Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 5, 1983

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПУАНКАРЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Саитбатталов А. А.

Для некоторого класса гамильтоновых систем с двумя степенями свободы получены достаточные условия орбитальной устойчивости периодических решений Пуанкаре в случае собственного вырождения. В качестве приложений исследуется орбитальная устойчивость периодических решений Пуанкаре в задаче о периодических движениях относительно центра масс динамически симметричного спутника с эллипсоидом инерции, близким к сфере, на круговой орбите.

1. Теорема Пуанкаре. Рассматривается автономная система с двумя степенями свободы, функция Гамильтона которой имеет вид

$$H = H_0(G_1) + \omega G_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H_k(g_1, g_2, G_1, G_2) \tag{1.1}$$

Здесь g_1, g_2 — обобщенные координаты, G_1, G_2 — соответствующие им обобщенные импульсы, ω — постоянная величина, ε — малый параметр. Предполагается, что H — 2π-периодическая функция обобщенных координат, аналитическая по всем своим аргументам в некоторой области фазового пространства $M = \mathbf{T}^2 \times Q$ ($Q \subset \mathbf{R}^2$).

Уравнения движения с функцией Гамильтона (1.1) при $\varepsilon = 0$ допускают решение

$$G_1 = x_1, \quad G_2 = x_2, \quad g_1 = \omega_1 t + y_1, \quad g_2 = \omega t + y_2, \quad \omega_1 = dH_0(x_1)/dx_1 \tag{1.2}$$

где x_i, y_i ($i = 1, 2$) — постоянные величины. При $\varepsilon = 0$ гессиан H по переменным G_1, G_2 тождественно равен нулю, имеет место вырожденный случай. Предположим, что выполняются условия теоремы Пуанкаре о существовании периодических решений системы с функцией Гамильтона (1.1), т. е. существуют [1] такие начальные значения x_i, y_i ($i = 1, 2$), что выполняются следующие условия:

1) порождающее решение (1.2) — периодическое с периодом T, т. е. $\omega_1 T$ и ωT кратны 2π, $\omega = l\omega_1/m$ ($l \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$):

2) $$\left.\frac{d^2 H_0(G_1)}{dG_1^2}\right|_{G_1=x_1} \neq 0$$

3) $$\frac{\partial \langle H_1\rangle}{\partial x_2} = \frac{\partial \langle H_1\rangle}{\partial y_2} = 0$$

4) $$\det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial y_2^2} & \dfrac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial y_2 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial x_2 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial x_2^2} \end{Vmatrix} \neq 0$$

$$\left(\langle H_1\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T H_1(\omega_1 t + y_1, \omega t + y_2, x_1, x_2)\, dt\right)$$

Начальный момент времени выберем так, чтобы $y_1 = 0$ при любом ε и при $t = 0$. Если начальные значения x_i, y_i ($i = 1, 2$) выбраны так, что выполняются условия 1—4, то уравнения движения с функцией Гамильтона (1.1) допускают, при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$, периодическое решение периода T, которое разлагается в ряд по степеням малого параметра ε с периодическими периода T коэффициентами и при $\varepsilon = 0$ переходит в решение (1.2).

Запишем это решение в виде

$$
\begin{aligned}
(1.3)\qquad & g_1 = \omega_1 t + \varepsilon g_1^{(1)}(\omega_1 t) + \ldots, g_2 = \varkappa\omega_1 t + y_2 + \varepsilon g_2^{(1)}(\omega_1 t) + \ldots \\
& G_1 = x_1 + \varepsilon G_1^{(1)}(\omega_1 t) + \ldots, \quad G_2 = x_2 + \varepsilon G_2^{(1)}(\omega_1, t) + \ldots; \\
& \varkappa = l / m
\end{aligned}
$$

Все функции в правых частях (1.3) — периодические с периодом $2\pi m$ относительно переменной $w_1 = \omega_1 t$; точками обозначены члены выше первого порядка малости относительно ε.

2. Введение возмущений в окрестности периодического решения. Исследуем орбитальную устойчивость периодического решения (1.3). Для этого перейдем к новым каноническим переменным w_1, q_2, I_1, p_2 ($w_1 = \omega_1 t$), таким, чтобы при $q_2 = p_2 = I_1 \equiv 0$ получить периодическое решение (1.3). Переменные q_2, p_2, I_1 — возмущения периодического решения (1.3), причем q_2, p_2 — возмущения первого порядка малости, а I_1, как переменная действие,— величина второго порядка малости.

Введем возмущения по формулам

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad & g_1 = w_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_1^{(k)}(w_1) \\
& g_2 = \varkappa w_1 + y_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_2^{(k)}(w_1) + q_2 \\
& G_1 = x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k G_1^{(k)}(w_1) + I_1 - \varkappa p_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k G_*^{(k)}(w_1, q_2, I_1, p_2) \\
& G_2 = x_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k G_2^{(k)}(w_1) + p_2
\end{aligned}
$$

Функции $G_*^{(k)}$ подбираются такими, чтобы преобразование (2.1) было каноническим, причем $G_*^{(k)}(\omega_1, 0, 0, 0) \equiv 0$ для любого $k = 1, 2, \ldots$.

