

УДК 533.6.12

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С САМОИНДУЦИРОВАННЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Гурин В. Б., Терентьев Е. Д.

Изучается задача обтекания сверхзвуковым потоком плоской пластины с установленным на ней треугольным вибратором, который начинает совершать гармонические колебания в невозмущенном пограничном слое. Пластина и вибратор предполагаются теплоизолированными, размеры вибратора и частота колебаний таковы, что течение можно описать уравнениями пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Амплитуда колебаний предполагается малой, что позволяет линеаризовать эти уравнения. В линейной постановке изучен вопрос о выходе давления на установившийся периодический режим. На примере задачи о вибраторе рассмотрен вопрос о распространении нестационарных возмущений как вверх, так и вниз по потоку.

**1. Постановка задачи и ее формальное решение.** Рассмотрим обтекание совершенным газом теплоизолированного тела, представляющего собой плоскую пластину, на некотором удалении от концов которой имеется неровность, изменяющая с течением времени свою форму. Будем считать, что параметры набегающего невозмущенного потока ( $U_\infty^*$  — скорость,  $p_\infty^*$  — давление,  $\rho_\infty^*$  — плотность) определяют число Маха  $M_\infty > 1$  (здесь и дальше индекс  $\infty$  относится к величинам в невозмущенном потоке). Примем зависимость первого коэффициента вязкости от температуры  $T^*$  линейной:  $\lambda_1^*/\lambda_{1\infty}^* = CT'$  ( $T' = T^*/T_\infty^*$ ), а число Прандтля — равным единице. Расстояние от переднего края пластины до неровности обозначим  $L^*$ . Вместо обратной величины числа Рейнольдса используем малый параметр  $\varepsilon = Re_1^{-1/2}$  ( $Re_1 = \rho_\infty^* U_\infty^* L^*/\lambda_{1\infty}^*$ ).

Выберем продольный размер неровности  $O(L^*\varepsilon^3)$ , поперечный размер  $O(L^*\varepsilon^5)$ , характерное время изменения формы неровности  $O(L^*\varepsilon^2/U_\infty^*)$ . Для описания движения в окрестности такой неровности удобно выделить три характерные области [1, 2]: верхнюю — область сверхзвукового невязкого течения ( $y_1^* = O(L^*\varepsilon^3)$ ), среднюю — обыкновенный пограничный слой ( $y_2^* = O(L^*\varepsilon^4)$ ) и нижнюю — пограничный слой с самоиндуцированным давлением. Основные трудности в такой схеме связаны с построением решения в нижней области, изучению которой и посвящена эта работа.

Введем безразмерные зависимые и независимые переменные, указанные в [3, 4], и используем для них обозначения:  $x, y$  — оси декартовой системы координат с осью  $x$ , направленной вдоль пластины,  $u$  и  $v$  — составляющие вектора скорости вдоль осей  $x$  и  $y$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность. Требуя выполнения условий срачивания с обычным пограничным слоем при  $x \rightarrow -\infty$  и  $y \rightarrow \infty$ , получим из уравнений Навье — Стокса для главных членов разложения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  систему уравнений нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением [3—5]. Зададим форму неровности (фиг. 1) в виде

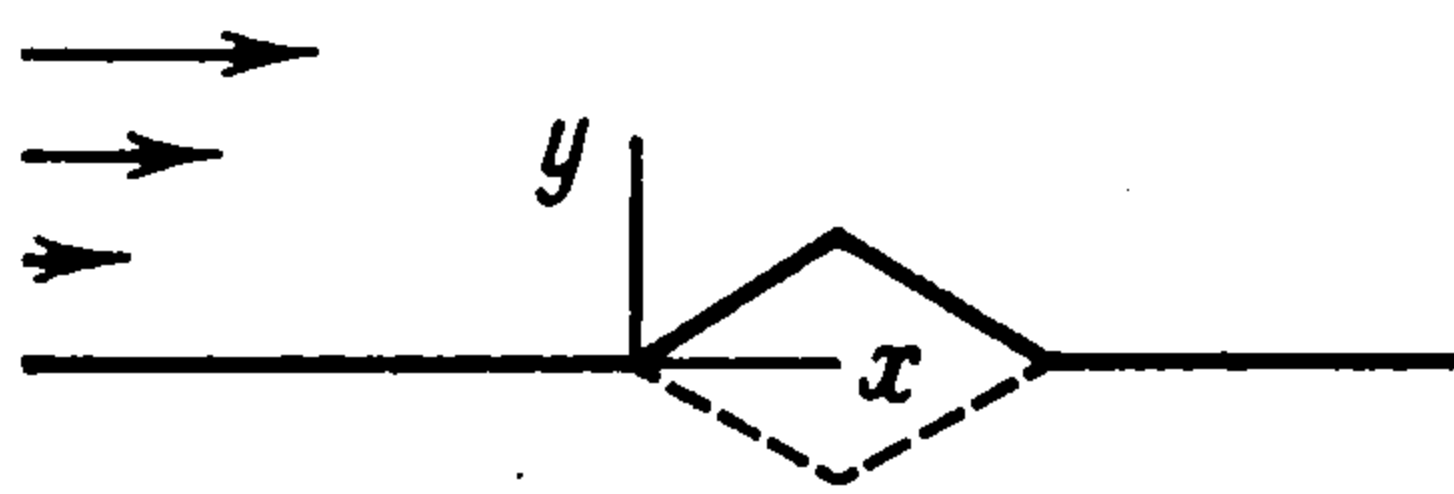
$$(1.1) \quad y_w = \sigma f(t, x), \quad \sigma \ll 1$$

а на поверхности пластины и неровности потребуем выполнения условий

прилипания, что для рассматриваемого приближения ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) дает

$$(1.2) \quad u(t, x, y_w) = 0, \quad v(t, x, y_w) = \sigma \partial f / \partial t$$

Условия малости поперечного размера неровности (1.1) позволяют



Фиг. 1

линеаризовать задачу, разложив искомые функции в степенной ряд по  $\sigma$

$$(1.3) \quad u = y + \sigma u_1 + \dots, \quad v = \sigma v_1 + \dots, \quad p = \sigma p_1 + \dots$$

Подставляя разложение (1.3) в систему уравнений Навье — Стокса, получим

$$(1.4) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + y \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 = - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$$

решение которой подчиним предельным и граничным условиям

$$(1.5) \quad x \rightarrow -\infty, \quad u_1 \rightarrow 0, \quad p_1 \rightarrow 0; \quad y \rightarrow \infty, \quad u_1 \rightarrow - \int_{-\infty}^x p_1 dx_1$$

$$u_1(t, x, 0) = -f(t, x), \quad v_1(t, x, 0) = \partial f(t, x) / \partial t$$

В такой постановке задача рассматривалась в [6], где были изучены гармонические колебания по времени, существующие неограниченно долго. Если же изучать движение с момента времени  $t = 0$ , то необходимо задать еще начальные условия во времени

$$(1.6) \quad u_1(0, x, y) = \varphi_0(x, y)$$

Функция  $\varphi_0$  считается согласованной с (1.4), (1.5)

$$\varphi_0(x, 0) = -f(0, x),$$

$$\varphi_0(x, \infty) = - \int_{-\infty}^x p_1(0, x_1) dx_1, \quad \frac{\partial^2 \varphi_0(x, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial p_1(0, x)}{\partial x}$$

В дальнейшем будем рассматривать течения, вызванные движением неровности в невозмущенном пограничном слое, поэтому положим  $\varphi_0(x, y) = 0$ .

