

УДК 531.36

## ОБ ИМПУЛЬСИВНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ УДАРЕ О ШЕРОХОВАТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Синицын В. А.

Рассматривается абсолютно твердое плоское тело, контактирующее с плоской поверхностью конечной площадью, в каждой точке которой трение локально описывается законом Кулона с постоянным коэффициентом трения скольжения. Уточнена модель движения тела по шероховатой поверхности [1]. Составлены дифференциальные уравнения импульсивного движения плоского твердого тела (пластины) с круговой площадью контакта. Для частных случаев движения получены зависимости между скоростью скольжения центра основания и угловой скоростью пластины. Установлено условие, при котором мгновенный центр скоростей основания в процессе импульсивного движения тождественно совпадает с центром площади основания.

Удар твердого тела о шероховатую поверхность ранее изучался при условии точечного контакта ([2] и др.)

1. Рассмотрим основные предположения работы [1] о взаимодействии твердого тела с плоским основанием при движении по плоской поверхности с трением.

Для абсолютно твердого тела и плоскости задача является неопределенной, так как соприкосновение происходит в бесконечном числе точек. Поэтому допускается незначительная деформация поверхности, пропорциональная местному давлению твердого тела на поверхность. Поверхность соприкосновения принимается плоской, ее уравнение

$$(1.1) \quad z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

(координатная плоскость  $XOY$  совпадает с недеформированной плоскостью, по которой движется тело, а оси  $OX$ ,  $OY$  — главные оси эллипса инерции, построенного для центра тяжести площади основания тела). Основанием тела называем [1] плоскую фигуру, полученную проектированием точек контакта на плоскость системы координат.

Найдем выражение коэффициентов в уравнении (1.1). Для элемента площади основания  $d\sigma$  с учетом выбора осей запишем равенства

$$(1.2) \quad \int x d\sigma = 0, \quad \int y d\sigma = 0, \quad \int xy d\sigma = 0$$

Обозначим  $J_x$  и  $J_y$  моменты инерции площади основания относительно осей  $OX$  и  $OY$

$$(1.3) \quad J_x = \int y^2 d\sigma = \sigma \rho_x^2, \quad J_y = \int x^2 d\sigma = \sigma \rho_y^2$$

( $\rho_x$ ,  $\rho_y$  — радиусы инерции площади основания  $\sigma$ ). Если упругие силы при деформации поверхности подчиняются закону Гука с коэффициентом пропорциональности  $\kappa$ , то

$$(1.4) \quad \kappa \int z d\sigma = N$$

где  $N$  — проекция реакции плоскости на ось  $OZ$ .

На основании принципа Даламбера должны выполняться равенства

$$(1.5) \quad \mathbf{P} + \mathbf{I} + \mathbf{N} + \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M}_0^p + \mathbf{M}_0^i + \mathbf{M}_0^n + \mathbf{M}_0^f = 0$$

где  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{M}_0^p$ ,  $\mathbf{M}_0^i$  — главные векторы и главные моменты активных сил и сил инерции,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}_0^n$ ,  $\mathbf{M}_0^f$  — главные векторы и главные моменты нормальных составляющих реакции и сил трения плоскости.

Пусть из активных сил действует только сила тяжести, а плоскость, по которой движется тело, горизонтальна. Тогда, обозначив  $x_0$ ,  $y_0$  координаты проекции центра тяжести тела на плоскость  $XOY$ , из (1.5) получим

$$(1.6) \quad \kappa \int zx d\sigma = Px_0 + M_y^i, \quad \kappa \int zy d\sigma = Py_0 - M_x^i$$

Отсюда, пользуясь равенствами (1.2) — (1.4), находим

$$(1.7) \quad \alpha = \frac{Px_0 + M_y^i}{\kappa \sigma \rho_y^2}, \quad \beta = \frac{Py_0 - M_x^i}{\kappa \sigma \rho_x^2}, \quad \gamma = \frac{P}{\kappa \sigma}$$

После подстановки (1.7) в (1.1) получаем уравнение плоскости сопряжения

$$(1.8) \quad \kappa z = \frac{P}{\sigma} \left( \frac{x_*}{\rho_y^2} x + \frac{y_*}{\rho_x^2} y + 1 \right) \\ \left( x_* = x_0 + \frac{M_y^i}{P}, \quad y_* = y_0 - \frac{M_x^i}{P} \right)$$