Для производящей функции

$$
(2.2)\qquad S = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_k(g_1, g_2, I_1, p_2)
$$

имеем уравнения

$$
(2.3)\qquad \frac{\partial S}{\partial I_1} = w_1, \quad \frac{\partial S}{\partial p_2} = q_2, \quad \frac{\partial S}{\partial g_1} = G_1, \quad \frac{\partial S}{\partial g_2} = G_2
$$

Из (2.1) — (2.3) находим

$$
\begin{aligned}
(2.4)\qquad & S_0 = g_1(x_1 + I_1 - \varkappa p_2) + g_2(x_2 + p_2) - y_2 p_2 \\
& S_1 = -(I_1 - \varkappa p_2) g_1^{(1)}(g_1) - p_2 g_2^{(1)}(g_1) + g_2 G_2^{(1)}(g_1) + \\
& + \int_0^{g_1} \left\{ G_1^{(1)}(\xi) - (\varkappa\xi + y_2) \frac{dG_2^{(1)}(\xi)}{d\xi} \right\} d\xi \\
& G_*^{(1)} = -(I_1 - \varkappa p_2) \frac{dg_1^{(1)}(w_1)}{dw_1} - p_2 \frac{dg_2^{(1)}(w_1)}{dw_1} + q_2 \frac{dG_2^{(1)}(w_1)}{dw_1}
\end{aligned}
$$

3. Теорема об устойчивости. Для нахождения условий устойчивости периодических решений (1.3) воспользуемся теоремой Барара [2]. Функцию Гамильтона возмущенного движения, разложенную по степеням I_1, p_2, q_2, ε в окрестности начальных значений, из которых рождаются решения (1.3), с учетом того, что интеграл энергии на решениях (1.3) равен

$$H_0(x_1)+\omega x_2+\varepsilon\{H_1(w_1,\varkappa w_1+y_2,\ x_1,\ x_2)+\omega_1 G_1^{(1)}(w_1)+ \\ +\omega G_2^{(1)}(w_1)\}+O(\varepsilon^2)$$

запишем в виде

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad H^* &= \omega_1 I_1+\frac{1}{2}\varkappa^2\frac{d^2H_0}{dx_1^2}p_2^2-\frac{1}{6}\varkappa^3\frac{d^3H_0}{dx_1^3}p_2^3-\varkappa\frac{d^2H_0}{dx_1^2}I_1p_2+\\ &+\frac{1}{2}\frac{d^2H_0}{dx_1^2}I_1^2+\frac{1}{24}\varkappa^4\frac{d^4H_0}{dx_1^4}p_2^4+\frac{1}{2}\varkappa^2\frac{d^3H_0}{dx_1^3}I_1p_2^2+\\ &+\varepsilon\left\{\frac{1}{2}D^2H_1+\frac{1}{6}D^3H_1+I_1D\frac{\partial H_1}{\partial x_1}+\frac{1}{24}D^4H_1+\frac{1}{2}I_1D^2\frac{\partial H_1}{\partial x_1}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2H_1}{\partial x_1^2}I_1^2+G_1^{(1)}(w_1)L_1+G_*^{(1)}\left(\frac{d^2H_0}{dx_1^2}(I_1-\varkappa p_2)+L_2\right)\right\}+\\ &+R(w_1,q_2,I_1,p_2,\varepsilon)\\ L_1 &= L_2+\frac{1}{2}\frac{d^3H_0}{dx_1^3}I_1^2+\frac{1}{2}\varkappa^2\frac{d^4H_0}{dx_1^4}I_1p_2^2\\ L_2 &= \frac{1}{2}\varkappa^2\frac{d^3H_0}{dx_1^3}p_2^2-\frac{1}{6}\varkappa^3\frac{d^4H_0}{dx_1^4}p_2^3-\varkappa\frac{d^3H_0}{dx_1^3}I_1p_2\\ D &= q_2\frac{\partial}{\partial y_2}+p_2\frac{\partial}{\partial x_2}-\varkappa p_2\frac{\partial}{\partial x_1}\end{aligned}$$

(R имеет порядок малости относительно ε выше первого, относительно q_2 и p_2 выше четвертого, относительно I_1 выше второго).

Гамильтониан возмущенного движения — $(2\pi m)$-периодическая функция переменной w_1. Представим его в виде

$$H^*=\Phi_1+\varepsilon\Phi_2$$

$$\Phi_1=\frac{1}{2\pi m}\int_0^{2\pi m}H^*(w_1,q_2,I_1,p_2,\varepsilon)\,dw_1,\quad \langle\Phi_2\rangle=\frac{1}{2\pi m}\int_0^{2\pi m}\Phi_2\,dw_1\equiv 0$$

Рассмотрим гамильтониан K, являющийся квадратичной частью Φ_1 по переменным q_2, p_2

$$(3.2)\qquad K=ap^2+\varepsilon cqp+\varepsilon bq^2.$$

$$\begin{aligned}(3.3)\qquad a &= \frac{1}{2}\varkappa^2\frac{d^2H_0}{dx_1^2}+\frac{1}{2}\varepsilon\left\{\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial x_2^2}+\varkappa^2\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial x_1^2}-2\varkappa\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial x_1\partial x_2}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\langle G_1^{(1)}\rangle\varkappa^2\frac{d^3H_0}{dx_1^3}\right\},\quad \langle G_1^{(1)}\rangle=-\frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial x_1}\left(\frac{d^2H_0}{dx_1^2}\right)^{-1}\\ b &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial y_2^2},\quad c=\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial x_2\partial y_2}-\varkappa\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial x_1\partial y_2}\end{aligned}$$

Если

$$z=4\varepsilon ab-\varepsilon^2c^2>0$$

то характеристическое уравнение, соответствующее (3.2), имеет два чисто мнимых комплексно-сопряженных корня $\pm i\sqrt{z}\equiv\pm i\sqrt{\varepsilon}\Omega$. В противном случае периодическое решение (1.3) неустойчиво.

