

УДК 533.6.011

## О ДВУХ ТИПАХ ЗАКРУЧЕННЫХ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ

Сидоров А. Ф.

Строятся два класса точных решений стационарных пространственных уравнений газовой динамики. Эти решения используются для описания изэнтропических течений газа с двумя типами закрутки в расширяющихся осесимметричных каналах. Исследуется влияние закрутки на тягу некоторых сопел специальной формы.

Ранее приближенными аналитическими или численными методами изучались радиально-уравновешенные потоки с произвольной закруткой [1], исследовались различные качественные особенности закрученных потоков — возникновение вакуумного ядра, возвратных струй, застойных зон при входе в горловину сопла [2—4], строились аналитические решения в околосвуковом приближении [5], оценивалось изменение тяги сопел в зависимости от параметров закрутки [1, 6—9].

1. Для изучения газовых потоков с закруткой используем два класса решений уравнений газовой динамики, когда компоненты вектора скорости  $u_i$  и функция  $Q = \rho^{\gamma-1}$  ( $\rho$  — плотность,  $\gamma$  — показатель адиабаты) линейно зависят от части пространственных координат  $x_k$  [10].

Рассмотрим сначала изэнтропические пространственные течения при линейной зависимости от  $x_2, x_3$  вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} Q &= g(x_1), \quad u_1 = g_1(x_1) \\ u_i &= l_i(x_1)x_2 + f_i(x_1)x_3 + g_i(x_1), \quad i = 2, 3 \end{aligned}$$

Восемь функций  $g, g_i, l_i, f_i$  удовлетворяют следующей системе обыкновенных уравнений [10]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} g_1 g_1' + \gamma(\gamma - 1)^{-1} S_0 g' &= 0, \quad g_1 l_i' + l_2 l_i + l_3 f_i = 0 \\ g_1 f_i' + f_2 l_i + f_3 f_i &= 0, \quad g_1 g_i' + g_2 l_i + g_3 f_i = 0 \\ g_1 g' + (\gamma - 1) g (g_1' + l_2 + f_3) &= 0 \end{aligned}$$

где  $S_0 = \text{const}$  — значение энтропийной функции в уравнении состояния  $p = S_0 \rho^\gamma$ ,  $p$  — давление.

Оказывается, что система (1.2) интегрируется до конца в квадратурах.

Прежде всего, очевидным образом получаем три интеграла ( $K_0, A_i$  — произвольные [постоянные])

$$(1.3) \quad \frac{1}{2} g_1^2 + \gamma(\gamma - 1)^{-1} S_0 g = K_0, \quad g_i = A_2 l_i + A_3 f_i$$

Постоянные  $A_2, A_3$  соответствуют переносу начала координат по осям  $x_2, x_3$ , и, не умаляя общности, можно положить  $A_2 = A_3 = 0$ , т. е.

$$(1.4) \quad g_2 \equiv g_3 \equiv 0$$

Далее, из второго и третьего уравнений (1.2) ( $C_i$  — произвольные постоянные) следует

$$(1.5) \quad f_2 = C_2 l_3, \quad l_2 - f_3 = C_3 l_3$$

Исключая во втором уравнении (1.2), содержащем  $l_3'$ , функции  $l_2', f_3$ , при помощи последнего уравнения (1.2) и (1.3) получим для  $l_3$  уравне-

ние, интегрируя которое будем иметь

$$(1.6) \quad l_3 = C_4 g_1 (\beta - g_1^2)^{1/(\gamma-1)}, \quad \beta = 2K_0, \quad C_4 = \text{const}$$

Подставляя во второе уравнение (1.2) для  $l_2'$  представления всех функций  $l_i$  и  $f_i$  через  $g_1$ , для  $g_1(x_1)$  получим уравнение второго порядка. Положив в этом уравнении  $1/2 g_1'^2 = y$  и взяв  $g_1$  за независимую переменную, получим для  $y(g_1)$  линейное уравнение первого порядка. Интегрируя его, получаем

$$(1.7) \quad y = g_1 (\beta - g_1^2)^{(2\gamma-1)/(\gamma-1)} [g_1^2 (\gamma + 1) - \beta (\gamma - 1)]^{-2} (C^* - 2(\gamma - 1) \alpha \int [x^2 (\gamma + 1) - \beta (\gamma - 1)] (\beta - x^2)^{(2-\gamma)/(\gamma-1)} dx) \\ \alpha = (1/2 C_3^2 + C_2) C_4^2, \quad C^* = \text{const}$$

Вычислив квадратуру в (1.7) при помощи подстановки  $x (\beta - x^2)^{1/(\gamma-1)} = z$ , получим последний интеграл, содержащий произвольные постоянные  $C^*$  и  $A_1$

$$(1.8) \quad x_1 + A_1 = 2^{-1/2} \int [G(g_1)]^{-1/2} \left( -\gamma + \frac{\beta + g_1^2}{\beta - g_1^2} \right) [C^* + 2(\gamma - 1)^2 \alpha G(g_1)]^{-1/2} dg_1, \quad G(g_1) = g_1 (\beta - g_1^2)^{1/(\gamma-1)}$$

Соотношение (1.8) неявно определяет функцию  $g_1(x_1)$ .

