Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 5, 1983

УДК 531.31

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ В ОБЛАСТЯХ ВОЗМОЖНЫХ ДВИЖЕНИЙ С КРАЕМ

Булатович Р. М.

Исследуется задача о существовании решений укороченного уравнения Гамильтона — Якоби во всей области возможных движений с краем. Указываются ограничения на топологию областей возможных движений, в которых уравнение Гамильтона — Якоби разрешимо в целом. В частности, граница не может быть связной. Существованию решений во всей области возможных движений препятствуют фокальные точки, в которых пересекаются выходящие с границы бесконечно близкие траектории. Указывается связь полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби с особыми решениями в окрестности границы.

Конфигурационным пространством натуральной механической системы с n степенями свободы служит гладкое n-мерное многообразие M, а фазовым пространством — касательное расслоение TM многообразия M. Кинетическая энергия $T: TM \to R$ — гладкая функция в фазовом пространстве, квадратичная по скоростям, а потенциальная энергия $U: M \to R$ — гладкая функция на M. Движения — гладкие отображения $m: R \to M$, удовлетворяющие в локальных координатах $q = \{q_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ на M уравнениям Лагранжа с лагранжианом $L = T - U$. Интеграл энергии $T + U = h$ при фиксированном значении h выделяет в фазовом пространстве $(2n - 1)$-мерную гиперповерхность Π^{2n-1}, на которой целиком лежат фазовые траектории системы. Естественная проекция гиперповерхности Π^{2n-1} на многообразие M определяет область

$$D = \{U \leqslant h\} \subset M \tag{0.1}$$

в которой может происходить движение — область возможных движений.

Внутри области D, согласно принципу наименьшего действия, траектории системы совпадают с геодезическими линиями метрики Якоби $d\rho^2 = (h - U)\, ds^2$, где ds^2 — риманова метрика на M, задающая кинетическую энергию, т. е. $T = {}^1/_2\, (ds/dt)^2$. Внутри области D метрика $d\rho$ — обычная риманова метрика, а на границе $\partial D = \{U = h\}$ она имеет особенность: $d\rho = 0$, т. е. длина любой кривой на границе равна нулю. Геометрия геодезических в области с краем не похожа на привычную геометрию римановых пространств [1].

1. Расстояние от границы как функция «укороченного действия». Всюду ниже предполагаем, что на границе ∂D нет положений равновесия — критических точек потенциальной энергии U. Тогда ∂D — гладкое $(n - 1)$-мерное многообразие.

Расстоянием точки $q \in D$ до границы ∂D, по определению, называется величина

$$\partial(q) = \inf_{a \in \partial D} d(q, a)$$

где $d(a, b)$ означает нижнюю грань длин в метрике $d\rho$ кусочно-гладких кривых из области D с концами в точках a и b. Доказано [1], что для произвольной точки q компактной области D имеется проходящая через нее траектория, которая достигает границы и длина которой равна $\partial(q)$. Отсюда следует, в частности, что множество всех траекторий, начинающихся в точках границы, заметает все множество D.

Обозначим через Σ_ρ множество точек из D, расстояние от которых до границы ∂D вдоль траекторий, исходящих с границы, равно ρ.

Лемма 1.1. Существует $p_0 > 0$ (p_0 мало), такое, что для всех точек $q \in \Sigma_p$, $0 \leqslant p \leqslant p_0$ расстояние $\partial(q) = p$. Множество Σ_p — гладкая гиперповерхность в D, диффеоморфная ∂D.

Лемма 1.2. (аналог леммы Гаусса). Существует $p_0 > 0$, такое, что для всех $p \in [0, p_0]$ геодезические, исходящие из точек границы ∂D пересекают гиперповерхности Σ_p под прямым углом.

Доказательства лемм 1.1 и 1.2 содержится в [1, 2].

Из леммы Гаусса следует, что существует окрестность границы ∂D — полоса, заключенная между ∂D и Σ_p (p достаточно мало), — в которой траектории, исходящие из точек границы, не пересекаются. Следовательно, через каждую точку из малой окрестности границы проходит единственная траектория этого семейства. Значит, в малой окрестности ∂D интеграл укороченного действия

$$S = \int_\gamma \sqrt{h-U}\, ds = \int_\gamma \sqrt{h-U}\sqrt{T}\, dt = \int_\gamma 2T\, dt$$

вычисленный вдоль траектории, выходящей с границы, можно рассматривать как функцию $S(q)$ конечной точки q, которая, очевидно, равна расстоянию $\partial(q)$.