В результате канонического преобразования

$$\begin{aligned}(3.4)\qquad & w_1=w_1',\quad q_2=\varepsilon^{1/4}\alpha\sqrt{2I_2'}\sin w_2'-\varepsilon^{3/4}\beta\sqrt{2I_2'}\cos w_2'\\ & I_1=\varepsilon I_1',\quad p_2=\varepsilon^{3/4}\alpha^{-1}\sqrt{2I_2'}\cos w_2'\\ & (\alpha=\operatorname{sign} b\,(\Omega\,(2\,|\,b\,|)^{-1})^{1/2},\quad \beta=c\,(2\,|\,b\,|\,\Omega)^{-1/2})\end{aligned}$$

имеющего валентность $1\,|\,\varepsilon$, получим новый гамильтониан возмущенного движения

$$H^{**} = \omega_1 I_1 + \sqrt{\varepsilon}\,\{K_1(I_1, I_2) + K_2(w_1, w_2, I_1, I_2)\} \tag{3.5}$$

$$\left(K_1 = \frac{1}{2\pi m}\int_0^{2\pi m}\Phi_1(w_2, I_1, I_2)\,dw_2,\ \frac{1}{(2\pi m)^2}\int_0^{2\pi m}\int_0^{2\pi m} K_2\,dw_1\,dw_2 \equiv 0\right)$$

В (3.5) опущены штрихи над новыми переменными. Преобразование (3.4) позволяет рассматривать изменение переменной I_2 в кольце $V_2 = \{\rho_1 \leqslant I_2 \leqslant \rho_2;\ \rho_1, \rho_2 > 0\}$ и гамильтониан H^{**} представляет собой аналитическую функцию по всем своим аргументам в области фазового пространства $M^* = \mathrm{T}^2 \times V$, где $V = V_1 \times V_2$, $V_1 \subset \mathbf{R}^1$; V_1, V_2 — замкнутые множества.

Выпишем выражение для $K_1(I_1, I_2)$ с точностью до членов первого порядка малости относительно ε и до второго порядка малости относительно I_1, I_2

$$K_1(I_1, I_2) = \Omega\,\mathrm{sign}\,b I_2 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\frac{d^2H_0}{dx_1^2}I_1^2 + \sqrt{\varepsilon}\frac{\alpha^4}{16}\frac{\partial^4\langle H_1\rangle}{\partial y_2^4}I_2^2 +$$
$$+ \varepsilon\frac{1}{2}\left(\varkappa^2\alpha^{-2}\frac{d^3H_0}{dx_1^3} + \alpha^2\frac{\partial^3\langle H_1\rangle}{\partial y_2^2\,\partial x_1}\right)I_1 I_2 + O(\varepsilon^{3/2},\ I_i^2 I_j); \qquad i, j = 1, 2$$

Рассмотрим определитель

$$\det\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2(\omega_1 I_1 + \sqrt{\varepsilon}K_1)}{\partial I_i\,\partial I_j} & \dfrac{\partial(\omega_1 I_1 + \sqrt{\varepsilon}K_1)}{\partial I_i} \\ \dfrac{\partial(\omega_1 I_1 + \sqrt{\varepsilon}K_1)}{\partial I_j} & 0 \end{Vmatrix} = \sqrt{\varepsilon}N; \quad i, j = 1, 2$$

$$N = -\sqrt{\varepsilon}\,\omega_1^2\frac{\alpha^4}{16}\frac{\partial^4\langle H_1\rangle}{\partial y_2^4} + O(\varepsilon^{3/2}, I_j); \quad j = 1, 2$$

Если $N \neq 0$, то функция Гамильтона H^{**} возмущенного движения, определяемая (3.5), удовлетворяет всем условиям теоремы Барара и, следовательно, периодические решения (1.3) орбитально устойчивы. В случае $\omega = 0$ все рассуждения остаются верными, для этого нужно формально во всех выкладках положить $l = 0$.

Таким образом, доказана

Теорема. Пусть функция Гамильтона автономной системы с двумя степенями свободы определяется равенством (1.1) и начальные значения порождающего решения (1.2) выбраны так, что выполняются условия 1—4 теоремы Пуанкаре о существовании периодических решений возмущенной системы. Тогда, если эти начальные значения удовлетворяют условиям

$$\frac{d^2H_0}{dx_1^2}\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial y_2^2} > 0, \quad \omega \neq 0 \tag{3.6}$$
$$\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial x_2\,\partial y_2}\right)^2 > 0, \quad \omega = 0$$