При этом функция  $l_2$  имеет вид

$$(1.9) \quad l_2 = 2^{-1/2} (\gamma - 1)^{-1} [G(g_1)]^{1/2} [C^* + 2(\gamma - 1)^2 \alpha G(g_1)]^{1/2}$$

Таким образом найдено общее решение системы (1.2), зависящее от восьми произвольных постоянных:  $C_2, C_3, C_4, A_1, A_2, A_3, K_0, C^*$ . Три из них:  $A_1, A_2$  и  $A_3$  ( $A_1$  определяет сдвиг по оси  $x_1$ ) несущественны, и далее будем считать, что  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ .

Класс решений (1.1) обладает следующим геометрическим свойством: компоненты  $u_2$  и  $u_3$  сохраняют постоянное значение вдоль линий тока, каждая из которых — плоская кривая.

Действительно, взяв за параметр вдоль линий тока  $x_1$ , из второго и третьего уравнений (1.2) с использованием уравнений линий тока получим, что если вдоль некоторой линии тока  $u_i = u_i^\circ = \text{const}$  ( $i = 2, 3$ ), то эта линия тока лежит в плоскости

$$u_3^\circ x_2 - u_2^\circ x_3 = C^\circ = \text{const}$$

2. Рассмотрим случай, когда построенный класс решений определяет осесимметричные течения с осью симметрии  $x_1$ . Для этого достаточно удовлетворить двум условиям

$$(2.1) \quad l_2 f_2 + l_3 f_3 = 0, \quad l_2^2 + l_3^2 = f_2^2 + f_3^2$$

которые получаются из (1.1), если потребовать, чтобы радиальная компонента скорости  $u_r = \sqrt{u_2^2 + u_3^2}$  зависела лишь от  $x_1$  и  $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ .

С учетом (1.5) из (2.1) получаем следующие возможности:

- 1)  $l_3 = f_2 = 0, \quad l_2 = f_3;$  2)  $l_2 = f_3 = C_3 = 0;$
- 3)  $C_2 = 1, \quad C_3$  — любое; 4)  $C_2 = -1, \quad C_3 = 0.$

Для случая 1 в (1.6)  $C_4 = 0$  и линии тока лежат в меридиональных плоскостях, проходящих через ось  $x_1$ . Вращение потока вокруг оси  $x_1$  отсутствует. Случай 2 приводит к тривиальным решениям с  $g = \text{const}$ ,

$g_1 = \text{const}$ . Случай 3, для которого  $2l_2 - C_3 l_3 = 0$ , приводит в силу последнего уравнения (1.2) к той же тривиальной возможности.

Рассмотрим более подробно случай 4

$$(2.2) \quad u_2 = l_2(x_1) x_2 - l_3(x_1) x_3, \quad u_3 = l_3(x_1) x_2 + l_2(x_1) x_3 \\ (u_r^2 = (l_2^2 + l_3^2) r^2)$$

Используем представления (2.2) для решения следующей задачи. Пусть входное сечение осесимметричного канала ( $x_1 > 0$ ) — круг,  $x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ ,  $x_1 = 0$  и заданы величины

$$(2.3) \quad g_1(0) = g_1^0 > 0, \quad l_2(0) = l \cos \varphi_0, \quad l_3(0) = l \sin \varphi_0 \\ \varphi_0 = \text{const}$$

Тогда формулы (2.2) при  $x_1 = 0$  определяют поле поперечных скоростей газового потока, закрученного как твердое тело (в [3] рассмотрен случай такой закрутки, когда равномерно горит с торца вращающаяся шашка твердого топлива). Параметр  $\varphi_0$  определяет интенсивность закрутки, при  $\varphi_0 = 0$  закрутка отсутствует. Форма линий тока, исходящих от точек окружности  $q$  ( $r = R$ ,  $x_1 = 0$ ) и образующих стенки некоторого сопла при  $x_1 > 0$ , зависит от значения параметра  $\varphi_0$ .

Исследуем, как влияет на форму сопла и его тягу изменение  $\varphi_0$  при различных длинах сопла  $L$ . Отметим, что рассматриваемые течения — неизоэнергетические: постоянная  $c_\lambda$  в интеграле Бернулли для линий тока, проходящих при  $x_1 = 0$  через точки окружности  $r = \lambda$ , равна

$$c_\lambda^2 = \frac{1}{2} l^2 \lambda^2 + K_0 \quad (0 \leq \lambda \leq R)$$

Далее будем полагать  $K_0 = (\gamma - 1)^{-1}$  (это можно сделать, не умаляя общности, выбором системы единиц). Из (1.6) находим

$$(2.4) \quad C_4 = l \sin \varphi_0 G_0^{-1}, \quad \alpha = -C_4^2, \quad G_0 = G(g_1^0)$$

а из (1.9) затем определяем

$$(2.5) \quad C^* = 2(\gamma - 1)^2 l^2 G_0^{-1}$$

Итак, все произвольные постоянные определены. Найдем теперь линии тока. Оказывается, что хотя интеграл в (1.8) не выражается в общем случае через элементарные функции, уравнения линий тока удастся проинтегрировать явно, взяв за параметр вдоль них величину  $g_1$ .