Анализ системы (1.4) более удобно провести перейдя к одному уравнению для функции  $u_1$

$$(1.7) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial t} + y \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}$$

которая помимо (1.5) должна, согласно последнему уравнению (1.4), удовлетворять еще условию

$$(1.8) \quad \partial^2 u_1(t, x, 0) / \partial y^2 = \partial p_1(t, x) / \partial x$$

Для построения решения уравнения (1.7) с условиями (1.5), (1.6), (1.8) воспользуемся для функций  $u_1$ ,  $p_1$ ,  $f$  преобразованием Фурье по  $x$

и Лапласа по  $t$

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u_1(t, x, y) e^{-\omega t - ikx} dt dx, \quad \operatorname{Re} \omega > l_0 > 0, \operatorname{Im} k = 0$$

Тогда для  $\bar{u}_1$  и  $\bar{p}_1$  получим задачу

$$(1.9) \quad \frac{\partial^3 \bar{u}_1}{\partial y^3} - (\omega + ik y) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} = 0$$

$$y = 0, \bar{u}_1 = -\bar{f}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2} = ik \bar{p}_1; \quad y \rightarrow \infty, \quad \bar{u}_1 \rightarrow -\frac{\bar{p}}{ik}$$

Введем для (1.9) новую независимую переменную

$$z = (ik)^{1/2} y + \Omega, \quad i = e^{i\pi/2}, \quad \Omega = i^{-2/2} \omega k^{-2/2}$$

и выберем для  $k$  на комплексной плоскости разрез вдоль положительной части мнимой оси, приписав действительным положительным  $k$  значение  $\arg k = 0$ . В задаче (1.9) для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка заданы три граничных условия, содержащих параметр  $\bar{p}_1$ . Казалось бы, решение ее существует для любого  $\bar{p}_1$ , однако это не так. Условие при  $y \rightarrow \infty$  эквивалентно двум условиям:  $\bar{u}_1$  ограничено и равно определенной постоянной. Поэтому решение задачи можно выписать только для определенного  $\bar{p}_1$ :

$$(1.10) \quad \bar{u}_1(\Omega, k, z) = B_1(\Omega, k) I(z) + B_2(\Omega, k), \quad \bar{p}_1 = -ik B_2(\Omega, k)$$

$$I(z) = \int_z^{\infty} \operatorname{Ai}(z_1) dz_1, \quad F(\Omega, k) = \operatorname{Ai}'(\Omega) + (ik)^{1/2} I(\Omega)$$

$$B_1(\Omega, k) = -(ik)^{1/2} \bar{f}(\Omega, k) / F(\Omega, k), \quad B_2(\Omega, k) =$$

$$= -\operatorname{Ai}'(\Omega) \bar{f}(\Omega, k) / F(\Omega, k)$$

( $\operatorname{Ai}(\Omega)$  и  $\operatorname{Ai}'(\Omega)$  — функция Эйри и ее производная). Используя (1.10), запишем решение задачи (1.5) — (1.8)

$$(1.11) \quad u_1(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \bar{u}_1 e^{ikx + \omega t} d\omega dk$$

$$p_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \bar{p}_1 e^{ikx + \omega t} d\omega dk, \quad l = \operatorname{const} > 0$$

**2. Задача о вибраторе: выход на установившийся колебательный режим.** Возмущения, вызванные вибратором, совершающим гармонические колебания, неограниченно долго до рассматриваемого момента времени изучались в [6]. Рассмотрим возмущения, создаваемые вибратором, который начинает работать в момент времени  $t = 0$  в невозмущенном пограничном слое ( $\varphi_0(x, y) = 0$ ). Для этого зададим функцию

$$(2.1) \quad f(t, x) = f_1(x) \sin \omega_0 t$$

Здесь  $\omega_0$  — безразмерная частота, а функция  $f_1(x)$ , как и в [7], задает треугольную форму (фиг. 1) с параметрами  $a$  и  $b$  ( $f_1(x) = 0$  при  $x \leq 0$ ,  $2x$  при  $0 \leq x \leq b$ ,  $2b(a-x)/(a-b)$  при  $b \leq x \leq a$ ,  $0$  при  $x \geq a$ ). Изучим давление в газе, создаваемое таким вибратором. Согласно (1.10), (1.11) и (2.1), имеем

$$(2.2) \quad p_1 = -\frac{\omega_0}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{\bar{f}_0(a, b, k) \operatorname{Ai}'(\Omega)}{k(\omega_0^2 + \omega^2) F(\Omega, k)} e^{\omega t + ikx} d\omega dk$$

$$\bar{f}_0(a, b, k) = 1 - \frac{a}{a-b} \exp(-ikb) + \frac{b}{a-b} \exp(-ika)$$

Исходя из (2.2) получим асимптотическую формулу для давления  $p_1$  при конечных  $x$  и  $t \rightarrow \infty$ . Для этого рассмотрим внутренний интеграл