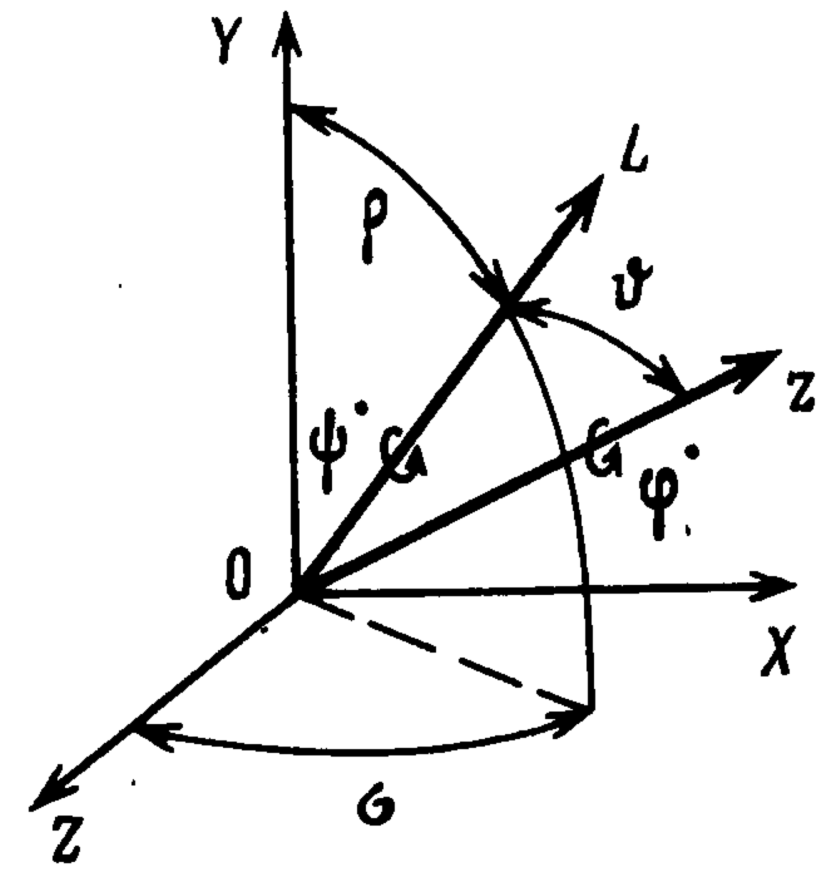
$$\frac{\partial^4\langle H_1\rangle}{\partial y_2^4} \neq 0, \quad \omega \neq 0 \tag{3.7}$$
$$\left[\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \left(-\beta\frac{\partial}{\partial y_2} + \alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2\right]^2\langle H_1\rangle \neq 0, \quad \omega = 0$$

то периодические решения (1.3) орбитально устойчивы.

4. Периодические движения спутника. В качестве приложения рассмотрим задачу о периодических движениях динамически симметричного твердого тела относительно центра масс на круговой орбите в центральном гравитационном поле.

К настоящему времени наиболее полно изучены стационарные и плоские периодические движения относительно центра масс динамически симметричного спутника на круговой орбите. В ряде работ на эллиптической орбите построены $(2\pi m)$-периодические решения, совпадающие при $e = 0$ с $(2\pi m/n)$-периодическими решениями (m, n — взаимно простые натуральные числа) Ляпунова в окрестности стационарного решения, которые задают плоские движения, и исследована их устойчивость в линейном приближении. Обзор по указанным задачам приведен в [3][1]. Задача о периодических движениях относительно центра масс динамически симметричного спутника с эллипсоидом инерции, близким к сфере на круговой орбите, рассматривалась в [4]. Здесь уточняются некоторые результаты работы [4], связанные с доказательством существования периодических решений Пуанкаре, и проводится строгий нелинейный анализ орбитальной устойчивости полученных решений.

Зафиксируем произвольную точку орбиты спутника, считая ее перигеем орбиты. На фиг. 1 $OXYZ$ — кенигова система координат с нача-



Фиг. 1

лом в центре масс спутника. Ее ось OY направлена по бинормали к орбите, а OX и OZ — соответственно по трансверсали и по нормали к орбите в ее перигее. Углы ρ и σ определяют ориентацию вектора кинетического момента $\mathbf{L}$ относительно системы координат $OXYZ$, ϑ — угол между вектором $\mathbf{L}$ и осью — динамической симметрии спутника (ось Oz), ψ—угол поворота спутника вокруг вектора $\mathbf{L}$, φ — угол поворота вектора $\mathbf{L}$ вокруг оси динамической симметрии спутника.

Движение спутника относительно центра масс в центральном гравитационном поле можно описать системой канонических уравнений с функцией Гамильтона [5]

$$H = K(L, l) - U(L, L_n, \psi, \sigma - \nu), \quad \nu = \omega_0 t$$

$$L_n = L\cos\rho \ (|L_n| \leqslant L), \quad l = L\cos\vartheta \ (|l| < L)$$

Здесь ω_0 — угловая скорость движения центра масс спутника по орбите, L — модуль вектора кинетического момента, L_n, l — проекции вектора кинетического момента на нормаль к плоскости орбиты и на ось динамической симметрии соответственно. Кинетическая энергия K и силовая функция U соответственно равны

$$K = \frac{1}{2}\{(L^2 - l^2)/A + l^2/C\}, \quad U = \frac{3}{2}\omega_0^2(A - C)\gamma^2$$

$$\gamma = \beta\sqrt{1-\alpha^2}\cos S - \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}(1-\alpha)\sin(\psi + S) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}(1+\alpha)\sin(\psi - S)$$

$$S = \nu - \sigma, \quad \alpha = \cos\rho = L_n/L, \ \beta = \cos\vartheta = l/L$$

---

[1] См. также *Сидорюк М. Е.* Некоторые задачи движения искусственных спутников относительно центра масс под действием гравитационного момента: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МФТИ, 1981, 140 с.