Фиксировав на окружности  $q$  точку

$$(2.6) \quad x_2^0 = R \cos \varphi, \quad x_3^0 = R \sin \varphi$$

так что

$$(2.7) \quad u_2^0 = Rl \cos(\varphi + \varphi_0), \quad u_3^0 = Rl \sin(\varphi + \varphi_0)$$

при помощи (1.8), (2.4), (2.5) приведем уравнения линий тока к виду

$$(2.8) \quad dx_k = -(\gamma - 1) B_k G^{-1/2} F^{-1/2} dG \\ F = 1 - \sin^2 \varphi_0 G_0^{-1} G, \quad B_k = u_k^0 2^{-1} (\gamma - 1)^{-1} l^{-1} G_0^{1/2}$$

Интегрируя (2.8) с учетом (2.6), (2.7), уравнения линий тока в параметрической форме приведем к виду

$$(2.9) \quad x_2 = R [\sin(\varphi + \varphi_0) \sin \varphi_0 + \cos(\varphi + \varphi_0) G_0^{1/2} G^{-1/2} F^{1/2}] \\ x_3 = R [-\cos(\varphi + \varphi_0) \sin \varphi_0 + \sin(\varphi + \varphi_0) G_0^{1/2} G^{-1/2} F^{1/2}]$$

Анализ представлений (2.9) непосредственно дает возможный диапазон изменения  $g_1$ , именно  $g_1 \in [g_-, g_+]$ ,  $g_{\pm} = 2^{1/2} (\gamma \pm 1)^{-1/2}$ . Значение  $g_1 = g_+$  соответствует точке возврата линий тока, а при  $g_1 = g_-$  давление и плотность обращаются в нуль (это происходит, когда линии тока уходят на бесконечность). Интеграл в (1.8), при этом будет расходиться, так как  $1/2 (1 - 2\gamma) (\gamma - 1)^{-1} < -1$ .

Радиус осесимметричного сопла, образованного линиями тока, исходящими из окружности  $q$ , будет определяться выражением

$$(2.10) \quad r = RG_0^{1/2} G^{-1/2}$$

Ясно, что при  $g_1 \rightarrow g_-$  имеем  $r \rightarrow \infty$  и  $x_1 \rightarrow \infty$ , т. е. стенки сопла неограниченно расширяются.

Для тяги  $T_L(\varphi_0)$  сопла, когда  $x_1 \in [0, L]$  и  $r \leq R_L(\varphi_0)$  ( $R_L(\varphi_0) = r(L)$ ), справедливо представление

$$(2.11) \quad \frac{1}{2\pi} T_L(\varphi_0) = \int_0^R p_0 r dr + I_L(\varphi_0) - \frac{1}{2} p_L R_L^2(\varphi_0)$$

$$I_L(\varphi_0) = \int_R^{R_L(\varphi_0)} p r dr$$

где  $p_0$  — давление на входе  $x_1 = 0$ ,  $p_L$  — противодавление на срезе  $x_1 = L$ . Первое и третье слагаемые в (2.11) не зависят от  $\varphi_0$ .

Рассмотрим поведение интеграла  $I_L(\varphi_0)$ . Функция  $G(g_1)$  (1.8) монотонно убывает ( $\beta = 2(\gamma - 1)^{-1}$ ) до нуля при  $g_1 \in [g_-, g_+]$ . Пусть второе уравнение (1.8) определяет функцию  $g_1 = g_1(G)$  и в сечении  $x_1 = L$  имеем  $g_1 = g_1(L, \varphi_0)$ ,  $G = G(L, \varphi_0)$ . Тогда из интеграла (1.8) при помощи (2.4), (2.5) для нахождения величины  $G(L, \varphi_0)$  получим уравнение

$$(2.12) \quad L = \frac{G_0^{1/2}}{2l} \int_{G(L, \varphi_0)}^{G_0} g_1(G) G^{-1/2} F^{-1/2} dG$$