Если  $x_* = y_* = 0$ , то давление равномерно распределяется по площади основания. Таким образом доказано следующее утверждение: если момент силы тяжести относительно центра тяжести площади основания уравнивается проекцией момента сил инерции на плоскость, то давление одинаково во всех точках основания. Отсюда следует теорема ([1], с. 142) о равномерном распределении давления в случае покоя. Однако указания автора работы [1] о применимости теоремы в случае движения не оправданны.

Следуя далее рассуждениям, приведенным в [1], приходим к выводу, что прямые равного давления параллельны диаметру эллипса инерции, сопряженному с диаметром, проходящим через точку  $(x_*, y_*)$ .

Введем систему координат  $\xi\eta$ , ось  $o\xi$  которой параллельна линиям равного давления, а  $o\eta$  — перпендикулярна к ним, и полярные координаты  $r$ ,  $\lambda$  с началом  $Q$  в мгновенном центре скоростей основания (фиг. 1).

Если принять, что закон сухого трения Кулона справедлив локально для всех точек площади контакта, то, интегрируя выражение элементарной силы трения ( $f$  — коэффициент трения)

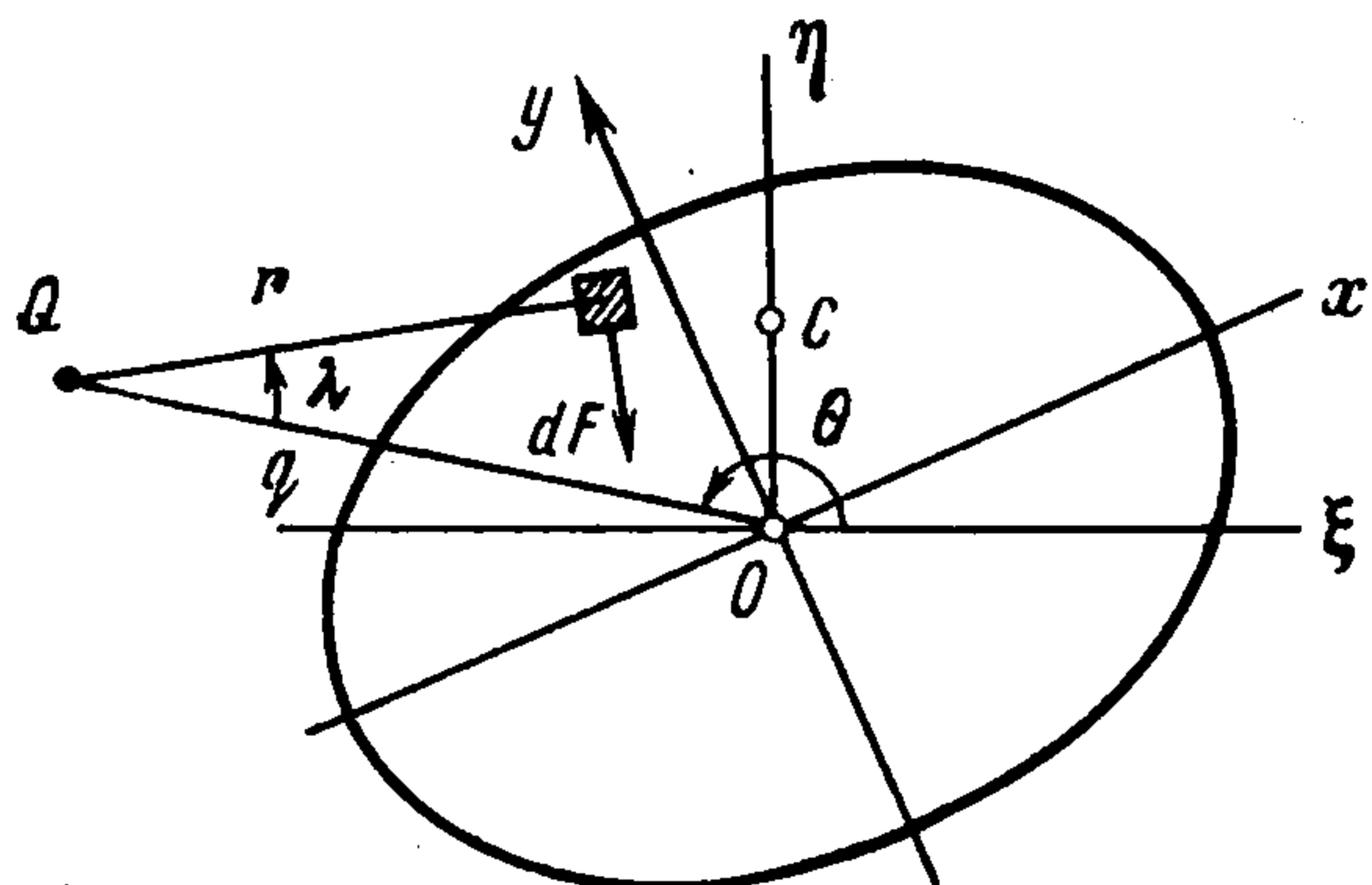
$$dF = \frac{fP}{\sigma} \left( \frac{x_*x}{\rho_y^2} + \frac{y_*y}{\rho_x^2} + 1 \right) d\sigma$$

