Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 5, 1983

УДК 531.552

О РЕЛАКСАЦИИ В ДИССИПАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Эскин Л. Д.

Получена асимптотика при больших временах $2n$-параметрического семейства решений гамильтоновой системы с n степенями свободы, модифицированной добавлением обобщенных диссипативных сил. Метод работы основан на предварительном изучении асимптотики решений линеаризованной системы уравнений и последующем применении принципа Шаудера в банаховом пространстве с подходящим образом выбранной нормой.

1. Цель работы — изучение релаксации в механической системе, уравнения движения которой будем записывать в виде

$$(1.1)\qquad p^{\cdot} = -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q} + Q(t,p,q), \quad q^{\cdot} = \frac{\partial H(p,q)}{\partial p}$$
$$H(p,q) = 2^{-1}(p^2 + q^2) + \Pi_1(q)$$

Здесь p, q — $(n \times 1)$-векторы (столбцы) обобщенных импульсов и координат, $(n \times 1)$-вектор $Q(t, p, q)$ задает выраженные в переменных $t \in R_+$, p, q лагранжевы силы. Разложение $\Pi_1(q)$ по координатам q_i начинается со слагаемых не ниже третьего порядка.

Далее будем предполагать, что для лагранжевых сил выполняется условие полной диссипации ([1], с. 221)

$$(1.2)\qquad \sum_i p_i Q_i(t,p,q) \leqslant -a(\|p\|)$$

где $a(x)$ — некоторая определенная на R_+ непрерывная, строго возрастающая функция, такая, что $a(0) = 0$. Показано [1], что если для системы выполнено условие полной диссипации, потенциальная энергия $\Pi(q)$ имеет изолированный минимум при $q = 0$ и $Q(t, p, q) \to 0$ при $p \to 0$ равномерно по $t \in R_+$, то начало фазового пространства $q = p = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Отметим, что из (1.2) и непрерывности Q следует ([1], с. 272)

$$(1.3)\qquad Q(t, 0, q) = 0$$

В п. 2 покажем, что при некоторых дополнительных ограничениях каждому вещественному $(2n \times 1)$-вектору c можно поставить в соответствие $t_1 = t_1(c)$, такое, что при $t \geqslant t_1$ $\exists$ вещественное решение (1.1), допускающее асимптотическое представление

$$y = \begin{Vmatrix} q \\ p \end{Vmatrix} = Y(t)(c + o(1)), \quad t \to \infty$$

где $Y(t)$ — вещественная фундаментальная матрица решений (ФМР) линейной системы, получающейся линеаризацией (1.1) около равновесия $q = p = 0$. При этом используются результаты работ [2, 3] об асимптотике решений линейных векторных дифференциальных уравнений общего вида с переменными коэффициентами для вычисления асимптотики ФМР линеаризованной системы; эта асимптотика дает нужные оценки матриц $Y(t)$, $Y^{-1}(t)$. Асимптотика решений системы (1.1) находится затем при помощи принципа Шаудера. При этом уравнение (1.1) заменяется нелинейным интегральным уравнением и последнее рассматривается в банаховом пространстве вектор-функций со специальным образом выбранной нормой (выбор нормы связан с асимптотикой решений линеаризованной системы).

Развиваемая здесь методика изучения релаксации в механических системах с диссипацией может быть применена и в других задачах с асимптотически устойчивым положением равновесия, не обязательно имеющих модифицированную добавлением обобщенных сил гамильтонову форму уравнений (1.1). Такие задачи часто встречаются не только в механике, но и в физике, биологии, химии.

Обсуждение введенных ограничений проводится в п.3, а в п.4 приводятся конкретные примеры, иллюстрирующие полученные результаты. Заметим, что фактически используется не условие полной диссипации (1.2), а лишь условие полной диссипативности линейной части лагранжевых сил, именно это условие выделяет тот класс механических систем, к которым применимы (разумеется, при выполнении остальных введенных ограничений) результаты, полученные в настоящей работе.

2. Линеаризуя (1.1) около равновесия $q = p = 0$, получим систему

$$q_i^{\cdot} = p_i,\ p_i^{\cdot} = -q_i + \sum_j a_{ij}(t)\,p_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

Отсутствие слагаемых $\sum_j b_{ij}(t)\,q_j$ во второй группе уравнений (2.1) следует из (1.3), $(n \times n)$-матрицу $A_1(t) = (a_{ij}(t))$, $a_{ij}(t) = \partial Q_i(t, 0, 0)/\partial p_j$ будем предполагать симметрической и отрицательно-определенной (см. (1.2)). Это и некоторые другие ограничения на A_1 сформулируем в виде следующего условия.

1°. $A_1(t)$ — симметрическая отрицательно-определенная $\forall t \in R_+$ матрица с конечным и также отрицательно-определенным $\lim_{t\to\infty} A_1(t) = B_1$, характеристические корни σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы B_1 просты (попарно различны), причем $\sigma_i \neq -2$.