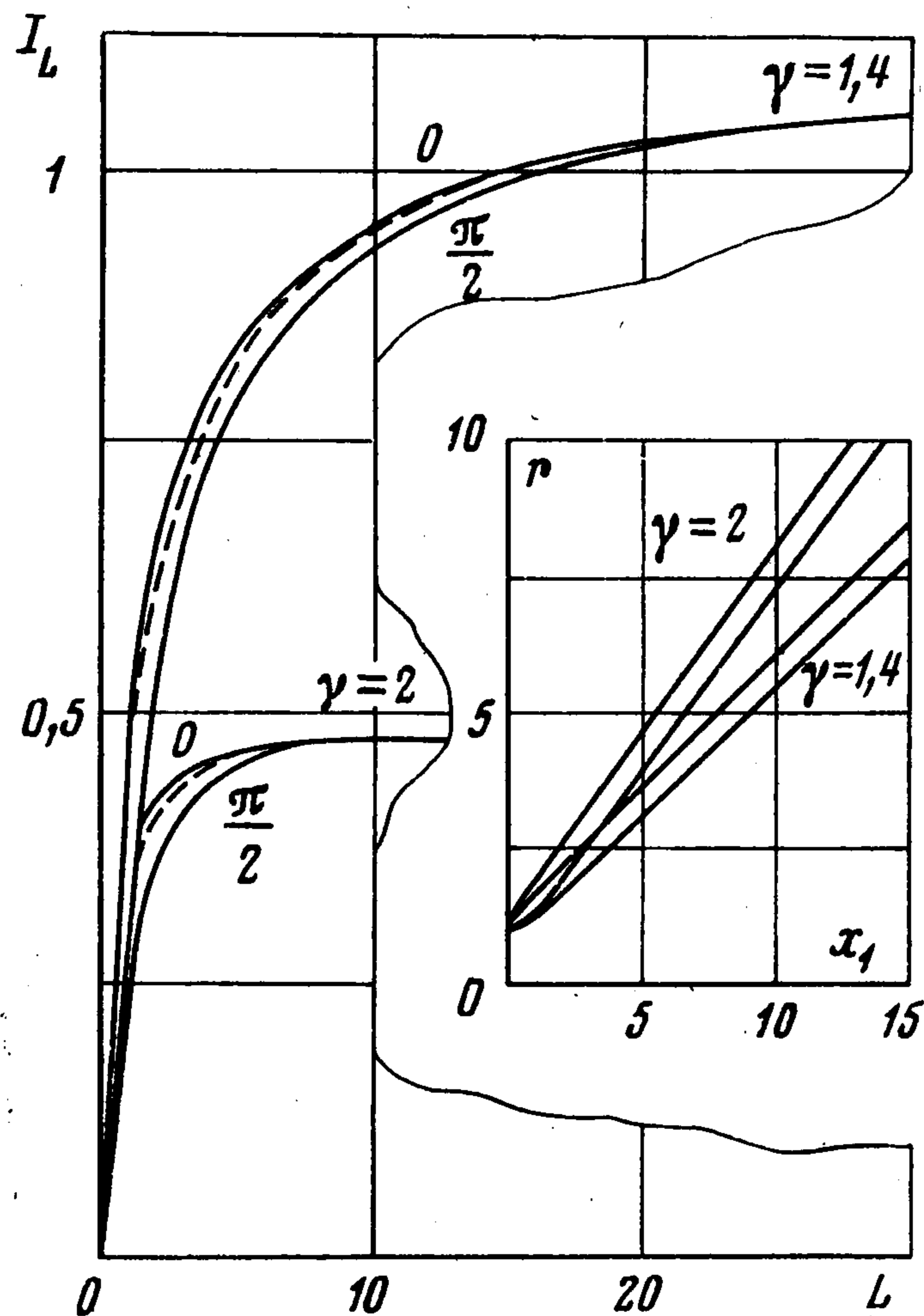
Из (2.12) для фиксированного  $L$  сразу же следует, что функция  $G(L, \varphi_0)$  при  $\varphi \in [0, \pi/2]$  монотонно возрастает ( $G(L, \varphi_0) < G_0$  и интеграл (2.12) в точке  $G = G_0$  сходится), а из (2.10) получаем тогда, что  $R_L(\varphi_0)$  — монотонно убывающая по  $\varphi_0$  функция. Интеграл  $I_L(\varphi_0)$  при помощи (2.10) представим в виде

$$(2.13) \quad I_L(\varphi_0) = I_0 \int_{G(L, \varphi_0)}^{G_0} g_1^{-\gamma}(G) G^{\gamma-2} dG$$

$$I_0 = 2^{(1-2\gamma)/(\gamma-1)} S_0^{(\gamma-2)/(\gamma-1)} (\gamma - 1)^{\gamma/(\gamma-1)} \gamma^{-1/(\gamma-1)} G_0 R^2$$

При  $L = \infty$  имеем  $G(\infty, \varphi_0) = 0$ , интеграл (2.13), так как  $\gamma > 1$ , сходится и не зависит от  $\varphi_0$ . При конечной же длине  $L$  интеграл  $I_L(\varphi_0)$  монотонно убывает с возрастанием  $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$ . Если в (2.11)  $p_L = 0$  (противодавление отсутствует), то тяга соответствующих сопел для конечных  $L$  с увеличением закрутки падает. Расчеты показывают, что падение тяги незначительно.