имеем [1] выражения проекций главного вектора и главного момента сил трения относительно центра  $Q$

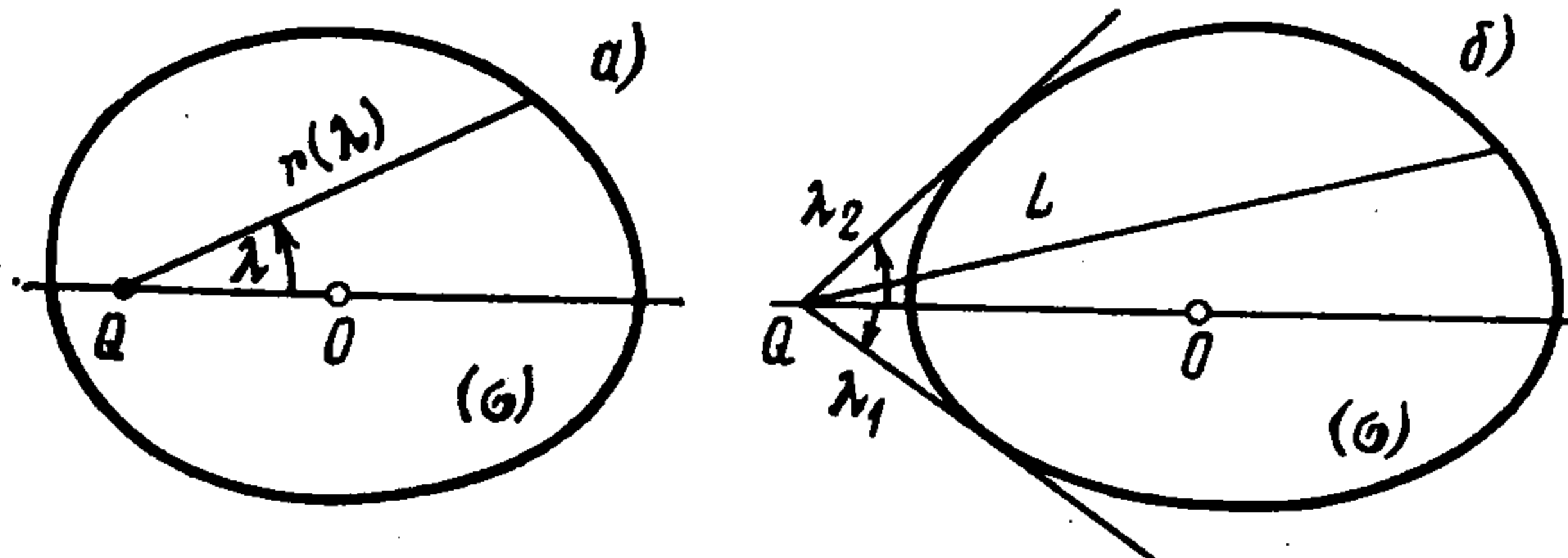
$$(1.9) \quad F_\xi = \iint (H_1\eta + H_2) \frac{\partial r}{\partial \eta} d\xi d\eta, \quad F_\eta = \\ = - \iint (H_1\eta + H_2) \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi d\eta \\ M_Q = \iint (H_1\eta + H_2) r d\xi d\eta \\ \left( H_1 = \frac{fP}{\sigma} \left( \frac{x_*^2}{\rho_y^4} + \frac{y_*^2}{\rho_x^4} \right)^{1/2}, \quad H_2 = \frac{fP}{\sigma} \right)$$