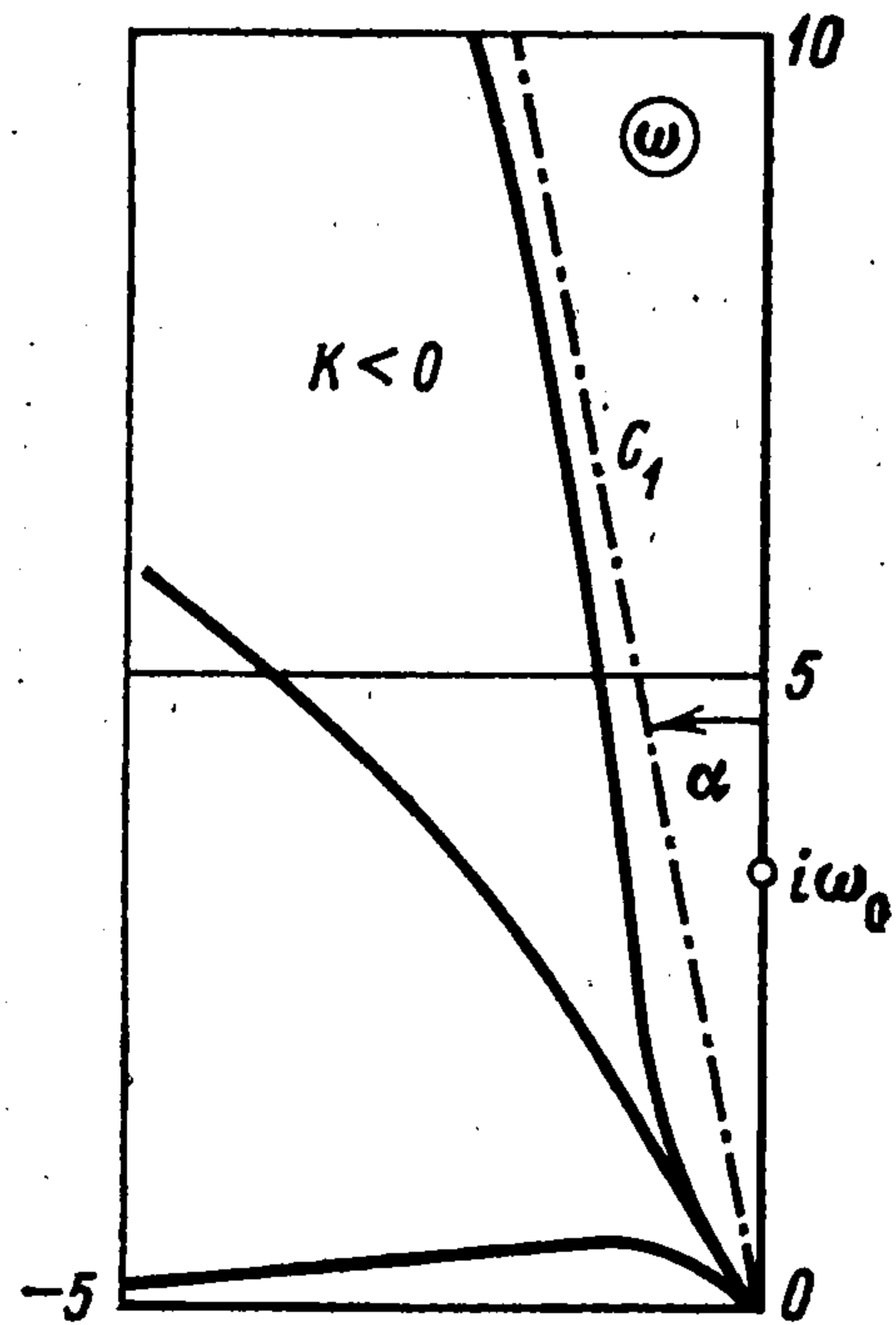
$$J_t = \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{\text{Ai}'(\Omega) e^{\omega t} d\omega}{(\omega_0^2 + \omega^2) F(\Omega, k)}$$

Знаменатель подынтегрального выражения обращается в нуль при  $\omega = i\omega_0$ ,  $\omega = -i\omega_0$  и когда

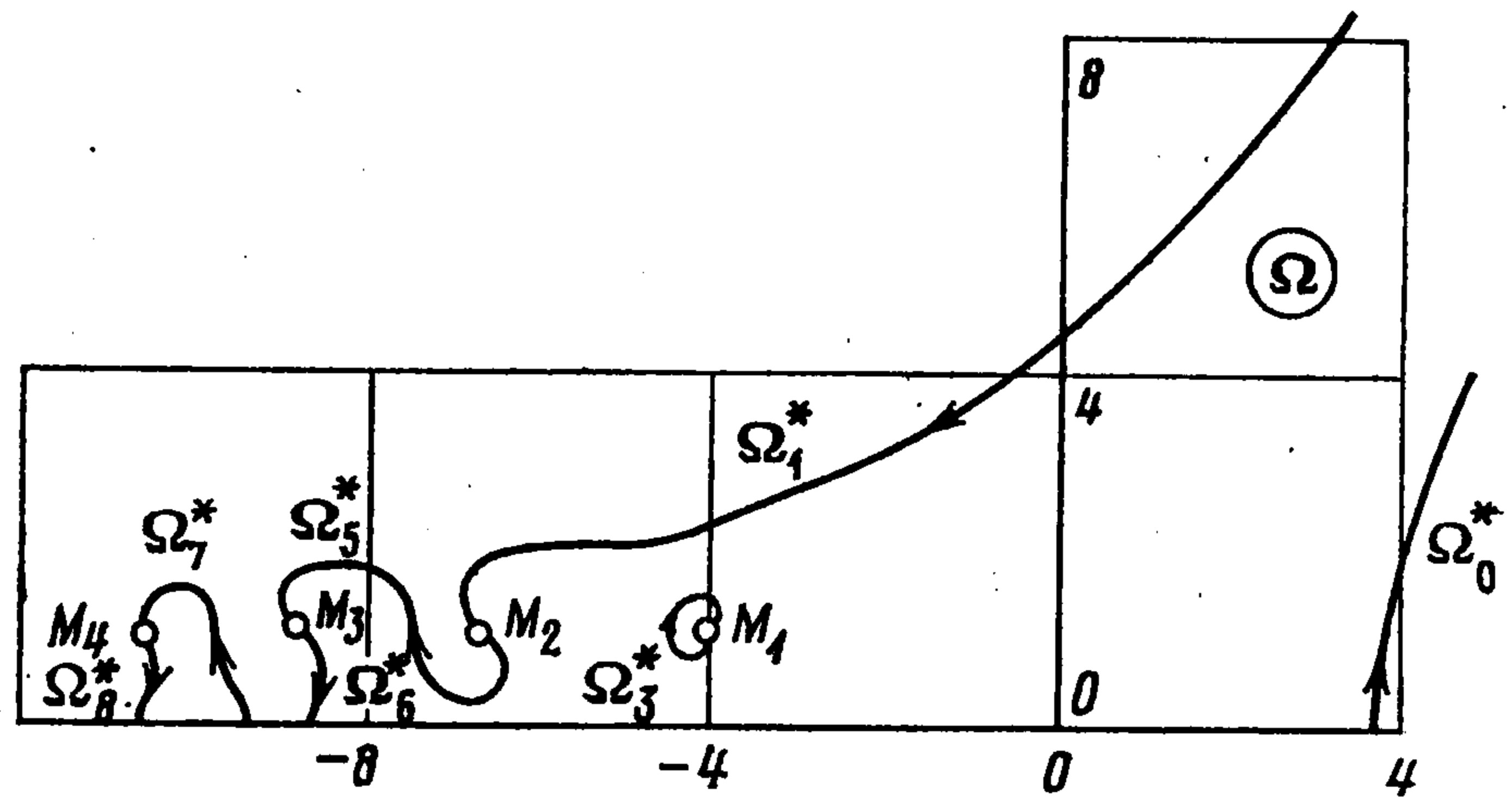
$$(2.3) \quad F(\Omega, k) = \text{Ai}'(\Omega) + (ik)^{1/2} I(\Omega) = 0$$

