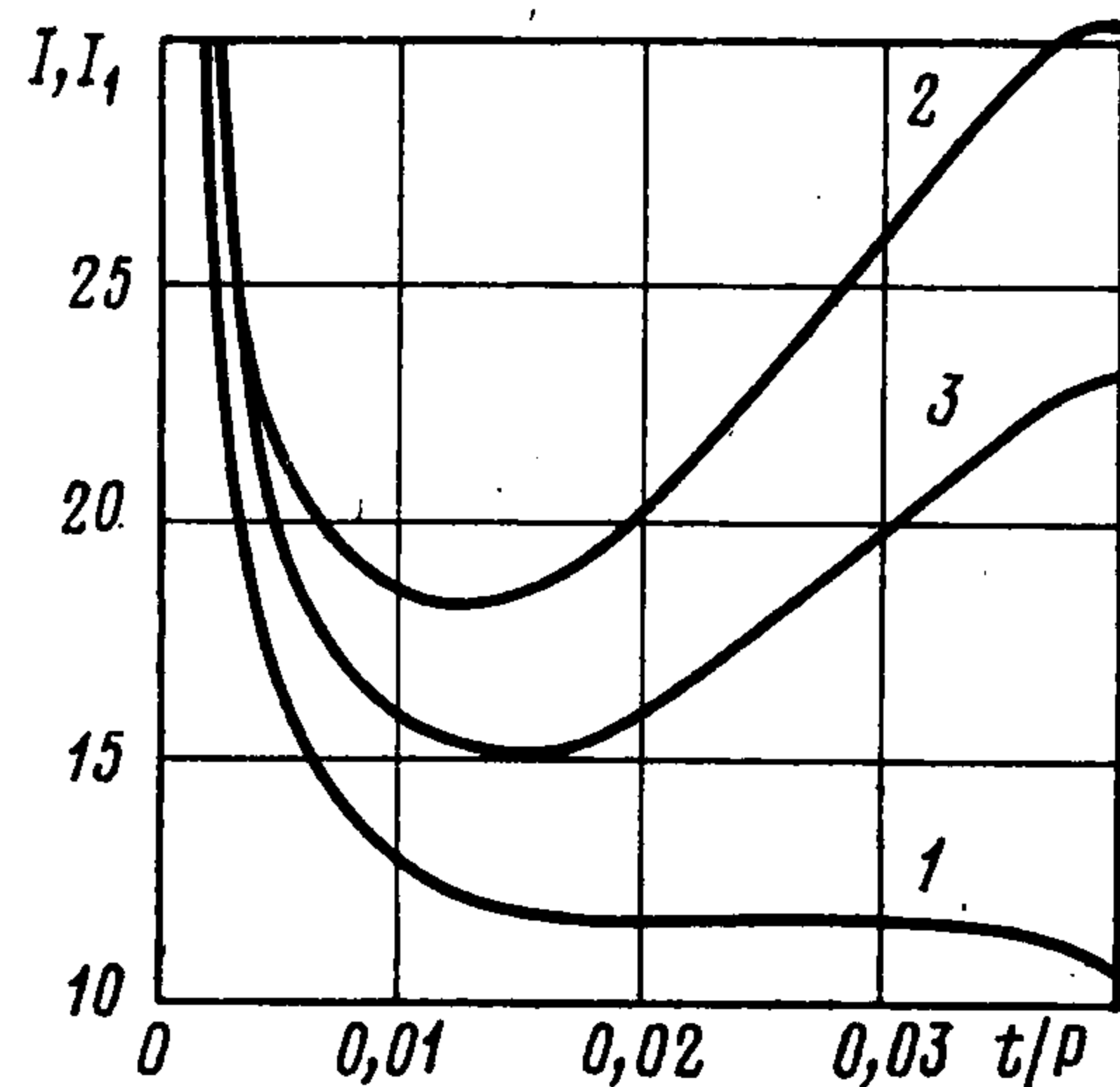
растворенного вещества через поверхность капли происходит молекулярная диффузия в направлении, перпендикулярном линиям тока, и конвективный перенос вдоль линии тока в области пограничного слоя. За времена $t \approx 1$ процесс массопередачи становится стационарным и остается таковым до времени $t \approx T = \ln(8\sqrt{Pe})$, когда возникает влияние на диффузионный поток вещества, переносимого вдоль оси симметрии капли.

В работе [3] процесс нестационарной диффузии исследовался методом диффузионного пограничного слоя без учета влияния переноса вещества вдоль оси. Поэтому результаты этой работы применимы для описания лишь начальной стадии процесса до значений времени $t \approx T$. Внутренняя нестационарная задача исследовалась также в [1], где предполагалось, что концентрация постоянна вдоль линии тока. На фиг. 4 приведены результаты этого расчета, представленные в [2], для $Pe=80$ — кривая 5 и $Pe=250$ — кривая 6. Уравнение Кронига — Бринка [1] непригодно для описания конвективной диффузии на малых временах $t \leq 1$. В отсутствие химической реакции при $Pe \gg 1$ на временах $t \gg T$ это уравнение приближенно описывает процесс массопередачи, однако вопрос о правильном выборе начального распределения для такого уравнения остается открытым. При $Pe \approx 100$ за времена порядка T средняя концентрация диффундирующего вещества



Фиг. 4

диффузии, однако вопрос о правильном выборе начального распределения для такого уравнения остается открытым. При $Pe \approx 100$ за времена порядка T средняя концентрация диффундирующего вещества



Фиг. 5

ва достигает значения $\bar{c} \approx 0,5$, что свидетельствует о непригодности метода Кронига — Бринка для описания значительной части процесса массопереноса.