Утверждение 1.1. Дифференциал функции S равен

$$dS = p dq = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i$$

где $p = \partial T/\partial q^{\cdot}$ определяется по скорости $q^{\cdot}$ на траектории γ.

Это утверждение аналогично теореме о дифференциале функции действия ([3], гл. 9) и доказывается тем же методом.

Из интеграла энергии и предыдущего утверждения вытекает

Утверждение 1.2. Функция $S(q)$ удовлетворяет уравнению

$$H(\partial S/\partial q,\ q) = h$$

называемому укороченным уравнением Гамильтона — Якоби.

Так как $H = T + U$, где $T = {}^1/_2 \langle A(q)p,\ p\rangle$ — положительно-определенная квадратичная форма ($\langle , \rangle$ — скалярное произведение), то уравнение Гамильтона — Якоби можно записать в следующем виде:

$$(1.1) \qquad {}^1/_2 \langle A(q)\, \partial S/\partial q,\ \partial S/\partial q\rangle + U(q) = h$$

Исследуем решение уравнения (1.1) в области D. Поскольку на границе $dS = 0$, то под решением естественно понимать гладкую функцию внутри области D, которая на каждой связной компоненте границы ∂D принимает постоянные значения.

2. Необходимые условия разрешимости уравнения Гамильтона — Якоби в целом. *Теорема* 2.1. В целой области возможных движений со связной границей ∂D не существует гладкого решения уравнения (2.1).

Доказательство. Предполагая существование решения S, заключаем, что оно достигает экстремальных значений внутри области D. Так как в точке экстремума градиент функции S равен нулю, то из (1.1) следует, что эта точка должна быть на границе ∂D. Противоречие.

На вопрос, возможны ли области D, в которых может существовать решение уравнения (1.1) в целом, отвечает

Теорема 2.2. Если существует решение уравнения (2.1) в целой области возможных движений D, то область D диффеоморфна прямому произведению

$$\Gamma \times [0, 1](\partial D = \Gamma \times \{0\} \cup \Gamma \times \{1\})$$

где Γ — гладкое связное компактное $(n - 1)$-мерное многообразие.

Доказательство. Предположим существование решения S уравнения (1.1) в целой области возможных движений (0.1). Уже показано, что граница ∂D области D не может быть связной. Сначала рассмотрим случай, когда ∂D разбивается на два непересекающихся гладких связных многообразия: $\partial D'$ и $\partial D''$ $(\partial D = \partial D' \cup \partial D'', \partial D' \cap \partial D'' = \varnothing)$ и $S|_{\partial D'} = c_1 = \text{const}$, $S|_{\partial D''} = c_2 = \text{const}$. Обозначим через Σ_ε множество точек из D, отстоящих от границы на расстоянии $\varepsilon > 0$ в метрике Якоби. Пусть Σ_ε' и Σ_ε'' — гладкие непересекающиеся многообразия, составляющие Σ_ε, т. е. $\Sigma_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon' \cup \Sigma_\varepsilon''$ $(\Sigma_\varepsilon' \cap \Sigma_\varepsilon'' = \varnothing)$, причем Σ_ε' (Σ_ε'') близко к $\partial D'$ $(\partial D'')$. Многообразие Σ_ε ограничивает некоторое гладкое многообразие с краем G, которое содержится в D.

Функция S принимает постоянные значения на Σ_ε' и Σ_ε'' и на них не имеет критических точек. Поэтому S можно рассматривать как функцию Морса триады гладких многообразий $(G, \Sigma_\varepsilon', \Sigma_\varepsilon'')$. Так как S не имеет критических точек в G, то число Морса μ триады равно нулю. Из теоремы о тривиальном кобордизме [4] следует, что $(G, \Sigma_\varepsilon', \Sigma_\varepsilon'')$ — тривиальный кобордизм, т. е. G диффеоморфно $\Sigma_\varepsilon' \times [0, 1]$ и Σ_ε'' диффеоморфно Σ_ε'. С другой стороны, $\partial D'$ и Σ_ε' $(\partial D''$ и $\Sigma_\varepsilon'')$ ограничивают тоже гладкое многообразие с краем, диффеоморфное $\partial D' \times [0, 1]$ $(\partial D'' \times [0, 1])$. Это показано, например, в [1]. Склеивая многообразия по общим границам, т. е. отождествляя $\partial D' \times \{1\}$ и Σ_ε' $(\Sigma_\varepsilon' \times \{1\}$ и $\partial D'' \times \{1\})$, получаем, что D диффеоморфно $\partial D' \times [0, 1]$. Предположение о том, что ∂D разбивается только на две компоненты связности, не уменьшает общности доказательства. Действительно, предполагая существование больше двух компонент связности, приходим к выводу, что D разбивается на несколько многообразий с краем, каждое из которых диффеоморфно прямому произведению одной компоненты границы и интервала. Теорема доказана.