Уравнение (2.3) является дисперсионным соотношением, связывающим  $\omega$  и  $k$  для свободных колебаний в сверхзвуковом пограничном слое [4, 5].

С помощью ЭВМ были построены траектории корней  $\omega(k)$  при изменении  $k$  вдоль действительной оси. При  $k < 0$  траектории  $\omega(k)$  лежат во втором квадранте (фиг. 2), причем для всех корней справедливо неравенство  $\pi > \arg \omega(k) > 0,57\pi$ ; при  $k > 0$  траектории  $\omega(k)$  симметричны относительно оси  $\text{Im } k = 0$  траекториям, изображенным на фиг. 2, они лежат в третьем квадранте и удовлетворяют неравенству  $-0,57\pi >$



Фиг. 2



Фиг. 3

$> \arg \omega(k) > -\pi$ . Используя теорему Коши о вычетах, изменим путь интегрирования в  $J_t$ , положив  $l = 0$  и выбрав в качестве нового пути два луча:  $C_1$ , изображенный на фиг. 2, и симметричный ему луч  $C_2$ , лежащий в третьем квадранте. Пусть углы, составляющие лучами  $C_1$  и  $C_2$  с положительным направлением оси  $\text{Im } \omega = 0$ , будут  $\pi/2 + \alpha$  и  $-\pi/2 - \alpha$ , где  $\alpha$  удовлетворяет неравенству  $0 < \alpha < 0,07$ . При таком изменении пути интегрирования необходимо учесть полюса в точках  $i\omega_0$  и  $-i\omega_0$ , однако полюса, соответствующие корням (2.3), учитывать не надо. В результате имеем

$$(2.4) \quad J_t = 2\pi i \left[ \frac{e^{i\omega_0 t} \text{Ai}'(\Omega_1)}{2i\omega_0 F(\Omega_1, k)} - \frac{e^{-i\omega_0 t} \text{Ai}'(\Omega_2)}{2i\omega_0 F(\Omega_2, k)} \right] +$$

$$+ \left( \int_{\infty e^{-i\varphi}}^0 + \int_0^{\infty e^{i\varphi}} \right) \frac{\text{Ai}'(\Omega) e^{\omega t} d\omega}{(\omega_0^2 + \omega^2) F(\Omega, k)}$$

$$\Omega_1 = \frac{i^{1/2} \omega_0}{k^{1/2}}, \quad \Omega_2 = -\Omega_1, \quad \varphi = \pi/2 + \alpha$$

Оценим вклад в давление  $p_1$  от интегралов в правой части (2.4) при  $t \rightarrow \infty$ . Подынтегральное выражение в них записано в форме, удобной для применения леммы Лапласа об асимптотической оценке интегралов, согласно которой основной вклад при интегрировании будет давать малая окрестность точки 0. Используя далее ограниченность  $|I(\Omega)/\text{Ai}'(\Omega)|$  при изменении  $\omega$  вдоль пути интегрирования, найдем, что вклад в давление  $p_1$  при  $t \rightarrow \infty$  будет  $o(t^{-3})$ .

Записывая интегралы по  $k$  от первого слагаемого в (2.4), определяемого полюсами  $i\omega_0$  и  $-i\omega_0$ , получим

$$(2.5) \quad P_1 = -\frac{1}{\pi} \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} (\Phi_0) dk + \frac{1}{\pi} \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} (\Phi_0) dk + o(t^{-3})$$

$$\Phi_0 = \bar{f}_0(a, b, k) \operatorname{Ai}'(\Omega_1) k^{-1} F^{-1}(\Omega_1, k) e^{ikx}$$

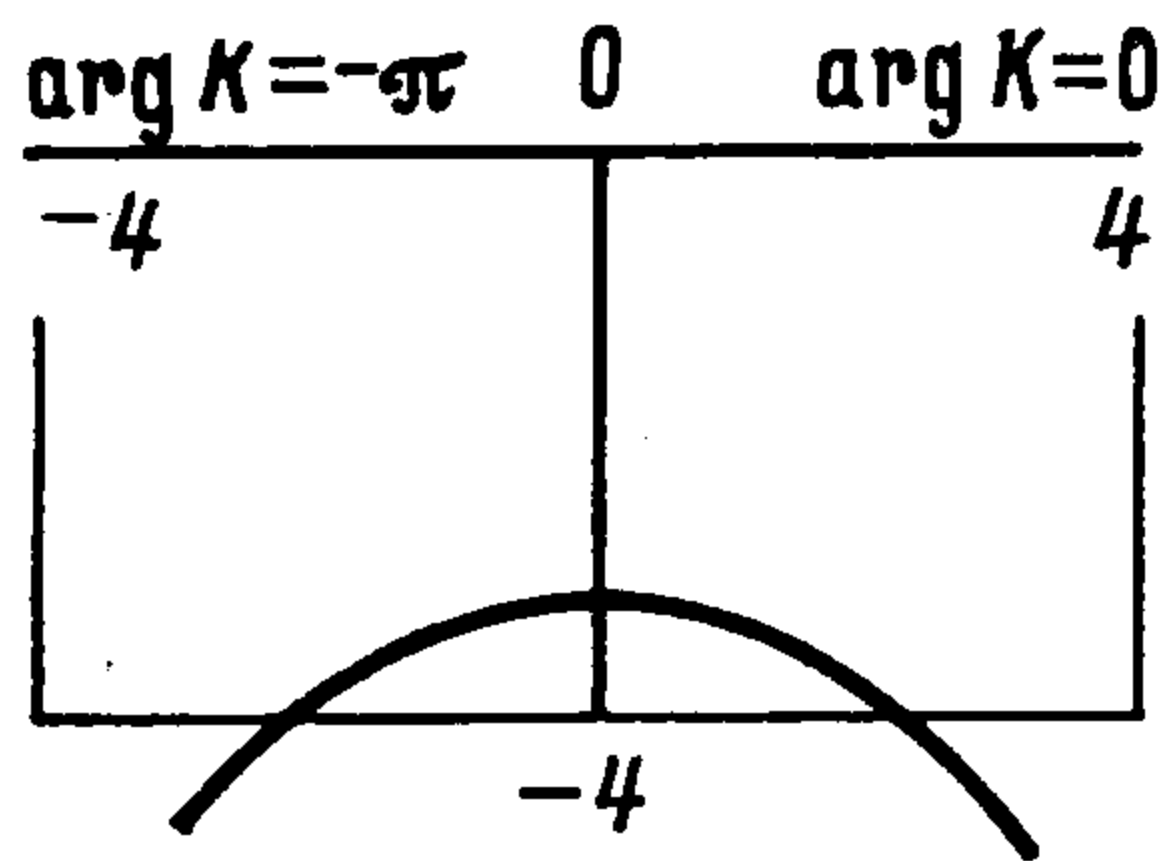
Если принять во внимание, что в работе [7] изучалось движение, вызванное вибратором, совершающим колебания по закону  $\cos \omega_0 t_7$  (для времени, использованного в [7], введено обозначение  $t_7$ ), а в публикуемой — по закону  $\sin \omega_0 t$  и, следовательно,  $t_7 = t - \pi/2\omega_0$ , то формула, задающая давление в [7] с точностью до величин  $o(t^{-3})$ , совпадает с формулой (2.5). Этим показано, что после начала работы вибратора выход на установившийся колебательный режим в газе происходит довольно быстро — быстрее, чем по закону  $t^{-3}$ .