Столь подробное обсуждение вопроса о центре давления  $C(x_*, y_*)$  объясняется важностью определения положения этой точки в задаче о движении твердого тела с конечной площадью контакта по поверхности с трением.

В частном случае, когда твердое тело — плоская пластина, центр давления будет совпадать с центром масс пластины. Если, кроме того,  $x_* = y_* = 0$  (например, для однородной пластины), то центр давления будет находиться в центре тяжести площади основания. В этом случае выраже-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния (1.9) существенно упрощаются, так как  $H_1 = 0$ , и можно найти условие, при котором главный вектор сил трения направлен противоположно скорости центра основания.

Для этого вычислим проекцию  $F$  на радиальное направление полярной системы координат

$$(1.10) \quad F_r = -\sin \theta \int H_2 \frac{\partial r}{\partial \xi} d\sigma + \cos \theta \int H_2 \frac{\partial r}{\partial \eta} d\sigma$$

После подстановки в (1.10) выражений

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\cos(\lambda + \theta), \quad \frac{\partial r}{\partial \eta} = -\sin(\lambda + \theta)$$

получим

$$(1.11) \quad F_r = -H_2 \int \sin \lambda d\sigma$$

Используя представление элементарной площади в полярных координатах  $d\sigma = r dr d\lambda$ , перейдем в (1.11) от интегрирования по площади к интегрированию по контуру. В результате условие, при выполнении которого сила трения направлена противоположно скорости центра, получаем в следующем виде: если мгновенный центр скоростей основания принадлежит площади основания (фиг. 2, а), то

$$(1.12) \quad \int_0^{2\pi} r^2(\lambda) \sin \lambda d\lambda = 0$$

если же точка  $Q$  расположена вне  $\sigma$  (фиг. 2, б), то

$$(1.13) \quad \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [r_2^2(\lambda) - r_1^2(\lambda)] \sin \lambda d\lambda = 0 \quad (r_1(\lambda) = QL, r_2(\lambda) = r(\lambda) - r_1(\lambda))$$

Для невыпуклого контура, а также при наличии неодносвязности обобщения (1.12), (1.13) очевидны.

2. Рассмотрим импульсивное движение плоского твердого тела при ударе о плоскую поверхность с трением. В дополнение к предположениям п. 1 примем, что деформация поверхности остается незначительной и при

действии ударных сил (достигается это неограниченным возрастанием коэффициента  $\kappa$  в (1.4)). Далее плоское твердое тело будем считать диском, основание которого — круг радиуса  $a$ . Начальное состояние диска в момент, непосредственно предшествующий удару, следующее: плоскость диска параллельна плоскости поверхности, о которую происходит удар; поле скоростей диска имеет винтовую ось, перпендикулярную плоскости диска.

Составим уравнения движения центра масс диска и уравнения движения относительно осей Кёнига в проекциях на оси цилиндрической системы координат  $q, \theta, z$  (фиг. 1) с центром в центре основания  $O$ . Радиальное направление полярных координат  $q, \theta$  определяется направлением на мгновенный центр скоростей основания  $Q$ . Скорость центра масс диска (точка  $C$ )  $V_c$  связана со скоростью центра площади основания (точка  $O$ )  $V_0$  кинематическим соотношением ( $\omega$  — вектор угловой скорости диска)

$$(2.1) \quad V_c = V_0 + \omega \times OC$$

В процессе импульсивного движения изменение времени пренебрежимо мало, поэтому в качестве независимой переменной выберем импульс нормальной составляющей реакции плоскости, который обозначим  $S$ , причем  $dS = Ndt$ . Учитывая, что в процессе удара изменением положения диска можно пренебречь, а система координат вращается, получаем

$$(2.2) \quad m \left( V \frac{d\theta}{dS} - c \frac{d\omega}{dS} \cos \theta \right) = \Phi_q, \quad m \left( -\frac{dV}{dS} + c \frac{d\omega}{dS} \sin \theta \right) = \Phi_\theta$$

$$m \frac{du}{dS} = 1, \quad J_c \frac{d\omega}{dS} = M_c \quad (J_c = m\rho^2)$$