На фиг. 1 представлены графики  $I_L(\varphi_0)$  (штриховая линия соответствует  $\varphi_0 = \pi/4$ ) и стенки сопел в плоскости  $x_1, r$ , для  $\gamma = 1,4$  и  $\gamma = 2$ . Значения остальных параметров следующие:  $R = 1, S_0 = 1, g_1^0 = g_+ + 0,1, l = 1$ .



Фиг. 1

Отметим, что течение в сопле везде сверхзвуковое. Действительно, для скорости звука с получим выражение

$$c^2 = 1 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)g_1^2$$

Тогда при  $g_1 > g_+$  будем иметь  $|u|^2 > c^2$ .

При помощи (2.10) для больших  $x_1$  на стенках сопла получаем асимптотические оценки  $r = O(x_1), p = O(x_1^{-2\gamma})$ .

3. Рассмотрим пространственные течения с линейной зависимостью от одной координаты

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_i &= g_i(x_1, x_2), \\ i &= 1, 2; \\ u_3 &= f_3(x_1, x_2)x_3 + f_0(x_1, x_2) \\ Q &= g(x_1, x_2), S_0 = \text{const} \end{aligned}$$

Функции  $g_i, f_i$  и  $g$  удовлетворяют системе уравнений

$$(3.2) \quad \begin{aligned} g_1 \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} S_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, 2; \\ g_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + f_3 f_i &= 0, \quad i = 0, 3 \\ g_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + (\gamma - 1)g \left( f_3 + \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Исследуем класс осесимметричных движений (3.1) с осью симметрии  $x_3$  вида

$$(3.3) \quad \begin{aligned} g_1 &= a(\xi)x_1 - b(\xi)x_2, \quad g_2 = b(\xi)x_1 + a(\xi)x_2 \\ g &= g(\xi), \quad f_i = f_i(\xi), \quad \xi = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \end{aligned}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим следующую систему уравнений для функций  $a, b, g, f_i$ :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} a(2b + b'\xi) &= 0, \quad af_i'\xi + f_3 f_i = 0, \quad i = 0, 3 \\ a^2 - b^2 + aa'\xi + \gamma(\gamma - 1)^{-1}S_0\xi^{-1}g' &= 0 \\ ag'\xi + (\gamma - 1)g(f_3 + 2a + a'\xi) &= 0 \end{aligned}$$

Случай  $a \equiv 0$  (тогда и  $f_3 \equiv 0$ ) соответствует плоскопараллельным течениям. Из рассмотрения его, исключим. Из первых двух уравнений (3.4) получаем два простых интеграла

$$(3.5) \quad b = b_0\xi^{-2}, \quad f_0 = C_0 f_3; \quad b_0 = \text{const}, \quad C_0 = \text{const}$$

Не умаляя общности, полагаем  $C_0 = 0$ , так как задание  $C_0$  соответствует переносу начала координат по оси  $x_3$ .

При помощи (3.5) из оставшихся уравнений (3.4) получаем еще два интеграла

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\xi^2 a^2 + \gamma(\gamma - 1)^{-1} S_0 g + \frac{1}{2} b_0^2 \xi^{-2} &= C_1 = \text{const} \\ g &= C_2 (a\xi^2)^{1-\gamma} f_3^{\gamma-1}, \quad C_2 = \text{const} \end{aligned}$$

После этого задача интегрирования системы (3.4) сводится к задаче интегрирования одного уравнения первого порядка

$$(3.7) \quad a\xi f_3' + f_3^2 = 0$$

в которое следует подставить функцию  $a$ , выраженную через  $\xi$  и  $f_3$  при помощи (3.6). Осуществить интегрирование в квадратурах при произвольном  $\gamma$  здесь не удастся.

Отметим, что для решений (3.1) из (3.2) следует свойство, аналогичное установленному в п. 1: вдоль линий тока компонента скорости  $u_3$  сохраняет постоянное значение. Однако в отличие от предыдущего случая линии тока являются, вообще говоря, пространственными кривыми.

Решения (3.3) соответствуют вихревым неизоэнергетическим течениям. Постоянную  $C_\lambda$  в интеграле Бернулли для данной линии тока ( $u_3 = u_{3\lambda} = \text{const}$ ) с учетом (3.6) запишем в виде

$$(3.8) \quad C_\lambda = C_1 + \frac{1}{2} u_{3\lambda}^2$$

В плоском случае при  $u_3 \equiv 0$  аналоги построенных решений — потенциальные спиральные течения [11], для получения которых во втором интеграле (3.6) следует формально положить  $f_3 \equiv 1$ . Добавление компоненты  $u_3$ , зависящей от  $x_3$ , делает течение (3.3) вихревым.

Из (3.6) следует, что, так же как и для спиральных течений, при  $b_0 \neq 0$  необходимо исключить из области рассмотрения течения некоторую окрестность оси  $\xi = 0$  (иначе  $g$  становится отрицательной), т. е. следует строить течения в некоторых кольцевых осесимметричных каналах.

4. Исследуем особенности построенных в п. 3 решений, интерпретируя их как течения в полубесконечных кольцевых каналах ( $x_3 \geq 1$ ), вход в которые при  $x_3 = 1$  образует кольцо  $R_1 \leq \xi \leq R_2$ .