**3. О распространении [нестационарных возмущений.** На примере задачи о вибраторе рассмотрим вопрос о распространении нестационарных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое с самоиндуцированным давлением. Для этого опять обратимся к формуле (2.2), задающей давление, и изучим асимптотическое поведение  $p_1$  при  $t$  конечных и  $|x| \rightarrow \infty$ . В (2.2) поменяем порядок интегрирования, выбрав в качестве внутреннего интеграл по  $k$ . Это можно сделать на основании теоремы Фубини ввиду быстрого убывания подынтегрального выражения при  $|k| \rightarrow \infty$  и  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Изучим с помощью ЭВМ поведение корней  $k(\omega)$  уравнения (2.3) при изменении  $\omega$  вдоль прямой параллельной мнимой оси с  $l \gg 1$  ( $\omega = l + il_1$ ,  $-\infty < l_1 < \infty$ ,  $l = \text{const}$ ). Поскольку риманова поверхность  $\Omega$  состоит лишь из одного листа, рассмотрим сначала корни  $\Omega(\omega)$ . Как отмечено в [6], для определенного значения  $\omega$  (например,  $l = 0$ ,  $l_1 = 1$ ) имеется счетное множество корней, следовательно, каждый из них при изменении  $\omega$  породит траекторию. Используя введенное в [6] обозначение корней, назовем соответствующие им траектории через  $\Omega_j^*$ ,  $\Omega_j^*$ , где  $j = 0, 1, \dots$ . Характерная для больших значений  $l$  картина первых траекторий приведена на фиг. 3 для  $l = 7,5$  лишь для  $\operatorname{Im} \Omega > 0$ , поскольку для  $\operatorname{Im} \Omega < 0$  траектории симметричны изображенным на фиг. 3 относительно оси  $\operatorname{Im} \Omega = 0$ . Стрелками указаны направления, отвечающие увеличению параметра  $l_1$ . Буквами  $M_j$  помечены точки, являющиеся нулями  $I(\Omega)$ , симметричные им точки, расположенные в третьем квадранте и также являющиеся корнями  $I(\Omega)$ , обозначим  $M_j^-$ . Из уравнения (2.3) следует, что траектории его корней стремятся к точкам  $M_j$  и  $M_j^-$  при  $l_1 \rightarrow \pm\infty$ . Среди траекторий имеется одна  $\Omega_0^*$ , выходящая из бесконечно удаленной точки и возвращающаяся в нее. Две траектории  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_1^{**}$  соединяют бесконечно удаленную точку с точками  $M_j$  и  $M_j^-$ , причем при увеличении параметра  $l$  происходит увеличение номера  $j$ . Так, при  $l < 6,8$  эти траектории соединяют бесконечно удаленную точку с точками  $M_1$  и  $M_1^-$ . После перехода траекторий  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_1^{**}$  от точек  $M_j, M_j^-$  к точкам  $M_{j+1}, M_{j+1}^-$  из точек  $M_j$  и  $M_j^-, \dots, M_1$  и  $M_1^-$  выходит и в них же возвращается одна и та же траектория, например  $\Omega_3^*$  для  $M_1$  и  $\Omega_2^*$  для  $M_1^-$ . Что касается точек  $M_{j+2}$  и  $M_{j+2}^-, M_{j+3}$  и  $M_{j+3}^-, \dots$ , то они соединены траекториями между собой, так траектории  $\Omega_7^*$  и  $\Omega_8^*$  соединяют точки  $M_4$  и  $M_4^-$ .

Остановимся сначала на возмущениях, распространяющихся вверх по потоку при  $x \rightarrow -\infty$ . Для этого изучим внутренний интеграл по  $k$

$$(3.1) \quad J_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}_0(a, b, k) \operatorname{Ai}'(\Omega) e^{ikx}}{kF(\Omega, k)} dk$$

Используя соотношение  $k = i^{-1}\omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}$  и полученные траектории  $\Omega(\omega)$ , изображенные на фиг. 3, построим корни  $k(\omega)$ . Для нижней полу-плоскости ( $-\pi < \arg k < 0$ ) имеется лишь одна траектория  $k_0^*(\omega)$  (фиг. 4), возникающая из траектории  $\Omega_0^*(\omega)$ . Для вычисления интеграла (3.1) удобно использовать замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси от  $-r$  до  $r$  и дуги окружности, лежащей в нижней полу-плоскости и соединяющей точки  $-r$  и  $r$  (фиг. 4). Поскольку интеграл по