Приняты следующие обозначения:  $m, J_c$  — масса и момент инерции диска относительно оси  $CZ$  ( $\rho$  — радиус инерции),  $c$  — расстояние от точки  $O$  до центра масс, —  $V$  — проекция скорости точки  $O$  на трансверсальное направление,  $u, \omega$  — проекции соответственно скорости центра масс и угловой скорости диска на ось  $OZ$ ;  $\Phi_q, \Phi_\theta, M_c$  — проекции главного вектора и главного момента сил трения, отнесенные к величине нормальной реакции  $N$ .

Частный выбор начального состояния и плоской формы тела обеспечивают тождественное равенство нулю проекций угловой скорости тела на две другие оси, поэтому уравнения для них не выписаны. Третье из уравнений (2.2) легко интегрируется и показывает, что принятый в качестве независимой переменной импульс  $S$  пропорционален приращению  $u$ . Поэтому пределы изменения  $S$  определяются изменением скорости  $u$  от некоторого начального значения (доударного), которое должно быть отрицательным  $u^- < 0$ , до нуля (первая фаза удара [2]). Вторая фаза определяется упругими свойствами взаимодействия материала диска и поверхности и может характеризоваться коэффициентом восстановления  $0 \leq \leq \epsilon \leq 1$ , который позволяет найти послеударную скорость  $u^+ = -\epsilon u^-$  и, следовательно, момент окончания импульсивного движения.

Рассмотрим частный случай, когда центр масс диска совпадает с центром основания ( $c = 0$ ). В этом случае  $\Phi_q = 0$ , а  $\Phi_\theta$  и  $M_c$  непосредственно следуют из выражений ([3], с. 241). Из уравнений (2.2) получаем  $\theta = \text{const}$  и уравнения

$$(2.3) \quad \frac{dV}{d\Omega} = \mu \frac{k f_1(k)}{f_3(k)}, \quad k = \frac{V}{\Omega}, \quad V \leq \Omega$$

$$\frac{dV}{d\Omega} = \mu \frac{f_1(k_1)}{f_2(k_1)}, \quad k_1 = \frac{\Omega}{V}, \quad \Omega \leq V$$

$$\Omega = \omega a, \quad \mu = 3\rho^2/a^2$$

$$f_1(k) = (k^{-2} + 1) E(k) - (k^{-2} - 1) K(k)$$

$$f_2(k) = k^{-1} [(4 - 2k^{-2}) E(k) - (k^{-2} - 1) (3k^2 - 2) K(k)]$$

$$f_3(k) = (4 - 2k^2) E(k) - (1 - k^2) K(k)$$

Здесь  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода с модулем  $0 \leq k \leq 1$ .

Поведение функций  $f_1, f_2, f_3$  рассматривалось [4] при изучении допустимости пренебрежения конечными размерами площадки соприкосновения катящегося тела и плоскости. Показано, что на интервале  $0 \leq k \leq 1$  эти функции монотонные и постоянного знака. Поэтому можно ограничиться рассмотрением интегральных кривых (2.3) только в одном квадранте плоскости  $V\Omega$ . Прямая  $V = \Omega$  разбивает квадрант на две области, в каждой из которых все интегральные кривые могут быть получены из одной интегральной кривой при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат. Оси координат  $V = 0, \Omega = 0$  — траектории движения изображающей точки. Следовательно, все траектории изображающей точки проходят через начало координат. В результате приходим к выводу: если начальная скорость центра (центр масс совпадает с центром кругового основания) и угловая скорость плоского тела отличны от нуля, то в процессе удара они могут обратиться в нуль только одновременно и остаются равными нулю.