Здесь A, C — экваториальный и полярный моменты инерции спутника соответственно ($A \neq C$), γ — косинус угла между радиус-вектором центра масс спутника относительно центра притяжения и осью динамической симметрии. Так как угол φ — циклическая координата, то соответствующий ей импульс l — интеграл движения $l = l_0$ и порядок уравнений движения можно понизить на две единицы. Преобразование $\lambda = \sigma - \nu$ приводит к автономной системе с двумя степенями свободы и функцией Гамильтона

$$H^* = H - \omega_0 L_n = K(L,\ l_0) - \omega_0 L_n - U(L,\ L_n,\ \psi,\ \lambda) \tag{4.1}$$

Будем искать периодические решения канонических уравнений движения с гамильтонианом (4.1), когда эллипсоид инерции спутника близок к сфере. Пусть

$$A = J_0 + \varepsilon A_1,\ C = J_0 + \varepsilon C_1, \quad \varepsilon \ll 1$$

Функцию Гамильтона (4.1) разложим в ряд по степеням малого параметра ε с точностью до членов первого порядка малости относительно ε включительно

$$H^* = \frac{1}{2} L^2/J_0 - \omega_0 L_n + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2), \tag{4.2}$$

$$H_1 = -A_1 L^2/2J_0^2 - \frac{3}{2}\omega_0^2 (A_1 - C_1)\gamma^2$$

При $\varepsilon = 0$ в порождающем движении

$$L = L_0, \quad L_n = L_{n_0}, \quad \psi = \omega t + \psi_0, \quad \lambda = -\omega_0 t + \lambda_0, \tag{4.3}$$

$$\omega = L_0 / J_0$$

вектор кинетического момента совершает поступательное движение по орбите с угловой скоростью ω_0, а спутник вращается вокруг этого вектора с постоянной угловой скоростью ω.

Считаем, что порождающее решение — периодическое периода T. Если выполняются условия теоремы Пуанкаре 1—4 (п. 1), то при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ существуют периодические решения периода T, рождающиеся из (4.3). Из уравнений движения с гамильтонианом (4.1) следует, что на круговой орбите периодические решения Пуанкаре возможны только в двух случаях: а) $\omega = \omega_0$, б) $\omega = 2\omega_0$.

Условия 1, 2 выполняются, исследуем остальные условия в каждом случае.

Пусть $\omega = \omega_0$, т. е. $L_0^* = J_0\omega_0$. В этом случае функция $\langle H_1\rangle$, определяемая (4.2) и равенством в скобках, приведенным после условия 4, равна

$$\langle H_1\rangle = -\frac{1}{2J_0^2} A_1 L_0^{*2} + \omega_0^2 (A_1 - C_1)\left\{-\frac{3}{4}(1-\beta^2) - \right.$$

$$\left. -\frac{3}{8}(1-\alpha^2)(3\beta^2 - 1) + \frac{3}{16}(1+\alpha)^2(1-\beta^2)\cos 2(\psi_0 + \lambda_0)\right\}$$

$$\alpha = L_{n_0}/L_0^*, \quad \beta = l_0/L_0^*$$

Величину ψ_0 положим равной нулю, что всегда можно сделать в силу произвольности начального момента времени.

Для нахождения начальных значений порождающего решения (4.3), которым соответствуют периодические решения системы с гамильтонианом (4.2), имеем следующую систему уравнений:

$$(4.4)\qquad \frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial\lambda_0}\equiv-\frac{3}{8}\omega_0^2(A_1-C_1)(1-\beta^2)(1+\alpha)^2\sin2\lambda_0=0$$

$$\frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial L_{n_0}}\equiv\frac{3}{4}\omega_0^2(A_1-C_1)\frac{1}{L_0^*}\Big\{\alpha(3\beta^2-1)+ +\frac{1}{2}(1+\alpha)(1-\beta^2)\cos2\lambda_0\Big\}=0$$

Если $\alpha\neq-1$, $\beta^2\neq1$, $\beta^2\neq{}^1/_3$, то система (4.9) имеет простой корень

$$(4.5)\qquad \sin2\lambda_0^*=0,\quad \alpha^*=\frac{L^*_{n_0}}{L_0^*}=-\frac{(1-\beta^2)\cos2\lambda_0^*}{2(3\beta^2-1)+(1-\beta^2)\cos2\lambda_0^*}$$

В дальнейшем считаем, что $\lambda_0=\lambda_0^*$, $\alpha=\alpha^*$ определяются соотношениями (4.5), и звездочку будем опускать. Гессиан $\langle H_1\rangle$ по переменным λ_0, L_{n_0} равен

$$\operatorname{Ges}\langle H_1\rangle=-\frac{9}{16}\frac{\omega_0^2}{J_0^2}(A_1-C_1)^2(1-\beta^2)(1+\alpha)^2\Big\{3\beta^2-1+ +\frac{1}{2}(1-\beta^2)\cos2\lambda_0\Big\}\cos2\lambda_0\neq0$$

если $\alpha\neq-1$, $\beta^2\neq1$, $\beta^2\neq{}^1/_3$.