Фиг. 4

дуге окружности при  $r \rightarrow \infty$  стремится к нулю при  $x < 0$ , то, согласно теореме Коши, интеграл (3.1) определяется вычетом в точке  $k_0^*(\omega)$ . Подставляя найденное значение  $J_x$  в формулу (2.2), получим

$$(3.2) \quad p_1 = -\frac{\omega_0}{2\pi^2} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{\bar{f}_0(a, b, k_0^*(\omega))}{\omega_0^2 + \omega^2} B(\omega, k_0^*(\omega)) e^{\omega t + ik_0^*(\omega)x} d\omega$$

$$B(\omega, k_0^*(\omega)) = \frac{3\pi \text{Ai}'(\Omega_0^*) i^{1/2} k_0^{*1/2}}{2I(\Omega_0^*) + \Omega_0^* \left(1 + \frac{\omega}{k_0^{*2}}\right) \text{Ai}(\Omega_0^*)}$$

При  $x \rightarrow \infty$  воспользуемся методом перевала, для чего в соответствии с тремя слагаемыми в функции  $\bar{f}_0$  разобьем интеграл (3.2) на сумму трех интегралов и найдем корни уравнения

$$(3.3) \quad \frac{d}{d\omega} (\omega t - ik_0^*(\omega) |x_1|) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dk_0^*}{d\omega} = -\frac{it}{|x_1|}$$

где  $x_1 = x$ ;  $x - b$ ;  $x - a$  — соответственно для первого, второго и третьего интегралов. Согласно [5], величина  $|dk_0^*/d\omega| \rightarrow 0$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ , при этом для  $k_0^*$  справедливо представление

$$(3.4) \quad k_0^* = -i\omega^{1/2} - 1/2 i\omega^{-1/2} + O(\omega^{-3/2})$$

Подставляя (3.4) в (3.3), найдем корень (3.3) — точку перевала

$$\omega = \omega' = \frac{x_1^2}{4t^2} - 1 + O\left(\left(\frac{t}{x_1}\right)^2\right)$$

и проведем через нее контур интегрирования, выбрав для этого  $l = \omega'$ . Поскольку на таком пути интегрирования всегда справедливо соотношение  $|\omega| \gg 1$ , то корень  $k_0^*$  можно заменить рядом (3.4). Вводя замену переменной  $\omega = \omega_1 x_1^2/t^2$ , запишем функцию, стоящую в экспоненте в (3.2)

$$g_0 = x_1^2 t^{-1} g_1(t, x_1, \omega_1) + O(t^3 x_1^{-2})$$

$$g_1 = \omega_1 - \omega_1^{1/2} - 1/2 t^2 x_1^{-2} \omega_1^{-1/2}$$

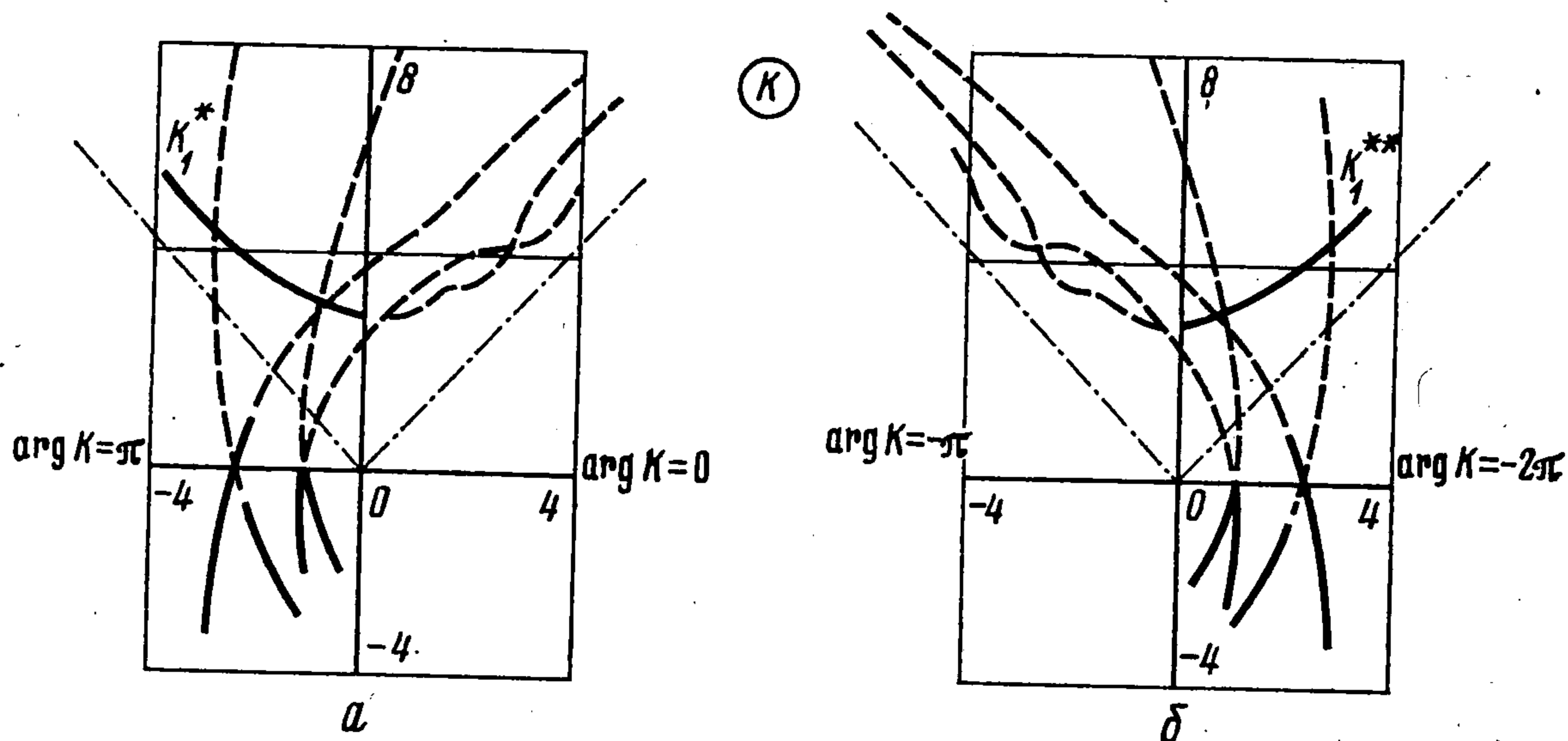
Действительная часть функции  $g_1$  на пути интегрирования в точке  $\omega_1 = \omega_1' = 1/4 - t^2/x_1^2$  принимает максимальное значение, причем в окрестности этой точки путь интегрирования совпадает с линией  $\text{Im } g_1(\omega_1) = \text{Im } g_1(\omega_1')$ . Тогда интеграл (3.2) при  $x_1^2/t \rightarrow \infty$  опреде-