Из отрицательной определенности B_1 следует, что $\sigma_i < 0$. Обозначая через $\sigma_i(t)$ характеристические корни матрицы $A_1(t)$, имеем $\lim_{t\to\infty}\sigma_i(t) = \sigma_i$, $\sigma_i(t) < 0$. Для вычисления асимптотики ФМР линейной системы (2.1) необходимо иметь определенный вариант условий регулярности поведения $A_1(t)$ при $t \to \infty$. Следуя [2], потребуем выполнения условия

2°. $A_1(t) \in C_2(0, \infty)$, $\quad \|A_1^{\cdot}\|^2 + \|A_1^{\cdot\cdot}\| \in L_1(0, \infty)$

Систему (2.1) можно записать в виде

$$y^{\cdot} = A(t)\,y \tag{2.2}$$

$$y = \begin{Vmatrix} q(t) \\ p(t) \end{Vmatrix} \text{— } (2n \times 1)\text{-вектор},$$

$$A(t) = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & A_1(t) \end{Vmatrix} \text{— } (2n \times 2n)\text{-матрица}$$

Пусть ортогональная матрица $T_1(t)$ диагонализует симметрическую матрицу $A_1(t)$ и $T_1 = \lim_{t\to\infty} T_1(t)$. Тогда

$$T_2^{-1}(t)\,A(t)\,T_2(t) = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & S(t) \end{Vmatrix} = R(t)$$

$$T_2^{-1}BT_2 = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & S \end{Vmatrix} = R, \quad R = \lim_{t\to\infty} R(t), \quad B = \lim_{t\to\infty} A(t)$$

$$S(t) = \operatorname{diag}\{\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t)\}, \quad S = \lim_{t\to\infty} S(t) = \\ = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$$

$$T_2(t) = \begin{Vmatrix} T_1(t) & 0 \\ 0 & T_1(t) \end{Vmatrix}, \quad T_2 = \lim_{t\to\infty} T_2(t) = \begin{Vmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{Vmatrix}$$

Характеристический многочлен матрицы $R(t)$ вычисляется при помощи формулы Шура (формула (1_1^a) в [4], с. 45) и оказывается равным

$$|R(t) - \mu E| = \prod_{i=1}^{n} (\mu^2 - \sigma_i(t)\mu + 1)$$

Следовательно, характеристические корни $\lambda_{i,\,n+i}$ матрицы B и $\lambda_{i,\,n+i}(t)$ матрицы $A(t)$ имеют вид (каждому $i = 1, 2, \ldots, n$ отвечают два корня $\lambda_{i,\,n+i}$)

$$\lambda_{i,\,n+i} = \frac{\sigma_i}{2} \pm \left(\frac{\sigma_i^2}{4} - 1\right)^{1/2} \tag{2.3}$$

$$\lambda_{i,\,n+i}(t) = \frac{\sigma_i(t)}{2} \pm \left(\frac{\sigma_i^2(t)}{4} - 1\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

Из (2.3), (2.4) и условия 1° (простота $\sigma_i \neq -2$) следует, что корни $\lambda_{i,\,n+i}$ матрицы B и $\lambda_{i,\,n+i}(t)$ матрицы $A(t)$ при $t > t_0 > 1$ просты, причем корни σ_i могут быть занумерованы таким образом, чтобы для $\nu_j(t) = \operatorname{Re}\lambda_j(t)$ при $t \geqslant t_0$ иметь $\max_j \nu_j(t) = \nu_1(t)$, $\min_j \nu_j(t) = \nu_{2n}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$. Тогда $0 > \nu_1(t) \geqslant \ldots \geqslant \nu_{2n}(t)$. Знак равенства здесь может встретиться лишь между вещественными частями комплексно-сопряженных корней.

Введем следующее условие для нелинейной части $Q_H = Q - A_1(t)\,p$ лагранжевых сил и $(n \times 1)$-вектора $\partial\Pi_1/\partial q$.

3°. В области $\Omega_\delta = \{y : \|y\| = \sum_i (|q_i| + |p_i|) < \delta < 1\}$ фазового пространства (q, p) равномерно по $t \in R_+$ справедлива оценка

$$\left\| Q_H - \frac{\partial\Pi_1}{\partial q} \right\| \leqslant c_1 \|y\|^m \tag{2.5}$$

где $c_1 > 0$ — некоторая постоянная, а $m > 1$ таково, что $d = m\nu_1 - \nu_{2n} < 0$; здесь $\nu_i = \lim_{t\to\infty}\nu_i(t)$.