Таким образом, в случае $\omega=\omega_0$, если начальные значения порождающего решения (4.3) выбраны так, что выполняется (4.5) и $\alpha\neq-1$, $\beta^2\neq1$, $\beta^2={}^1/_3$, то существуют $(2\pi/\omega_0)$-периодические решения возмущенной системы.

Условия устойчивости (3.6), (3.7) для этих решений принимают вид

$$(4.6)\qquad \frac{d^2H_0}{dL_0^2}\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\lambda_0^2}=-\frac{1}{J_0}\frac{3}{4}\omega_0^2(A_1-C_1)(1-\beta^2)(1+\alpha)^2\cos2\lambda_0>0$$

$$\frac{\partial^4\langle H_1\rangle}{\partial\lambda_0^4}=3\omega_0^2(A_1-C_1)(1-\beta^2)(1+\alpha)^2\cos2\lambda_0\neq0$$

Второе из этих условий выполняется если $\alpha\neq-1$, $\beta^2\neq1$. Исследуем первое условие.

Пусть вначале $\lambda_0=0,\pi$, тогда косинус угла между вектором кинетического момента и нормалью к плоскости орбиты равен (см. (4.5))

$$(4.7)\qquad \alpha=-\frac{1-\beta^2}{5\beta^2-1},\quad \beta^2\in B_1=\Big\{x:x=0,\frac{1}{3}<x<1\Big\}$$

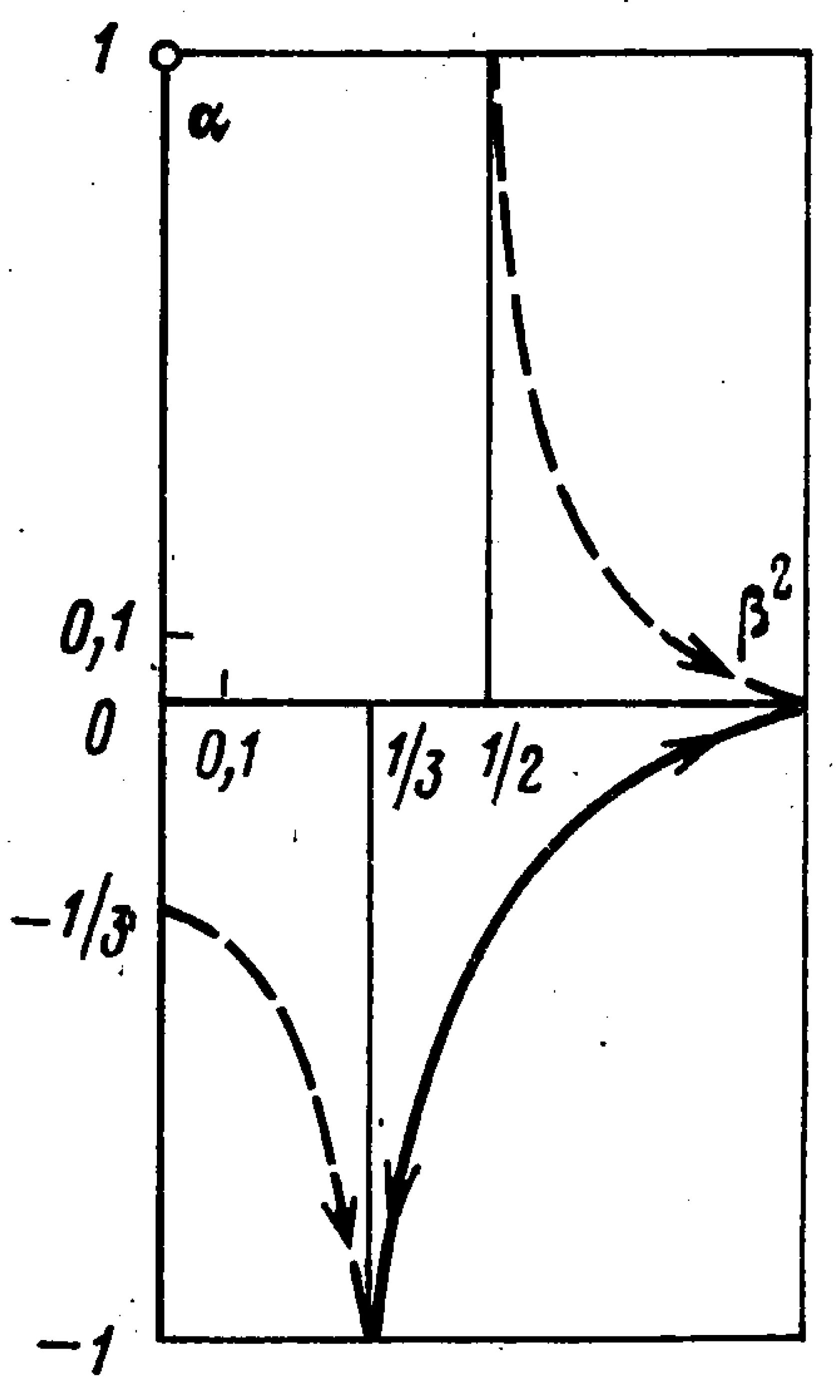
Зависимость α от β^2 изображена на фиг. 2 сплошной линией и точкой $\beta=0$, $\alpha=1$. Для каждого β, такого, что $\beta^2\in B_1$, при $\lambda_0=0$, π и α, определяемым из (4.7), существует периодическое решение, которое назовем решением первого типа. Из первого условия (4.6) следует, что решение первого типа орбитально устойчиво, если $A_1<C_1$ (сплюснутый спутник), в противном случае неустойчиво.