Линеаризуем правые части уравнений (2.3) при малых  $k$ , учитывая разложение в ряды эллиптических интегралов по степеням  $k^2$  вблизи точки  $k = 0$ . Получаем приближенные уравнения и соответствующие зависимости  $V$  от  $\omega$  для [двух случаев (штрихом обозначены производные по  $S$ )]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \text{а) } V &\ll a\omega \quad (\omega \geq 0) \\ mV' &= -fV/\Omega, \quad J_c\omega' = -2af/3, \quad m\omega' = 1; \quad V = V^-(\omega/\omega^-)^{\mu/2} \\ \text{б) } V &\gg a\omega \quad (\omega \geq 0) \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad mV' = -f, \quad J_c\omega' = -\frac{5}{6}fa\frac{\Omega}{V}, \quad m\omega' = 1; \quad V = V^-(\omega/\omega^-)^{2\mu/5}$$

Интересно сравнить (2.4), (2.5) с гипотезами об ударе о поверхность с трением так называемых плоских (не вращающихся) частиц (см., например, [5]).

В случае а) угловая скорость  $\omega^+$  в момент окончания удара (для определенности удар примем абсолютно неупругим) связана с начальной скоростью сближения  $u_0 = -u^-$  равенством

$$\omega^+ = \omega^- - \frac{2af}{3\rho^2} u_0$$

следовательно, согласно последней формуле (2.4), имеем

$$V^+ = V^- \left( 1 - \frac{2f}{\mu} \frac{u_0}{a\omega^-} \right)^{\mu/2}$$

Для плоских тел без проскальзывания или с частичным проскальзыванием в технических расчетах рекомендуется [5] гипотеза  $x_+ = x_- (1 - \lambda)$ , где  $x_-, x_+$  — относительная скорость скольжения до и после удара,  $\lambda$  — эмпирический коэффициент.

В случае б) из уравнений (2.5) находим

$$V^+ - V^- = -f(u^+ - u^-)$$

Этот случай соответствует удару с полным проскальзыванием, для которого применяется [5] гипотеза  $x_+ \dot{\phantom{x}} - x_- \dot{\phantom{x}} = f' (y_- \dot{\phantom{y}} - y_+ \dot{\phantom{y}})$ , где  $f'$  — коэффициент, получаемый из эксперимента,  $y_- \dot{\phantom{y}}$ ,  $y_+ \dot{\phantom{y}}$  — нормальные (к поверхности) составляющие относительной скорости частиц до и после удара. Выводы, которые можно сделать из сравнения, очевидны.

При  $c \neq 0$ , выражения в правых частях (2.2)  $\Phi_q$ ,  $\Phi_\theta$ ,  $M_c$  найдем используя результаты работы ([1], с. 150) с учетом замечания в п. 1

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Phi_q &= h_1 (\varphi_2 - \varphi_3) \cos \theta, \quad \Phi_\theta = -h_1 (\varphi_2 + \varphi_3 - q\varphi_1) \sin \theta + \\ &+ h_2 \varphi_1 \\ M_c &= -h_1 (-\varphi_4 + 2q\varphi_2) \sin \theta - 2h_2 \varphi_2 + \Phi_q c \cos \theta + \\ &+ \Phi_\theta (q - c \sin \theta); \quad h_1 = \frac{4fc}{\pi a^4}, \quad h_2 = \frac{f}{\pi a^2} \end{aligned}$$

(Функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  в [1] обозначены  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .)

В случае  $c \neq 0$  для движений, при которых  $\theta = \pi/2$ , из уравнений (2.2) с учетом (2.6) получаем однородное дифференциальное уравнение ( $\Phi_\theta, M_c$  вычисляются при  $\theta = \pi/2$ )

$$(2.7) \quad -\frac{m}{J_c} \frac{dV}{d\omega} + \frac{mc}{J_c} = \frac{\Phi_\theta}{|M_c}$$

При малых  $V/\Omega$  из (2.7) путем линеаризации получаем приближенное уравнение

$$(2.8) \quad dV/d\Omega = \delta + \nu V/\Omega$$

Решение уравнения (2.8) имеет вид

$$(2.9) \quad V = C\Omega^\nu - \frac{\delta}{\nu - 1} \Omega$$

где  $C$  — постоянная интегрирования; постоянные коэффициенты  $\delta$  и  $\nu$  находим с помощью коэффициентов разложения функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  в ряды