ляется окрестностью точки  $\omega_1 = \omega_1'$  и, согласно методу перевала, можно написать

$$(3.5) \quad p_1 = 8\pi^{-1/2}\omega_0 t^{3/2} e^{-t} \left[ \Phi_1(x) - \frac{a}{a-b} \Phi_1(x-b) + \frac{b}{a-b} \Phi_1(x-a) \right] \sim 8\pi^{-1/2}\omega_0 t^{3/2} |x|^{-3} \exp(-x^2/(L_4) - t)$$

$$\Phi_1(x) = |x|^{-3} \exp(-x^2/4t) (1 + O((t^2 + t^3)/x^2))$$

Из (3.5) следует, что вверх по потоку возмущения распространяются с бесконечной скоростью и для любого  $t > 0$  они сразу присутствуют во всем пространстве  $x < 0$ , при этом в потоке отсутствуют какие-либо фронты (например, движущийся фронт разрыва первых производных). На



Фиг. 5

возмущения не влияет геометрическая форма вибратора, поскольку  $a$  и  $b$  не входят в главный член, который оказывается пропорциональным начальной нормальной скорости поверхности вибратора  $\omega_0$ . Такой характер распространения является типичным для возмущений, описываемых параболическими уравнениями.

Перейдем к изучению возмущений, распространяющихся вниз по потоку при  $x \rightarrow \infty$ . Опять рассмотрим интеграл  $J_x^*$ , определенный в (3.1).

Используя траектории  $\Omega(\omega)$  (фиг. 3), построим корни  $k(\omega)$  в верхней полуплоскости для  $0 \leq \arg k \leq \pi$  на фиг. 5, а и для  $-2\pi \leq \arg k \leq -\pi$  — на фиг. 5, б. Сплошными линиями на фиг. 5, а изображены корни, для которых выполнено  $0 \leq \arg \omega \leq \pi/2$ , и штриховыми, — для которых  $-\pi/2 \leq \arg \omega \leq 0$ . Набором, на фиг. 5, б сплошными линиями изображены траектории, для которых выполнено  $-\pi/2 \leq \arg \omega \leq 0$ , а штриховыми — для которых  $0 \leq \arg \omega \leq \pi/2$ . Опираясь на поведение корней  $k(\omega)$ , преобразуем интеграл  $J_x$  сначала для  $\omega$ , удовлетворяющих неравенству  $0 \leq \arg \omega \leq \pi/2$ . Разобьем  $J_x$  на два интеграла

$$J_x = J_{x1} + J_{x2}, \quad J_{x1} = \int_{-\infty}^0 \Phi_x dk, \quad J_{x2} = \int_0^{\infty} \Phi_x d'k$$

Согласно фиг. 5, б, путь интегрирования в  $J_{x1}$  заменим на луч, выходящий под углом  $-\pi - \alpha_1$  и не задевающий траектории корней  $k(\omega)$  (штрихпунктирная линия). С другой стороны, согласно фиг. 5, а, в интеграле  $J_{x2}$  заменим путь интегрирования на луч, выходящий под углом  $\pi - \alpha_1$  и не задевающий траекторий корней  $k(\omega)$ , а также учтем вычет, порожденный корнем  $k_1^*(\omega)$ . Асимптотический анализ при  $l \gg 1$  показы-

вает, что такие  $\alpha_1$  существуют. В результате имеем

$$(3.6) \quad J_x = \int_0^{\infty} \exp(-ie^{-i\alpha_1 q x}) f_0(a, b, -e^{-i\alpha_1 q}) \left[ \frac{-\text{Ai}'(\Omega_3)}{F(\Omega_3, e^{-i\pi - i\alpha_1 q})} + \right. \\ \left. + \frac{\text{Ai}'(\Omega_4)}{F(\Omega_4, e^{i\pi - i\alpha_1 q})} \right] \frac{dq}{q} + 2\pi \text{res } \Phi_x(k_1^*(\omega)) \\ \Omega_3 = \omega q^{-2/3} \exp(\pi i/3 + 2i\alpha_1/3), \quad \Omega_4 = \Omega_3 \exp(-4i\pi/3)$$

Проводя преобразования правой части (3.6), аналогичные преобразованиям работы [7] при вычислении асимптотики при  $x \rightarrow \infty$ , получим, что при  $x \rightarrow \infty$

$$(3.7) \quad J_x = \Phi_2(\omega, x, a, b) + 2\pi i \text{res } \Phi_x(k_1^*(\omega)) \\ \Phi_2(\omega, x, a, b) = -i2^{3/2}3^{-1/2}\pi^{1/2}\omega^{1/2} \left[ \Phi_3(\omega, x) - \frac{a}{a-b}\Phi_3(\omega, x-b) + \right. \\ \left. + \frac{b}{a-b}I_3(\omega, x-a) \right] \\ \Phi_3(\omega, x) = x^{-1} \exp(-2^{3/2}3^{-1/2}\omega^{3/4}x^{1/2}) [1 + O(x^{-1/2}\omega^{-3/4})] \times \\ \times \left[ 1 - \frac{2}{3}x^{-1}\omega^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}x^{-1/2}\omega^{-3/4} \left( \frac{7}{48} - \frac{41}{72}x^{-1}\omega^{1/2} \right) \right]^{-2}$$

При  $-\pi/2 \leq \arg \omega \leq 0$  проведем преобразование  $J_x$  следующим образом: в интеграле  $J_{x1}$  в качестве пути интегрирования выберем луч, выходящий под углом  $-2\pi + \alpha_1$ , и учтем вычет, порожденный корнем  $k_1^{**}(\omega)$ , а в интеграле  $J_{x2}$  в качестве пути интегрирования выберем луч, выходящий под углом  $\alpha_1$ . Новые пути интегрирования на фиг. 5, а, б показаны штрихпунктирными линиями. Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям для  $0 \leq \arg \omega \leq \pi/2$ , получим, что при  $x \rightarrow \infty$  и  $-\pi/2 \leq \arg \omega \leq 0$  интеграл

$$(3.8) \quad J_x = \Phi_2(\omega, x, a, b) + 2\pi i \text{res } \Phi_x(k_1^{**}(\omega))$$

Подставляя найденные выражения (3.7) и (3.8) в формулу (2.2), получим

$$(3.9) \quad p_1 = -\frac{\omega_0}{2\pi^2} [I_1(t, x, a, b) + 2\pi i I_2(t, x, a, b)] \\ I_1 = \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \Phi_2(\omega, x, a, b) \frac{e^{\omega t} d\omega}{\omega_0^2 + \omega^2} \\ I_2 = \int_{l-i\infty}^l \text{res } \Phi_x(k_1^{**}(\omega)) \frac{e^{\omega t} d\omega}{\omega_0^2 + \omega^2} + \int_l^{l+i\infty} \text{res } \Phi_x(k_1^*(\omega)) \frac{e^{\omega t} d\omega}{\omega_0^2 + \omega^2}$$