Пусть теперь $\lambda_0=\pi/2$, $\lambda_0=3\pi/2$, тогда

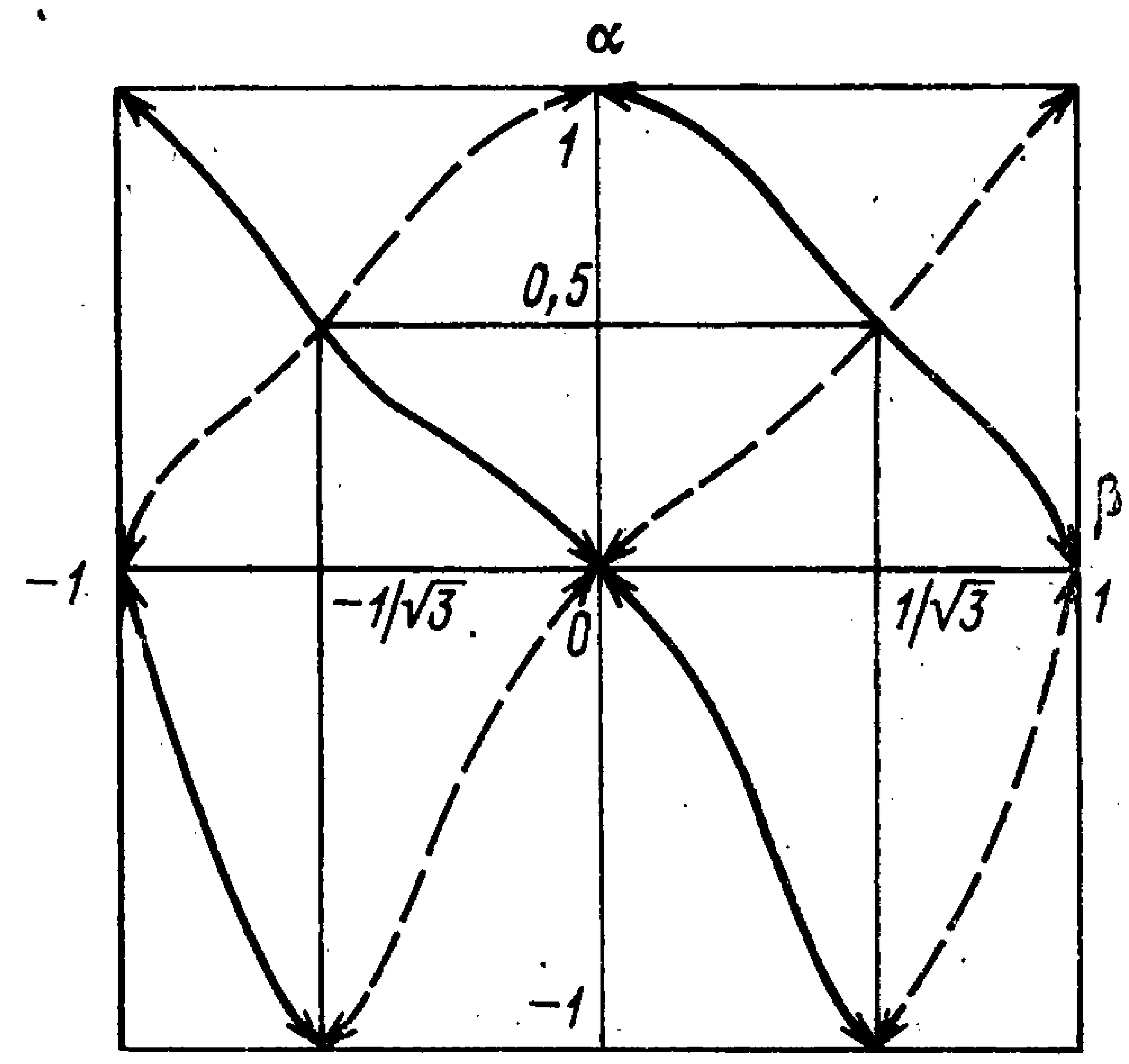
$$(4.8)\qquad \alpha=\frac{1-\beta^2}{7\beta^2-3},\quad \beta^2\in B_2=\Big\{x:0\leqslant x<\frac{1}{3},\frac{1}{2}\leqslant x<1\Big\}$$

Эти решения назовем решениями второго типа (штриховые кривые на фиг. 2), которые орбитально устойчивы, если $A_1>C_1$ (вытянутый спутник), в противном случае они неустойчивы.