Теперь можно сформулировать основной результат.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1.2) и условия 1°—3°. Тогда каждому вещественному $(2n \times 1)$-вектору c отвечает $t_1 = t_1(c) \geqslant 1$, такое, что при $\forall t \geqslant t_1$ уравнение (1.1) имеет вещественное решение $y(t)$, для которого справедливо асимптотическое представление

$$y(t) = \begin{Vmatrix} q(t) \\ p(t) \end{Vmatrix} = Y(t)(c + o(1)) \tag{2.6}$$

где $Y(t)$ — вещественная ФМР уравнения (2.2).

Для $Y(t)$ справедливо представление

$$(2.7) \qquad Y(t) = T(E + o(1)) \exp \int_{t_0}^{t} \Lambda(t)\, dt\, C$$

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{2n}(t)\}$$

T — невырожденная постоянная матрица, приводящая к диагональному виду матрицу B, C — также невырожденная постоянная матрица.

Доказательство. Сначала установим справедливость представления (2.7) для ФМР $Y(t)$, а затем и справедливость асимптотики (2.6) для решений (1.1). Так как корни $\lambda_{i,n+i}(t)$ при $t \geqslant t_0$ просты, то для этих tЭ матрица $T_3(t)$, диагонализующая матрицу $R(t)$, тогда $T_3 = \lim_{t\to\infty} T_3(t)$ диагонализует R, а $T(t) = T_2(t)\, T_3(t) - A(t)$. Для вычисления асимптотики $Y(t)$ понадобятся матрицы $T(t)$, $T^{-1}(t)$ и диагональная матрица

$$\Lambda_1(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{11}(t), \ldots, \lambda_{12n}(t)\} = -\operatorname{diag}\{T^{-1}(t)\, T^{\cdot}(t)\}$$

Таким образом, $\lambda_{1i} = -(T^{-1}(t)\, T^{\cdot}(t))_{ii}$ (гладкость $T(t)$ совпадает с гладкостью $A(t)$). Матрицы $T_3(t)$, $T_3^{-1}(t)$ удовлетворяют матричным уравнениям

$$(2.8) \qquad R(t)\, T_3(t) = T_3(t)\, \Lambda(t)$$

$$(2.9) \qquad T_3^{-1}(t)\, R(t) = \Lambda(t)\, T_3^{-1}(t)$$

$$(2.10) \qquad T_3^{-1}(t)\, T_3(t) = E$$

Из (2.8) и условия 1° следует (ниже опускаем аргумент t у элементов $t_{ij}(t)$ матрицы $T_3(t)$ и $\tau_{ij}(t)$ матрицы $T_3^{-1}(t)$, а также и у корней $\lambda_i(t)$, $\sigma_i(t)$), что $t_{ij} = t_{n+ij} = t_{in+j} = t_{n+in+j} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $t_{n+jj} = \lambda_j t_{jj}$, $t_{n+jn+j} = \lambda_{n+j} t_{jn+j}$, причем t_{jj}, t_{jn+j} остаются произвольными.

Положив $t_{jj} = t_{jn+j} = 1$, найдем

$$T_3(t) = \begin{Vmatrix} E & E \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{Vmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \quad \Lambda_3 = \operatorname{diag}\{\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{2n}\}$$

Из (2.9) следует $\tau_{ij} = \tau_{in+j} = 0$ при $i \neq j$, $n + j$, $\tau_{jn+j} = -\lambda_j \tau_{jj}$, $\tau_{n+jn+j} = -\lambda_{n+j} \tau_{n+jj}$, причем τ_{jj}, τ_{n+jj}, $j = 1, 2, \ldots, n$, из (2.9) не определяются. Для их определения вычислим диагональные элементы в (2.10). Получим

$$\tau_{jj} t_{jj} + \tau_{jn+j} t_{n+jj} = 1, \quad \tau_{n+jj} t_{jn+j} + \tau_{n+jn+j} t_{n+jn+j} = 1$$

откуда после подстановки уже найденных значений t_{jj}, t_{n+jj}, t_{jn+j}, t_{n+jn+j}, τ_{jn+j}, τ_{n+jn+j} найдем τ_{jj} и τ_{n+jj}. Так как $\lambda_j \lambda_{n+j} = 1$, то окончательные формулы для элементов матрицы $T_3^{-1}(t)$, отличных от нуля, имеют вид

$$\tau_{jn+j} = (\lambda_j - \lambda_{n+j})^{-1}, \quad \tau_{n+jn+j} = (\lambda_{n+j} - \lambda_j)^{-1}$$

$$\tau_{jj} = \lambda_{n+j}/(\lambda_{n+j} - \lambda_j), \quad \tau_{n+jj} = \lambda_j/(\lambda_j - \lambda_{n+j})$$

Теперь можно вычислить матрицу Λ_1. Очевидно (снова опускаем аргумент t)

$$(2.11) \qquad T^{-1}T^{\cdot} = T_3^{-1}(T_2^{-1}T_2^{\cdot})\, T_3 + T_3^{-1}T_3^{\cdot}$$