Для расхода  $P$  при помощи (3.6), (3.7) получим

$$(4.1) \quad P = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho f_3 \xi d\xi = 2\pi C_2^{1/(\gamma-1)} (f_3(R_1) - f_3(R_2))$$

Соответственно для потока полной энергии  $H$  с учетом (3.8) будем иметь

$$(4.2) \quad \begin{aligned} H &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} C_\lambda \rho f_3 \xi d\xi = \\ &= P \left[ C_1 + \frac{1}{6} (f_3^2(R_1) + f_3(R_1) f_3(R_2) + f_3^2(R_2)) \right] \end{aligned}$$

Если задать параметр  $b_0$ , характеризующий энергию закрутки газового потока, а также величины  $R_1, R_2$ , то в системе уравнений (3.6), (3.7), описывающей изучаемый класс течений, остаются свободными константы  $C_1, C_2$  и какое-либо начальное условие для уравнения (3.7), например,  $f_3(R_1) = f_3^0$ . С помощью подбора этих постоянных можно решить несколь-

ко задач. В частности, можно, задав величины  $P$  и  $H$ , а также  $f_3^0$ , рассматривать соотношения (4.1), (4.2) как систему уравнений для нахождения  $C_1, C_2$ , где величина  $f_3(R_2)$ , зависящая от  $C_1, C_2, b_0$ , неявно определяется после численного интегрирования уравнения (3.7) для  $\xi \in [R_1, R_2]$ . Таким способом можно, например, изучить влияние степени закрученности потока на тягу  $T$  в сечении  $x_3 = 1$

$$(4.3) \quad T(b_0) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} p(\xi) \xi d\xi, \quad p = S_0 g^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Из (3.4), (3.6) для производной  $g'$  получим представление

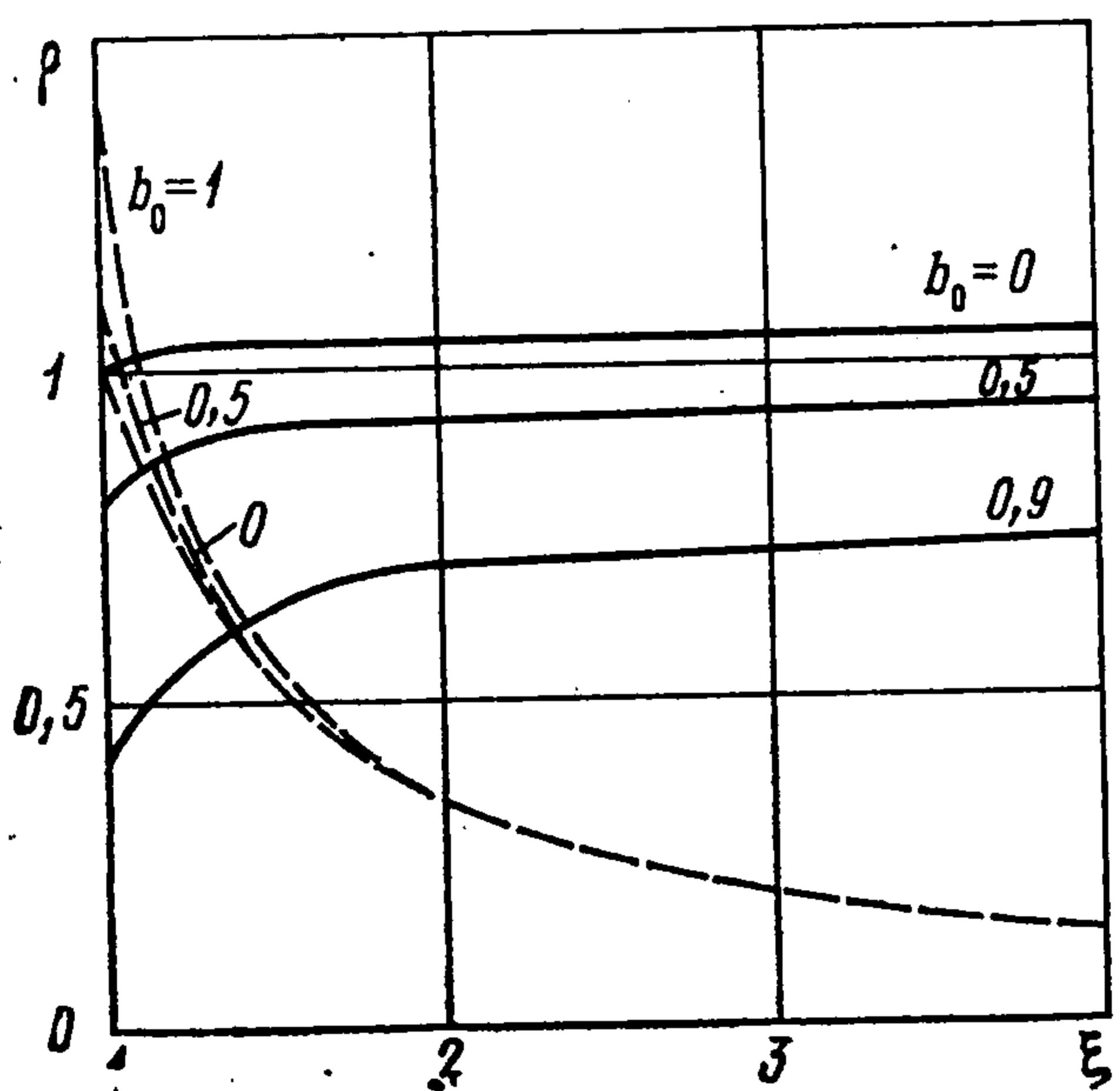
$$(4.4) \quad g' = \frac{2(\gamma-1)g[b_0^2 + a\xi^4(f_3 + a)]}{\xi[2C_1(\gamma-1)\xi^2 - (\gamma+1)\xi^4 a^2 - (\gamma-1)b_0^2]}$$