В работах [10—12], где внутренняя нестационарная задача исследовалась конечно-разностными методами, были получены результаты, удовлетворительно согласующиеся между собой только при $Pe \leq 20$. Если $Pe > 100$, то результаты расчетов в разных работах заметно различаются. На фиг. 5 сравниваются результаты численного решения [10] внутренней нестационарной задачи и результаты данной работы при $Pe = 80$ и $k = 0$. Кривая 1 представляет зависимость полного потока от времени, полученную в данной работе. Кривая 2 описывает зависимость модифицированного потока $I_1 = \frac{2}{3} Pe d \ln \bar{c}/dt$ от времени. Кривая 3 соответствует значениям модифицированного потока, полученным в работе [10]. Отличие достигает 30% от величины потока, что, по-видимому, связано с необходимостью учета членов более высокого порядка в методе сращиваемых асимптотических разложений, а также с точностью использованных в [10] численных методов. Вопрос о использовании конечно-разностных методов для уравнений с большим параметром исследовался на модельном уравнении конвективной диффузии в работе [13], где указано, что для обеспечения удовлетворительной точности результатов возникают жесткие ограничения на шаг по пространственным переменным.

Внутренняя нестационарная задача с химической реакцией первого порядка рассматривалась в работе [2] с помощью подхода, развитого в [1]. Численное решение этой задачи [14] привело к результатам, значительно отличающимся от результатов работы [2] при больших значениях константы скорости химической реакции. Как видно из результатов данной работы, причина подобного расхождения связана с неправомерным предположением о постоянстве концентрации вдоль линии тока.

Обсуждался также немонотонный характер убывания модифицированного потока со временем. Так, в работе [2] эта особенность объяснялась погрешностью численных расчетов, и авторы в своих расчетах немонотонности не наблюдали. Из результатов данной работы следует, что немонотонность модифицированного потока (см. фиг. 5) связана с наличием полочки у полного] потока и объясняется тем, что в течение некоторого промежутка времени распределение концентрации в области] пограничного слоя квазистационарно.

Если константа скорости химической реакции удовлетворяет условию $k \sqrt{Re} \gg 1$, то, как следует из оценок, полученных ранее [9], при решении стационарной задачи, результаты данной работы будут пригодны для описания процесса массопереноса внутри капли на всех временах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kronig R., Brink J.* On the theory of extraction from falling droplets.— *Appl. Sci. Res., A*, 1951, v. 2, No. 2, p. 142—154.
2. *Danckwerts P. V.* Absorption by simultaneous diffusion and chemical reaction into particles of various shapes and into falling drops.— *Trans. Faraday Soc.*, 1951, v. 47, No. 9, p. 1014—1023.
3. *Левич В. Г., Крылов В. С., Воротилин В. П.* К теории нестационарной диффузии из движущейся капли.— *Докл. АН СССР*, 1956, т. 161, № 3, с. 648—652.
4. *Brignell A. S.* Solute extraction from an internally circulating spherical liquid drop.— *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1975, v. 18, No. 1, p. 61—68.
5. *Sih Ping Hwei, Newman J.* Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow.— *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1967, v. 10, No. 12, p. 1749—1756.
6. *Chao B. T.* Transient heat and mass transfer to translating droplet.— *Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer*, 1969, v. 91, No. 2, p. 273—281.
7. *Ruckenstein E.* Unsteady mass transfer near fluid-liquid interfaces.— *Chem. Engng Sci.*, 1970, v. 25, No. 11, p. 1699—1707.
8. *Полянин А. Д., Прядкин П. А.* О нестационарном конвективном тепло- и массообмене в жидкости при больших числах Пекле.— *ПМТФ*, 1981, № 6, с. 135—147.
9. *Головин А. М., Животягин А. Ф.* Влияние объемной химической реакции на массоперенос внутри капли при больших числах Пекле.— *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ.*, 1979, № 4, с. 77—83.
10. *Johns L. E., Beckmann R. B.* Mechanism of dispersed-phase mass transfer in viscous, single-drop extraction systems.— *AIChE Journal*, 1966, v. 12, No. 1, p. 10—16.
11. *Brauer H.* Unsteady state mass transfer through the interface of spherical particles-II.— *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1978, v. 21, No. 4, p. 455—465.
12. *Броунштейн Б. И., Ривкин В. Я.* Внутренняя задача массо- и теплообмена с замкнутыми линиями тока при больших числах Пекле.— *Докл. АН СССР*, 1981, т. 260, № 6, с. 1323—1326.
13. *Price H. S., Varga R. S., Warren J. E.* Application of oscillation matrices to diffusion—convection equations.— *J. Math. and Phys.*, 1966, v. 45, No. 3, p. 301—311.
14. *Watada H., Hamielec A. E., Johnson A. I.* A theoretical study of mass transfer with chemical reaction in drops.— *Canad. J. Chem. Eng.*, 1970, v. 48, No. 3, p. 255—261.