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 q + \dots, \quad \varphi_2 = a_0 + a_2 q + \dots, \quad \varphi_3 = a_3 q + \dots, \quad \varphi_4 = \\ &= a_4 q + \dots; \\ a_1 &= \pi a, \quad a_0 = \pi a^3/3, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = \pi a^3, \quad q = V/|\omega| \\ \delta &= \zeta \left( \frac{2\vartheta^2}{2\zeta^2 - 1} + 1 \right), \quad \nu = \frac{13\vartheta^2}{2(2\zeta^2 - 1)^2} \\ \zeta &= c/a, \quad \vartheta = \rho/a \end{aligned}$$

В случае  $\theta = -\pi/2$  ( $V \ll \Omega$ ) имеем зависимость  $V$  от  $\Omega$ , получаемую заменой  $\delta \rightarrow -\delta$  в (2.8), (2.9).

Контакт по всей площади круга возможен только при условии  $c \leq \leq a/4$  (см. (1.8)), поэтому  $2\zeta^2 - 1 \neq 0$ .

Заметим, что результаты вычисления функции  $f_4$  в ([1], с. 151) не соответствуют выражению для этой функции в ([1], с. 150).

Условия  $\theta = \pm\pi/2$ ,  $V \ll \Omega$ , при которых получено решение (2.9), означают, что в процессе импульсивного движения мгновенный центр скоростей основания находится на перпендикуляре к линиям равного давления вблизи центра круга (точка  $O$ ). Несовпадение центра давления и центра основания приводит к тому, что скорость центра основания, вообще говоря, может обратиться в нуль не только при  $\omega = 0$ , как это было при  $c = 0$ .

Установим еще одно свойство импульсивного движения ( $c \neq 0$ ): мгновенный центр скоростей основания тождественно совпадает с центром кругового основания в процессе импульсивного движения ( $V \equiv 0$ ), если выполняется условие

$$(2.10) \quad 2(\rho^2 + c^2) = a^2$$

Соотношение (2.10) можно получить используя уравнение вращения диска при действии ударных сил, обусловленных трением

$$(2.11) \quad J_0 \Delta \omega = -MS; \quad J_0 = J_c + mc^2$$

где  $\Delta \omega$  — приращение угловой скорости за время удара.

Уравнение движения центра масс приводит в данном случае к равенству

$$(2.12) \quad mc \Delta \omega = -\Phi_\xi S$$

В условиях рассматриваемого движения  $M$  и  $\Phi_\xi$  в (2.11), (2.12) следует принять в виде ([1], с. 150)

$$M = 2h_2 a_0, \quad \Phi_\xi = h_1 a_0$$

Из (2.11), (2.12) получаем линейную зависимость приращения угловой скорости от нормального импульса реакции

$$\Delta \omega = - \frac{4f}{3am} S = - \frac{4f}{3a} \Delta u$$

Здесь кроме (2.10) учтено значение коэффициента  $a_0 = \pi a^3/3$ .

Для практических целей данное свойство сформулируем в виде утверждения: если плоское твердое тело вращается вокруг оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости тела, то в момент ударного (вдоль оси вращения) начала фрикционного торможения с круговой площадью контакта ось не испытывает ударных поперечных нагрузок при условии  $a^2 = 2lc$ , где  $l$  — приведенная длина физического маятника.

Последнее равенство следует из сравнения (2.10) и требования, чтобы импульс равнодействующей сил трения был приложен в центре удара. Если, например,  $c = a/4$  (линия нулевого давления касается контура круговой площади контакта), то диаметр круга должен быть равен приведенной длине. В тривиальном случае  $c = 0$  имеем  $V \equiv 0$  при любых значениях  $a$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 467 с.
2. Болотов Е. А. Об ударе двух твердых тел при действии трения.— Изв. Моск. инж. училища, 1908, ч. 2, вып. 2, с. 43—55.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
5. Вибрации в технике. Справочник. Т. 4. / Под ред. Э. Э. Лавендела. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.