Из (4.4) видно, что в зависимости от значений постоянных  $C_1 > 0, b_0, a(R_2)$  (вместо начального условия для  $f_3(R_1)$  можно задать и  $a(R_1)$ ),  $g'(R_1)$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Таким образом, возможны два типа течений: типа А, когда плотность с увеличением радиуса растет,  $g'(R_1) > 0$ , и типа Б, когда плотность убывает,  $g'(R_1) < 0$ . Из (3.6) следует, что при возрастании  $\xi$  плотность не может расти неограниченно —  $g \leq (\gamma-1)\gamma^{-1}C_1S_0^{-1}$ , а в случае течения типа Б при  $\xi \rightarrow \infty$  плотность потока может падать до нуля. В случае течений типа А величина  $f_3$  очень быстро стремится к нулю с возрастанием  $\xi$ . Если при больших  $\xi$  будет  $g \approx g_0 = \text{const}$ , то из (3.6) имеем  $a\xi^2 f_3^{-1} \approx v_0 = \text{const}$ , а тогда из (3.7) получим  $f_3 = 0[s(\xi)]$ ,  $a\xi = O[\xi^{-1}s(\xi)]$ ,  $s(\xi) = \exp(-1/2 v_0 \xi^2)$ . Таким образом, с возрастанием радиуса продольная к оси вращения и радиальная компоненты вектора скорости быстро убывают, так что течение превращается в плоский вихрь.

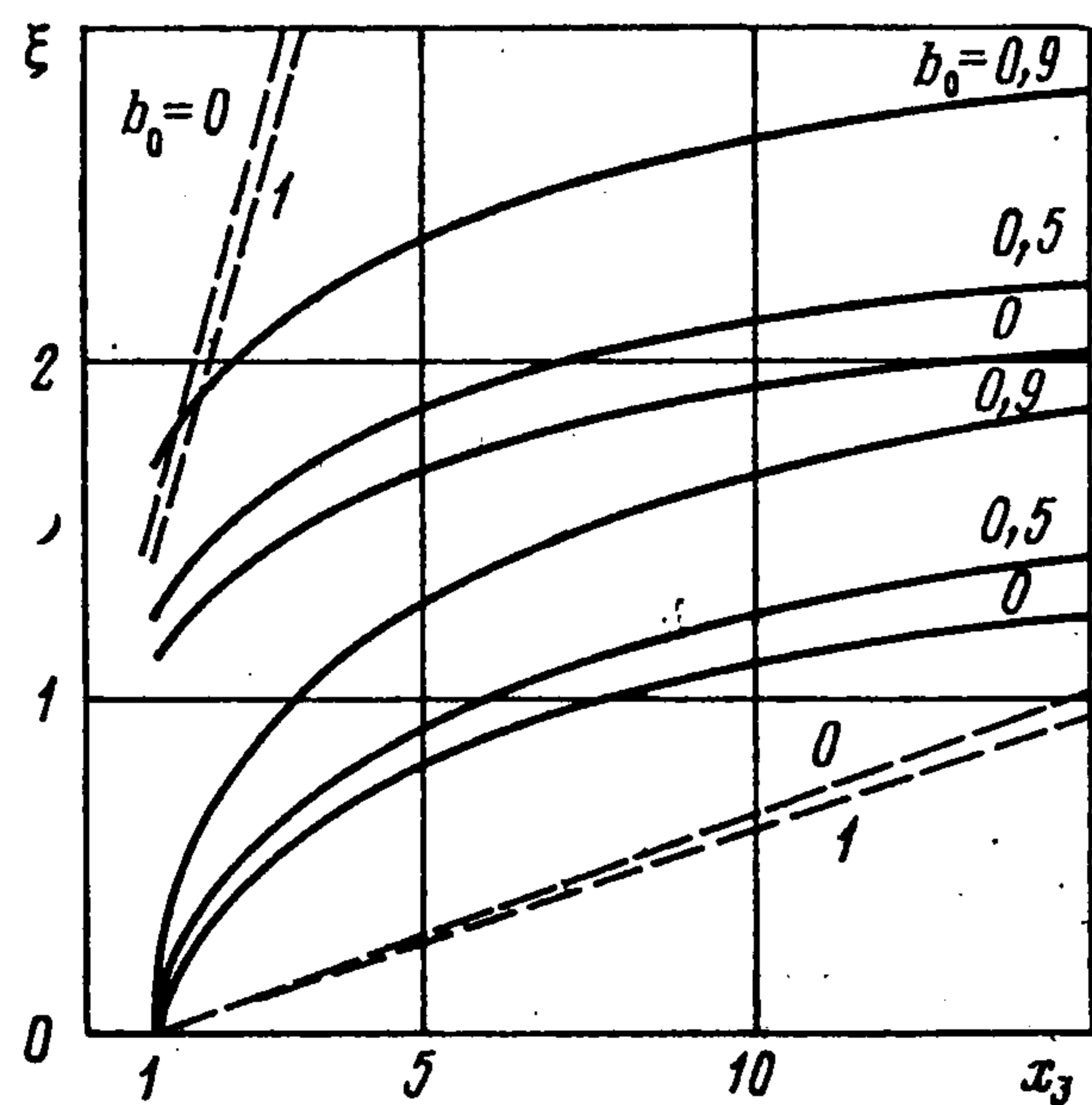
Для течений типа Б величина  $f_3$  с ростом  $\xi$  убывает гораздо медленнее. Если для больших  $\xi$   $g \rightarrow 0$  и  $a\xi = v_1 = \text{const} > 0$ , то из (3.6) имеем  $f_3 = O(\xi^{-1})$ .