Матрица $P = T_2^{-1}T_2^{\cdot}$ диагонально-блочна и ее диагональные блоки $T_1^{-1}T_1^{\cdot}$ кососимметричны в силу ортогональности T_1. Вычисляя i-й диагональный элемент в первом слагаемом в правой части (2.11), с учетом структуры матриц T_3, T_3^{-1} найдем, что для $i = 1, 2, \ldots, n$ он равен

$$\sum_{k,\, r=1}^{n} \tau_{ik} p_{kr} t_{ri} = \tau_{ii} (p_{ii} t_{ii} + p_{in+i} t_{n+ii}) + \tau_{in+i} (p_{n+ii} t_{ii} + p_{n+in+i} t_{n+ii}) = 0$$

так как $p_{ii} = p_{n+in+i} = 0$ в силу кососимметричности P, а $p_{in+i} = p_{n+ii} = 0$, так как P диагонально блочна. Аналогичный результат получается и для $i = n + 1, n + 2, \ldots, 2n$. Следовательно, $(T^{-1}T^{\cdot})_{ii} = (T_3^{-1}T_3^{\cdot})_{ii}$, так что

$$\lambda_{1i} = \lambda_i^{\cdot} (\lambda_{n+i} - \lambda_i)^{-1}, \quad \lambda_{1n+i} = \lambda_{n+i}^{\cdot} (\lambda_i - \lambda_{n+i})^{-1}$$

Формулы (2.4) позволяют теперь выразить элементы матрицы Λ_1 непосредственно через корни $\sigma_i(t)$ матрицы $A_1(t)$

$$(2.12) \qquad \lambda_{1i} = -\frac{\sigma_i^{\cdot}}{2} \left(\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_i^2(t) - 4} + (\sigma_i^2(t) - 4)^{-1/2} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\lambda_{1n+i} = -\frac{\sigma_i^{\cdot}}{2} \left(\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_i^2(t) - 4} - (\sigma_i^2(t) - 4)^{-1/2} \right)$$

Из условия 2° следует $\| A_1^{\cdot} \| = o(1)$, откуда $\sigma_i^{\cdot} = o(1)$, а в силу (2.12) и

$$(2.13) \qquad \lambda_{1i} = o(1), \quad i = 1, 2, \ldots, 2n$$

Рассмотрим теперь функцию

$$I_{ij}(t) = \mathrm{Re}\,(\lambda_i(t) + \lambda_{1i}(t) - \lambda_j(t) - \lambda_{1j}(t)), \quad t \geqslant t_0 \gg 1$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, 2n; \; i \neq j$$

В случае $j \neq i + n$ из условия 1° и (2.13) следует оценка

$$(2.14) \qquad | I_{ij}(t) | \geqslant \beta > 0$$

(β — некоторая постоянная). Оценка (2.14) остается справедливой и в случае $j = i + n$, $\lim_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \sigma_i < -2$, что снова следует из 1°, (2.4) и (2.13) (при условии $\sigma_i < -2$, $\lambda_{i,\, n+i}(t)$, $\lambda_{1i}(t)$, $\lambda_{1n+i}(t)$ вещественны при $t \geqslant t_0$). Если же $0 > \sigma_i > -2$, то из (2.4), (2.12) находим $\lambda_{n+i}(t) = \bar{\lambda}_i(t)$, $\lambda_{1n+i}(t) = \bar{\lambda}_{1i}(t)$, так что

$$(2.15) \qquad I_{in+i}(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_0$$

Оценка (2.14) и тождество (2.15) показывают, что условия 1°—2° позволяют применить для вычисления асимптотики ФМР уравнения (2.2) теорему 3.1 [2], при помощи которой получим, что при $t \geqslant t_0$ (2.2) имеет ФМР

$$(2.16) \qquad Y_1(t) = T(t)(E + o(1)) \exp \int_{t_0}^{t} (\Lambda + \Lambda_1)\, dt$$

Но из (2.12) и условия 1° следует существование конечного

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \Lambda_1(t)\, dt = C_1$$

Умножив матрицу $Y_1(t)$ справа на постоянную матрицу $\exp(-C_1)$, найдем, что уравнение (2.2) в случае выполнения условий 1°, 2° имеет

ФМР $Y_2(t)$, для которой справедливо представление

$$(2.17) \qquad Y_2(t) = T(E + o(1)) \exp \int_{t_0}^{t} \Lambda\, dt$$

($T = \lim_{t\to\infty} T(t)$ — постоянная невырожденная матрица, приводящая к диагональному виду матрицу B). Очевидно, для $Y_2^{-1}(t)$ будем иметь

$$(2.18) \qquad Y_2^{-1}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \Lambda\, dt\right)(E + o(1))\, T^{-1}$$