Следствие. Если существует решение уравнения Гамильтона — Якоби в целой области возможных движений, то каждая траектория, исходящая с границы, соответствует либрационному движению.

Доказательство. Возьмем какую-либо траекторию, исходящую с границы. Дифференцируя S вдоль траектории, получим, что внутри D

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q} q^{\cdot} = 2(h - U) > 0$$

Следовательно, S возрастает вдоль этой траектории, и если предположить, что $S(q(t))|_{t=0} = c_1$, то при определенном t' функция S достигнет значения c_2 и движущаяся точка попадет на границу. Число t' конечно, так как точка не может асимптотически стремиться к ∂D при $t \to \infty$ [1]. Утверждение доказано.

Пример. Пусть $M = R^2\{x, y\}$, $2T = x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}$, $2U = x^2 + y^2 - 2a\sqrt{x^2 + y^2} + a^2$, $a > 0$.

Область возможных движений — кольцо:

$$(a - \sqrt{2h})^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (a + \sqrt{2h})^2, \quad h < a^2/2$$

Функция

$$S(x, y) = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2U} - a)\sqrt{2h - (\sqrt{2U} - a)^2} + 2h \arcsin \frac{\sqrt{2U} - a}{\sqrt{2h}}\right]$$

удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби, гладкая внутри D и на границе области D принимает постоянные значения.

3. Фокальные точки границы области возможных движений. Предположим, что карта с локальными координатами $q = \{q_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ покрывает целую область D. Возьмем на границе ∂D в некоторой окрестности произвольной точки q_0 локальные координаты $\alpha = \{\alpha_i\}(i = 1, \ldots$ $\ldots, n - 1)$, такие, что точке q_0 отвечает $\alpha = 0$. Рассмотрим решения уравнений движения с начальными условиями

$$(3.1) \qquad q = q(t, \alpha), \quad q(0) = q_0, \ \dot{q}(0) = 0$$

как $(n - 1)$-параметрическое семейство траекторий γ_α, исходящих из окрестности точки q_0 границы ∂D. Таким образом, определено отображение

$$F : \partial D \times R_+ \to D, \quad R_+ = \{t, t > 0\}$$

задаваемое формулой $F(t, \alpha) = q(t, \alpha)$.

Определение. Точка q^* называется фокальной точкой границы ∂D вдоль траектории γ_0, если она является критическим значением отображения F.

Иначе говоря, если $q^* = q(t^*, 0)$ — фокальная точка, то якобиан отображения F в точке $(t^*, 0)$ вырожден, т. е.

$$(3.2) \qquad \operatorname{rank} \| \partial q / \partial \beta \|_{(t^*, 0)} < n, \quad \beta = (\alpha, t)$$

Геометрический смысл этого определения проясняют следующие теоремы.

Теорема 3.1. Если q^* — фокальная точка, то либо $q^* \in \partial D$, либо в точке q^* пересекаются траектории, исходящие из бесконечно близких точек границы.

При помощи лемм (1.1) и (1.2) выводится

Следствие. Существует окрестность границы ∂D, в которой нет фокальных точек.

Доказательство теоремы. Вместе с траекторией $q(t, 0)$ рассмотрим бесконечно близкую траекторию $q + \delta q$, где $\delta q = \langle (\partial q / \partial \alpha) |_{\alpha=0}, \ \delta\alpha \rangle$. В точке пересечения $(q + \delta q) |_{t^*+\varepsilon} = q(t^*)$. Поскольку

$$(q + \delta q) |_{t^*+\varepsilon} = q(t^*) + \dot{q}(t^*) \varepsilon + \delta q |_{t^*} + \ldots$$

то, отбрасывая члены высшего порядка малости, получаем равенство

$$\dot{q}(t^*) \varepsilon + \delta q |_{t^*} = 0$$

или

$$(3.3) \qquad \dot{q}(t^*) \varepsilon + \langle (\partial q / \partial \alpha) |_{t=t^*, \alpha=0}, \quad \delta\alpha \rangle = 0$$

Полученная система имеет нетривиальное решение, если выполнено условие (3.2). Если $\dot{q}(t^*) \neq 0$, то q^* — точка пересечения — находится внутри области D. Когда $\dot{q}(t^*) = 0$, из (3.3) не всегда следует пересечение траекторий. В этом случае $q^* \in \partial D$.