Таким образом, при движении почти сферического динамически симметричного спутника относительно центра масс на круговой орбите в случае, когда частота движения центра масс спутника по орбите равна частоте вращения спутника вокруг вектора кинетического момента, существует два типа однопараметрических семейства $(2\pi/\omega_0)$-периодических решений Пуанкаре, которые определяются начальными значениями (4.5); параметром является постоянная во все время движения величина проекции вектора кинетического момента на ось симметрии спутника. Если $A_1 > C_1$ (вытянутый спутник), то решения первого типа, которые определяются начальными данными (4.7) (в этих решениях проекция вектора кинетического момента на плоскость орбиты, при прохождении спутником перигея, коллинеарна радиус-вектору центра масс), неустойчивы;



Фиг. 2



Фиг. 3

решения второго типа, определяемые начальными данными (4.8) (в этих решениях проекция вектора кинетического момента на плоскость орбиты при прохождении спутником перигея ортогональна радиус-вектору центра масс), орбитально устойчивы. Если же $A_1 < C_1$ (сплюснутый спутник), то решения первого типа орбитально устойчивы, а решения второго типа неустойчивы.

Рассмотрим теперь случай $\omega = 2\omega_0$, т. е. $L_0 = 2J_0\omega_0$. В этом случае

$$\langle H_1\rangle = -A_1\frac{L_0^2}{2J_0^2} + \omega_0^2(A_1 - C_1)\Big\{-\frac{3}{4}(1-\beta^2) - \\ -\frac{3}{8}(1-\alpha^2)(3\beta^2-1) - \\ -\frac{3}{4}\beta(1+\alpha)\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^2}\sin(\psi_0 + 2\lambda_0)\Big\}$$

и для определения начальных значений, которым соответствуют $(2\pi/\omega_0)$-периодические решения, рождающиеся из (4.3), имеем систему

$$\frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial\lambda_0} = -\frac{3}{2}\omega_0^2(A_1 - C_1)\beta(1+\alpha)\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^2}\cos 2\lambda_0 = 0$$

$$\frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial L_{n_0}} = \frac{3}{8}\frac{\omega_0}{J_0}(A_1 - C_1)\Big\{\alpha(3\beta^2-1) - \\ -\beta\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}(1+\alpha)(1-2\alpha)\sin 2\lambda_0\Big\} = 0$$

Если $\beta \neq 0, \pm 1$, $\alpha \neq 0, \pm 1$, то система имеет решение $\cos 2\lambda_0 = 0$, а зависимость α от β задается неявно уравнением

$$\alpha(3\beta^2 - 1) = \beta\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}(1+\alpha)(1-2\alpha)\sin 2\lambda_0$$

Периодическими решениями первого типа здесь назовем решения, для которых $\lambda_0 = \pi/4$, $5\pi/4$, при соответствующей зависимости α от β (сплошные кривые на фиг. 3). Решениями второго типа назовем решения, для которых $\lambda_0 = -\pi/4$, $-5\pi/4$, при зависимости α от β, изображенной на фиг. 3 штриховыми линиями.

Кривые на фиг. 3 строились при помощи ЭВМ, гессиан в каждой точке этих кривых отличен от нуля. Из фиг. 3 видно, что для решений первого типа каждому $\beta \in B_3 = \{x\colon -1 < x < -1/\sqrt{3},\ 0 < x < 1/\sqrt{3}\}$ соответствует два различных начальных значения $\alpha = L_{n_0}/L_0$, а для решений второго типа каждому $\beta \in B_4 = \{x\colon -1/\sqrt{3} < x < 0,\ 1/\sqrt{3} < x < 1\}$ также соответствует два различных значения α. В работе [4] начальные значения для углов λ, которые соответствуют периодическим решениям Пуанкаре, найдены ошибочно.

Условия устойчивости решений записываются в виде

$$\frac{d^2H_0}{dL_0^2}\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\lambda_0^2} = 3\frac{\omega_0^2}{J_0}(A_1-C_1)\beta(1+\alpha)\sqrt{1-\beta^2}\times \times\sqrt{1-\alpha^2}\sin 2\lambda_0 > 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial^4\langle H_1\rangle}{\partial\lambda_0^4} = -12\omega_0^2(A_1-C_1)\beta(1+\alpha)\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^2}\sin 2\lambda_0 \neq 0$$

Второе из этих условий выполняется, если $\alpha, \beta \neq 0, \pm 1$, а первое условие эквивалентно

$$(A_1 - C_1)\beta \sin 2\lambda_0 > 0 \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует, что решения первого типа орбитально устойчивы, если $A_1 > C_1$ и $0 < \beta < 1$, т. е. $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$; или если $A_1 < C_1$ и $-1 < \beta < 0$, т. е. $\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2$. Периодические решения второго типа орбитально устойчивы, если $A_1 > C_1$ и $-1 < \beta < 0$ или если $A_1 < C_1$ и $0 < \beta < 1$. Отсюда видно, что если периодические решения первого типа орбитально устойчивы, то решения второго типа неустойчивы, и наоборот.

Автор благодарит А. П. Маркеева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
2. *Barrar R.* A proof of the convergence of the Poincare — von Zeipel procedure in celestial mechanics.— Amer. J. Math., 1966, v. 88, No. 1, p. 206—220.
3. *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. т. II М.: ВИНИТИ, 1978. 223 с.
4. *Баркин Ю. В., Панкратов А. А.* О периодических движениях осесимметричного спутника относительно центра масс на круговой орбите (I).— Вест. МГУ. Сер. физ., астрон., 1978, № 19, вып. 1, с. 95—104.
5. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.IX.1982