Матрица Y_2 может оказаться комплексной (так будет, если среди корней $\lambda_{i,\, n+i}(t)$ окажутся комплексные, т. е. если $0 > \sigma_i > -2$ для некоторого i, в противном случае Y_2 — вещественная матрица). Но коэффициенты уравнения (2.2) вещественны, и оно, следовательно, обладает вещественными ФМР; например, таковой будет ФМР $Y(t)$, удовлетворяющая начальному условию $Y(0) = E$. Так как любые две ФМР уравнения (2.2) различаются лишь правым невырожденным постоянным множителем, то вещественная ФМР имеет вид $Y(t) = Y_2(t)\, C$, где C — некоторая невырожденная матрица (вообще говоря, комплексная; в случае же, когда все $\sigma_i < -2$, можно положить $C = E$). Из (2.17) следует представление (2.7) для $Y(t)$. Из (2.17), (2.18) и оговоренного выше условия нумерации корней σ_i получаем играющие далее важную роль оценки ($c_{2,3} > 0$ — некоторые постоянные)

$$(2.19) \qquad \| Y(t) \| \leqslant c_2 \exp \int_{t_0}^{t} \nu_1(\tau)\, d\tau, \quad t \geqslant t_0$$

$$(2.20) \qquad \| Y^{-1}(s) \| \leqslant c_3 \exp \int_{s}^{t_0} \nu_{2n}(\tau)\, d\tau, \quad s \geqslant t_0$$

Перейдем к вычислению асимптотики $2n$-параметрического семейства решений уравнения (1.1), записав его предварительно в виде (f — $(2n \times 1)$-вектор)

$$(2.21) \qquad y^{\cdot} = A(t)\, y + f$$

$$y = \begin{Vmatrix} q(t) \\ p(t) \end{Vmatrix}, \quad A(t) = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & A_1(t) \end{Vmatrix}, \quad f = \begin{Vmatrix} 0 \\ Q_{\text{н}} - \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial q} \end{Vmatrix}$$

Перейдем от уравнения (2.21) к интегральному уравнению (c — произвольный вещественный $(2n \times 1)$-вектор)

$$(2.22) \qquad y(t) = Y(t)\, c - \int_{t}^{\infty} Y(t)\, Y^{-1}(s)\, f(s, y(s))\, ds = (Iy)(t)$$

Очевидно, t_0 можно выбрать так, чтобы иметь (см. условие 3°)

$$(2.23) \qquad m\nu_1(t) - \nu_{2n}(t) \leqslant d/2, \quad \nu_1(t) \leqslant \nu_1/2, \quad t \geqslant t_0$$

Пусть теперь α — некоторая постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$0 < \alpha < \min\{-d/(4m),\ -\nu_1/4\}$$

Введем банахово пространство W $(2n \times 1)$-вектор-функций

$$y(t) = \begin{Vmatrix} q(t) \\ p(t) \end{Vmatrix}$$

непрерывных при $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$ (t_1 будет выбрано ниже) с нормой

$$\| y(t) \|_1 = \sup_{t \geqslant t_1} \{\varphi(t) \sum_i (|q_i(t)| + |p_i(t)|)\} < \infty$$

$$\left(\varphi(t) = \exp\left(-\alpha(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} \nu_1(\tau)\, d\tau\right)\right)$$

и рассмотрим шар $W_\delta = \{y \in W\colon \| y \|_1 \leqslant \delta\}$, здесь $\delta > 0$ — то же, что и в условии 3°.

Покажем, прежде всего, что оператор I из (2.22) оставляет инвариантным шар W_δ, если $t_1 = t_1(\delta, c)$ достаточно велико. В силу определения нормы в W из включения $y \in W_\delta$ следует, что $\forall t \geqslant t_1$ точка $(q(t), p(t))$ фазового пространства принадлежит Ω_δ, так что для $y \in W_\delta$ справедлива оценка (2.5), которая может быть теперь записана в виде

$$\| f(s, y(s)) \| \leqslant c_1 \delta \exp\left(m\alpha(s - t_0) + m \int_{t_0}^{s} \nu_1(\tau)\, d\tau\right), \quad y \in W_\delta \tag{2.24}$$

(так как $\delta < 1$, то $\delta^m < 1$).

С целью упрощения записи дальнейших выкладок обозначим

$$\psi(t) = \int_t^\infty \exp\left\{m\alpha(s - t_0) + \int_{t_0}^{s} (m\nu_1(\tau) - \nu_{2n}(\tau))\, d\tau\right\} ds$$

Сходимость интеграла обеспечена оценкой (2.23) и условием выбора α. Используя оценки (2.19), (2.20), (2.24), найдем

$$\| Iy \|_1 \leqslant \exp(-\alpha(t_1 - t_0))\, (c_2 \| c \| + \delta c_1 c_2 c_3 \psi(t_1)) \leqslant \delta,$$
$$y \in W_\delta$$

если $t_1 = t_1(\delta, c)$ достаточно велико.