При анализе интеграла  $I_1$  остановимся лишь на главном слагаемом, пропорциональном  $\Phi_3(\omega, x-a)$ . Вводя замену переменной  $\omega = \omega_2(x-a)^2 t^{-4}$ , получим

$$I_1 \sim -i2^{3/2}3^{-1/2}\pi^{1/2}b(a-b)^{-1}(x-a)^2 t^{-6} \int_{l'-i\infty}^{l'+i\infty} \omega_2^{1/2} \times \\ \times [1 + O((x-a)^{-2}t^3\omega_2^{-3/4})] (\omega_0^2 + \omega_2^2(x-a)^4 t^{-8})^{-1} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{2}{3}t^{-2}\omega_2^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}(x-a)^{-2}t^3\omega_2^{-3/4} \left( \frac{7}{48} + \frac{41}{72}t^{-2}\omega_2^{1/2} \right) \right]^{-2} \times \\ \times \exp[(x-a)^2 t^{-8}(\omega_2 - 2^{3/2}3^{-1/2}\omega_2^{3/4})] d\omega_2, \quad l' = lt^4(x-a)^{-2}$$

Устремляя величину  $(x-a)^2/t^3 \rightarrow \infty$ , оценим интеграл  $I_1$  по методу перевала. Точкой перевала будет  $\omega_2 = 9/4$ , в связи с чем выберем  $l' = 9/4$ . На таком пути интегрирования действительная часть функции под знаком экспоненты принимает максимальное значение в точке перевала, причем в окрестности точки мнимая часть этой функции сохраняется постоянной.

Это дает

$$(3.10) \quad I_1 \sim 2^5 3^{-3/2} \pi b (a-b)^{-1} (x-a)^{-3} t^{3/2} \left[ 1 - t^{-2} - \frac{4}{9} (x-a)^{-2} \times \right. \\ \left. \times t^3 \left( \frac{7}{48} + \frac{41}{48} t^{-2} \right) \right]^{-2} [1 + O(t^3 (x-a)^{-2})] \exp[-3(x-a)^2/4t^3]$$

Запишем разложение подынтегральных выражений, входящих в  $I_2$  для больших значений  $\omega$ , при этом] опять остановимся лишь на главном члене, пропорциональном  $b/(a-b)$

$$(3.11) \quad I_2 = \frac{b}{2(a-b)} \left\{ \int_l^{l+i\infty} \frac{(k_1^*)^2 \omega}{\omega_0^2 + \omega^2} e^{\omega t + ik_1^*(x-a)} [1 + O(\omega^{-1})] d\omega + \right. \\ \left. + \int_{l-i\infty}^l \frac{(k_1^{**}) \omega}{\omega_0^2 + \omega^2} e^{\omega t + ik_1^{**}(x-a)} [1 + O(\omega^{-1})] d\omega \right\}$$

Для  $|\omega| \gg 1$  справедливо представление

$$k_1^* = \omega^{1/2} e^{\pi i/2} (1 - 1/2 \omega^{-1} + O(\omega^{-2}))$$

$$k_1^{**} = \omega^{1/2} e^{-3\pi i/2} (1 - 1/2 \omega^{-1} + O(\omega^{-2}))$$

Поскольку в главных частях интегралов в (3.11) входят только целые степени  $k_1^*$  и  $k_1^{**}$ , то можно записать один интеграл с пределами  $l-i\infty$  и  $l+i\infty$  от аналитической функции. Для действительной части функции, стоящей под знаком экспоненты  $\omega t - \omega^{1/2} (1 - 1/2 \omega^{-1} + \dots) (x-a)$ , точкой перевала будет

$$\omega = (x-a)^2 / (4t^2) + 1 + O(t^2 (x-a)^{-2})$$

Проводя вычисления, аналогичные вычислениям при определении асимптотики  $p_1$  при  $x \rightarrow -\infty$ , найдем асимптотику выражения  $I_2$  при  $(x-a)^2 t^{-1} \rightarrow \infty$ . Подставляя асимптотические выражения для  $I_1$  (3.10) и для  $I_2$  в (3.9), получим асимптотику  $p_1$  при  $x \rightarrow \infty$ :

$$(3.12) \quad p_1 = -2^4 3^{-3/2} \pi^{-1} \omega_0 b (a-b)^{-1} (x-a)^{-3} t^{3/2} [1 + O(t^3 (x-a)^{-2})] \times \\ \times \left[ 1 - t^{-2} - \frac{4}{9} (x-a)^{-2} t^3 \left( \frac{7}{48} + \frac{41}{48} t^{-2} \right) \right]^{-2} \times \\ \times \exp[-3(x-a)^2/4t^3] + 8\pi^{-1/2} \omega_0 b (a-b)^{-1} (x-a)^{-3} t^{3/2} \times \\ \times [1 + O((t^2 + t^3)/x^2)] \exp[-(x-a)^2/4t + t]$$

Из (3.12) следует, что и вниз по потоку возмущения распространяются с бесконечной скоростью и в потоке отсутствуют фронты. Характер возмущений при  $x \rightarrow \infty$  является более сложным, чем при  $x \rightarrow -\infty$ . Так, в моменты времени  $t < \sqrt{3}$  он определяется вторым слагаемым в (3.12), которое задает возмущения, аналогичные возмущениям при  $x \rightarrow -\infty$  (3.5), а для  $t > \sqrt{3}$  главным становится первое слагаемое (3.12), т. е. для  $x \rightarrow \infty$  происходит смена асимптотических режимов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, с. 53—58.
2. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate. II.— *Mathematika*, 1969, v. 16, No. 31, p. 106—121.
3. Daniels P. G. The flow about the trailing edge of a supersonic oscillating aerofoil.— *J. Fluid Mech.*, 1975, v. 72, pt. 3, p. 541—557.
4. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— *ПММ*, 1977, т. 41, вып. 6, с. 1007—1023.
5. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers.— *J. Fluid Mech.*, 1974, v. 63, pt 3, p. 465—485.
6. Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением около колеблющейся стенки в сверхзвуковом потоке.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1046—1049.
7. Терентьев Е. Д. Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое.— *ПММ*, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1014—1028.

Москва

Поступила в редакцию  
8.VII.1982