Приведем некоторые результаты численных расчетов течений типов А и Б. Решалась следующая задача: значения  $P, H, f_3(R_1)$  и  $f_3(R_2)$  в (4.1), (4.2) фиксировались, по ним находились постоянные  $C_1, C_2$ , а величина  $R_2$  — наружный радиус кольца — находилась численным интегрированием уравнения (3.7) с начальным условием при  $R = R_1$  так, чтобы при  $\xi = R_2$  функция  $f_3$  принимала заданное значение  $f_3(R_2)$ . Параметр  $b_0$  варьировался.

На фиг. 2 изображены графики плотности для различных значений  $b_0$  ( $R_1 = 1$ ;



Фиг. 2



Фиг. 3

$f_3(1) = 1; f_3(R_2) = 0,1; \gamma = 1,4$ . Для течений типа А (сплошные линии)  $P = 1,79; H = 6,68$ , для течений типа Б (пунктирные линии)  $P = 13,85; H = 92,6$ .

На фиг. 3 изображены стенки кольцевых каналов для обоих типов течений (масштаб для случая Б следует увеличить в пятьдесят раз). Для течений типа А величина  $T(b_0)$  с ростом  $b_0$  уменьшается:  $T(0) = 4,63; T(0,5) = 4,36; T(0,9) = 3,75$ , а для течений типа Б — увеличивается:  $T(0) = 20,42; T(0,5) = 20,59; T(1) = 21,49$ .

В отличие от сверхзвуковых решений п. 2 рассмотренные течения могут быть смешанного типа с присутствием как сверхзвуковых, так и дозвуковых зон. Уравнение звуковой поверхности имеет вид

$$f_3^2 x_3^2 + a^2 \xi^2 + b_0^2 \xi^{-2} = \gamma S_0 g(\xi)$$

Автор благодарит О. Б. Хайруллину и О. Н. Ульянова за проведение численных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Закрученные течения сжимаемого газа в каналах.— Изв. АН СССР ОТН, 1956, № 6, с. 55—62.
2. Mager A. Approximate solution of isentropic swirling flow through a nozzle.— ARS Journal, 1961, v. 31, No. 8, p. 1140—1148.
3. Lewellen W. S., Burns W. J., Strickland H. J. Transonic swirling flow.— AIAA Journal, 1969, v. 7, No. 7, p. 1290—1297.
4. Славянов Н. Н. Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лаваля.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6, с. 85—92.
5. Горский В. Б. Трансзвуковое закрученное течение газа через сопло.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2, с. 75—80.
6. Наумова И. Н., Шмиглевский Ю. Д. Увеличение тяги сопла вращением потока.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1, с. 34—37.
7. Guderley K. G., Tabak D., Breiter M. C., Bhutani O. P. Continuous and discontinuous solutions for optimum thrust nozzles of given length.— J. Optimisation Theory and Applications, 1973, v. 12, No. 6, p. 588—628.
8. Тилляева Н. И. О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопел для неравномерных и закрученных течений.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3, 124—131.
9. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 448 с.
10. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений газовой динамики.— ПМТФ, 1980, № 5, с. 16—24.
11. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588 с.

Свердловск

Поступила в редакцию  
30.VI.1982