Оператор I является непрерывным отображением $W_\delta \to W_\delta$.

Пусть $y_l \to y$ по норме W, y_l, $y \in W_\delta$. Тогда из (2.22) при помощи (2.19), (2.20) находим

$$\begin{aligned} \| Iy_l - Iy \|_1 &\leqslant c_2 c_3 \sup_{t \geqslant t_1} \Big\{\exp(-\alpha(t - t_0)) \times \\ &\times \int_t^\infty \exp\left(-\int_{t_0}^{s} \nu_{2n}(\tau)\, d\tau\right) \| f(s, y_l(s)) - f(s, y(s)) \| ds\Big\} \leqslant \\ &\leqslant c_2 c_3 \int_{t_1}^\infty \exp\left(-\int_{t_0}^{s} \nu_{2n}(\tau)\, d\tau\right) \| f(s, y_l(s)) - f(s, y(s)) \| ds \end{aligned} \tag{2.25}$$

Необходимо проверить, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, такое, что $\| Iy_l - Iy \|_1 \leqslant \varepsilon$, если $\| y_l - y \|_1 \leqslant \delta_1(\varepsilon)$, т. е. если

$$\sum_i (|q_{il}(s) - q_i(s)| + |p_{il}(s) - p_i(s)|) \leqslant$$
$$\leqslant \delta_1(\varepsilon) \exp\left(\alpha(s - t_0) + \int_{t_0}^{s} \nu_1(\tau)\, d\tau\right) \leqslant \delta_1(\varepsilon)$$

Но из включения y_l, $y \in W_\delta$ при $t \geqslant t_1$ получаем при помощи (2.24)

$$\int_t^\infty \exp\left(-\int_{t_0}^{s} \nu_{2n}(\tau)\, d\tau\right) \| f(s, y_l(s)) - f(s, y(s)) \| ds \leqslant 2\delta c_1 \psi(t) \tag{2.26}$$

Разобьем интеграл в правой части (2.25) на сумму двух интегралов

$$\int_{t_1}^{\infty} = \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{\infty} \tag{2.27}$$

Из оценки (2.26) следует, что $t_2 = t_2(\varepsilon)$ можно выбрать настолько большим, чтобы второе слагаемое в правой части (2.27) не превышало $\varepsilon/(2c_2c_3)$. Затем $\delta_1(\varepsilon)$ можно выбрать настолько малым, что в силу равномерной непрерывности вектор-функции f не будет превышать $\varepsilon/(2c_2c_3)$ и первое слагаемое в правой части (2.27). Из (2.25) теперь следует непрерывность оператора I в W_δ.

Для доказательства компактности образа IW_δ достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие полуоси $[t_1, \infty)$ — открытыми множествами, на каждом из которых колебание всех вектор-функций $y_1(t) = \varphi(t)(Iy)(t)$ не превышает $\varepsilon \forall y \in W_\delta$.

Из (2.22) найдем при $t' \geqslant t'' \geqslant t_1$

$$y_1(t') - y_1(t'') = (\varphi(t')Y(t') - \varphi(t'')Y(t''))c +$$
$$+ \varphi(t'')Y(t'')\int_{t''}^{t'} Y^{-1}(s) f(s, y(s))\,ds +$$
$$+ (\varphi(t'')Y(t'') - \varphi(t')Y(t'))\int_{t'}^{\infty} Y^{-1}(s) f(s, y(s))\,ds$$

откуда с учетом оценок (2.19), (2.20) и (2.24) найдем

$$\begin{aligned}\|y_1(t') - y_1(t'')\| \leqslant \|\varphi(t')Y(t') - \varphi(t'')Y(t'')\| \times \\ \times (\|c\| + \delta c_1c_3\psi(t_1)) + \delta c_1c_2c_3 \exp(-\alpha(t'' - t_0))(\psi(t'') - \psi(t'))\end{aligned} \tag{2.28}$$

Кроме того

$$\|\varphi(t')Y(t') - \varphi(t'')Y(t'')\| \leqslant c_2e^{\alpha t_0}(e^{-\alpha t'} + e^{-\alpha t''}) \tag{2.29}$$

Из оценок (2.28), (2.29) следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists t_3(\varepsilon)$, такое, что

$$\|y_1(t') - y_1(t'')\| \leqslant \varepsilon,\ \forall y \in W_\delta,\ \forall t',\ t'' \geqslant t_3(\varepsilon)$$

Далее, из (2.28) также следует, что интервал $(t_1, t_3(\varepsilon))$ можно покрыть конечным числом интервалов длины $\delta_2(\varepsilon)$, в каждом из которых колебание вектор-функций $y_1(t)$ не превосходит $\varepsilon\ \forall y \in W_\delta$ (это следует из равномерной непрерывности на отрезке $[t_1, t_3(\varepsilon)]$ матрицы $\varphi(t)\,Y(t)$ и функции $\psi(t)$). Таким образом, найдено требуемое конечное покрытие полуоси $[t_1, \infty)$ открытыми множествами, в каждом из которых колебание вектор-функций $y_1(t)$ $\forall y \in W_\delta$ не превосходит ε.

Согласно принципу Шаудера, можно теперь утверждать, что уравнение (2.22) имеет решение в W_δ, т. е. решение $y(t)$, для которого справедлива оценка (2.24). Оценивая при помощи (2.24) интеграл в правой части (2.22), найдем

$$\left\|\int_t^{\infty} Y^{-1}(s) f(s, y(s))\,ds\right\| \leqslant \delta c_1c_3\psi(t) = o(1)$$

Поэтому из (2.22) для построенного решения $y(t)$, зависящего от $2n$ произвольных постоянных (координат вектора c), следует справедливость асимптотического представления (2.6). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Доказательство теоремы 1 основано на использовании условия 3° и оценок (2.19), (2.20) для вещественной ФМР линеаризованной системы. Эти оценки получены из асимптотических представлений (2.17), (2.18) для этой матрицы, справедливость которых обеспечивается условиями 1°, 2°. Однако представления (2.17), (2.18), а вместе с ними и оценки (2.19), (2.20) останутся справедливыми, если условие 2° заменить более общим (но и более громоздким) условием

$2^{\circ\prime}$. Для некоторого целого $k \geqslant 2$.

$$A_1(t) \in C_k(0, \infty), \quad \| A_1^{(s)} \| = o(1), \quad s = 1, 2, \ldots, k-2;$$

$$\| A_1^{(s)} \|^2 + \| A_1^{(k)} \| \in L_1(0, \infty), \quad s = 1, 2, \ldots, k-1$$

при доказательстве этого факта следует вместо торемы 3.1 [2] воспользоваться теоремой 1 из [3]). Таким образом, теорема 1 остается в силе, если в ее формулировке условие 2° заменить условием $2^{\circ\prime}$.

Замечание 2. Если система (1.1) автономна, т. е. матрица $A(t)$ постоянна, $A(t) \equiv A$, то в (2.6) можно положить $Y(t) = \exp(tA)$.

3. Коротко обсудим условия 1° — 3° теоремы 1. Прежде всего, отметим, что если не требовать симметричности матрицы $A_1(t)$, то условие полной диссипации приводит к требованию отрицательной определенности симметрической матрицы $A_1(t) + A_1^T(t)$, если $A_1(t) \not\equiv 0$ (индекс T означает транспонирование). Изложенный в п. 2 метод может быть использован и в этом случае, но условие симметричности матрицы $A_1(t)$ существенно упрощает как проведение выкладок, так и формулировку результатов. В случае же, когда лагранжевы силы Q не зависят явно от t (т. е. система (1.1) автономна), симметричность (постоянной) матрицы A_1 следует из физических соображений, а именно из принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера ([5], с. 403). Условие 2° для автономной системы выполняется автоматически.

Еще раз подчеркнем важную роль требования отрицательной определенности матрицы $A_1(t)$ в условии 1°, следующего из условия полной диссипативности линейной части лагранжевых сил. Именно это условие и выделяет тот класс механических систем, изучение релаксации в которых можно проводить при помощи развитой здесь методики. Условие 2° носит характер условия регулярности поведения элементов матрицы $A_1(t)$ при $t \to \infty$, а условие 3° есть некоторое условие «близости» нелинейны частей, действующих на систему лагранжевых и потенциальных сил.

Рассмотрим теперь систему с одной степенью свободы ($n = 1$). Условие симметричности для матрицы $A_1(t) = (\sigma_1(t))$ теперь выполняется автоматически, и условие 1° сводится к требованию $\sigma_1 = \lim_{t\to\infty} \sigma_1(t) \neq -2$ и отрицательно. Условие регулярности 2° при $n = 1$ принимает вид $\sigma_1^{\cdot 2} + |\sigma_1^{\cdot\cdot}| \in L_1(0, \infty)$.

В колебательном случае $0 > \sigma_1 > -2$, очевидно, будем иметь $\nu_1 = \nu_2 = \sigma_1/2$, и условие 3° означает, что оценка (2.5) должна выполняться при каком-либо $m > 1$. В апериодическом случае $\sigma_1 < -2$

$$\nu_1 = (\sigma_1 + (\sigma_1^2 - 4)^{1/2})/2, \quad \nu_2 = (\sigma_1 - (\sigma_1^2 - 4)^{1/2})/2$$

и число m в оценке (2.5) теперь должно удовлетворять неравенству

$$m > \frac{\sigma_1 - (\sigma_1^2 - 4)^{1/2}}{\sigma_1 + (\sigma_1^2 - 4)^{1/2}}$$

из которого следует, что m должно увеличиваться с убыванием σ_1, чтобы удовлетворялось условие 3°.

4. Для иллюстрации теоремы 1 рассмотрим пример маятника, находящегося под действием сил вязкого трения. Уравнение движения имеет вид

$$q^{\cdot\cdot} + h(t) q^{\cdot} + \sin q = 0 \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) приведется к системе (1.1), если положить

$$q^{\cdot} = p, \ H = 2^{-1}p^2 - \cos q + 1, \ Q(t, p, q) = -h(t)\, p$$

Матрица $A_1(t) = (-h(t))$ и условия 1°, 2° сводятся к требованию существования конечного предела

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = h > 0, \quad h \neq 2 \tag{4.2}$$

и включения

$$h^{\cdot 2} + |h^{\cdot\cdot}| \in L_1(0, \infty) \tag{4.3}$$

Так как в рассматриваемом примере нелинейная часть лагранжевых сил $Q_H(t, p, q) \equiv 0$, а $\Pi_1 = H - 2^{-1}(p^2 + q^2) = O(q^4)$ и $d\Pi_1/dq = O(|q|^3)$, то оценка

(2.5) в условии 3° выполняется при $m = 3$. Характеристические корни $\lambda_{1,2}$ матрицы

$$B = \lim_{t\to\infty} A(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -h \end{Vmatrix}$$

имеют вид $\lambda_{1,2} = -2^{-1}h \pm (h^2/4 - 1)^{1/2}$, поэтому условие 3° сводится к требованию

(4.4) $$0 < h < 4/\sqrt{3}$$

Колебательному случаю соответствуют значения $h < 2$, апериодическому — $h > 2$. Таким образом, для уравнения (4.1) условия применимости теоремы 1 сводятся к выполнению (4.2) — (4.4).

Выпишем на основании теоремы 1 асимптотику двухпараметрического семейства решений для колебательного случая $h < 2$ (апериодический случай рассматривается проще, и на нем не останавливаемся). Матрицу $Y(t)$ построим по матрице $Y_2(t)$ из (2.17), взяв в качестве ее первого столбца вещественную, а в качестве второго — мнимую часть первого столбца матрицы $Y_2(t)$. После простых выкладок для решений уравнения (4.1) получим следующие асимптотические представления ($b_{1,2}$ — координаты вектора c):

$$q(t) = \left(b_1 \cos\int_{t_0}^{t} \eta_1(\tau)\, d\tau + b_2 \sin\int_{t_0}^{t} \eta_1(\tau)\, d\tau + o(1)\right) \exp\int_{t_0}^{t} \nu_1(\tau)\, d\tau$$

$$p(t) = \Big[(b_1\nu_1(t) + b_2\eta_1(t)) \cos\int_{t_0}^{t} \eta_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ (b_2\nu_1(t) - b_1\eta_1(t)) \sin\int_{t_0}^{t} \eta_1(\tau)\, d\tau + o(1)\Big] \exp\int_{t_0}^{t} \nu_1(\tau)\, d\tau$$

$$\nu_1(t) = \operatorname{Re}\lambda_1(t) = -h(t)/2,\ \eta_1(t) = \operatorname{Im}\lambda_1(t) = (1 - h^2/4)^{1/2}$$

Замечание 3. Только что использованный прием построения вещественной ФМР $Y(t)$ линеаризованной системы (2.2) по ФМР $Y_2(t)$ с асимптотикой (2.17) можно применять и в общем случае n степеней свободы. Если корни $\lambda_{i,n+i}$ невещественны (тогда $\lambda_i = \overline{\lambda}_{n+i}$), то в качестве i-го и $(n+i)$-го столбцов матрицы $Y(t)$ берем соответственно вещественную и мнимую части i-го столбца матрицы $Y_2(t)$. Если же $\lambda_{i,n+i}$ вещественны, то в качестве i-го и $(n+i)$-го столбцов матрицы $Y(t)$ берем столбцы с этими номерами в матрице $1/2\,(Y_2(t) + \overline{Y}_2(t))$. Тот факт, что таким путем получаем вещественную ФМР $Y(t)$ линеаризованной системы (2.2), проверяется при помощи асимптотического представления (2.17) для $Y_2(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.— Матем. сб., 1969, т. 79, № 4, с. 477—516.
3. *Эскин Л. Д.* Об асимптотике решений системы $y' = \mu A(x)\, y$.— Изв. вузов. Математика, 1978, № 3, с. 99—102.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Гостехиздат, 1953. 492 с.
5. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 583 с.

Казань

Поступила в редакцию
19.VI.1981