Теорема 3.2. Если существует огибающая семейства γ_α, то фокальная точка границы вдоль γ_0 совпадает с общей точкой огибающей и траектории γ_0.

Доказательство. Предположим, что существует огибающая, заданная уравнением $f(q) = 0$, которое в D определяет регулярную гиперповерхность. Пусть точке касания траектории γ_α и огибающей отвечает момент времени $t^*(\alpha)$. Тогда в некоторой окрестности на ∂D точки q_0 будет $f(q(t^*(\alpha), \alpha)) \equiv 0$. Дифференцируя это тождество по α и имея в виду условие касания

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial q}\Big|_{q^*}, \frac{\partial q}{\partial t}\Big|_{t^*}\right\rangle = 0 \tag{3.4}$$

получаем

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial q}\Big|_{q^*}, \frac{\partial q}{\partial \alpha}\Big|_{t=t^*,\, \alpha=0}\right\rangle = 0 \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) и условия регулярности огибающей следует

$$\det \| \partial q/\partial \beta \|_{(t^*,\, 0)} = 0 \quad ((t, \alpha) = \beta)$$

что и доказывает теорему. Рассмотрим гиперповерхность Σ_ε, определенную леммой 1.1. Траектории, исходящие с границы ∂D, пересекают гиперповерхность Σ_ε под прямым углом. Так как внутри области D каждая траектория — гладкая кривая, то на ней можно ввести натуральный параметр и она превращается в «стандартную» геодезическую. Из произвольной точки $m \in \Sigma_\varepsilon$ выпустим по направлению нормали геодезическую, которую запишем в виде

$$\gamma(k) = \exp_m(kn); \quad \gamma(0) = m, \ \dot\gamma(0) = n$$

где n — вектор, перпендикулярный $T_m \Sigma_\varepsilon$. Таким образом определено отображение exp: $\perp \Sigma_\varepsilon \to D$ нормального расслоения гиперповерхности Σ_ε в D. Так как полученные геодезические совпадают с траекториями, исходящими из границы ∂D (две геодезические, коснувшиеся друг друга в некоторой точке, совпадают), то внутри области D совпадают критические значения отображения F и отображения exp. Критическое значение экспоненциального отображения нормального расслоения подмногообразия $N \subset M$ в M, по определению, называется фокальной точкой подмногообразия N [5]. Итак, доказана

Лемма 3.1. Фокальная точка границы ∂D внутри области D совпадает с фокальной точкой гиперповерхности Σ_ε, где ε достаточно мало.

Теорема 3.3 (аналог теоремы Якоби). За первой фокальной точкой траектория γ_α, исходящая с границы ∂D, не минимизирует расстояние до ∂D.

Доказательство. Так как фокальные точки границы ∂D и гиперповерхности Σ_ε внутри D совпадают, то $\gamma(t)$ не минимизирует расстояние до Σ_ε ([5], гл. 11). Поскольку расстояние каждой точки $m \in \Sigma_\varepsilon$ до ∂D равно ε [1], то из этого результата следует утверждение теоремы для внутренних фокальных точек. Если первая фокальная точка $\gamma(t^*)$ лежит на границе ∂D, то эта траектория отвечает либрационному движению. Точка $\gamma(t^* + \delta)$ совпадает с $\gamma(t^* - \delta)$, поэтому сегмент $\gamma([0, t^* - \delta])$ короче сегмента $\gamma([0, t^* + \delta])$.

Замечание. То же утверждение верно и для окрестности точки $\gamma(0)$ в ∂D.

Если $\gamma([0, t_1])$ — сегмент траектории $\gamma(t)$, на котором нет фокальных точек границы ∂D, то, используя утверждение из [5] и рассуждая как выше, заключаем, что существуют окрестность сегмента в D и окрестность V точки $\gamma(0)$ в ∂D, такие, что γ минимизирует расстояние среди путей, соединяющих точки из V с $\gamma(t)$, $t < t_1$.

Итак, первую фокальную точку можно охарактеризовать следующим образом: точка $\gamma(t^*)$ — первая фокальная точка границы ∂D вдоль γ, если

$\gamma([0, t_1])$ не минимизирует длину дуги до окрестности $\gamma(0)$ в ∂D при $t_1 > t^*$, но минимизирует ее при $t_1 < t^*$.

Геометрическое место фокальных точек границы ∂D, по аналогии с геометрической оптикой, назовем каустикой. В общем случае она представляет многообразие размерности $n - 1$, которое может иметь особенности.

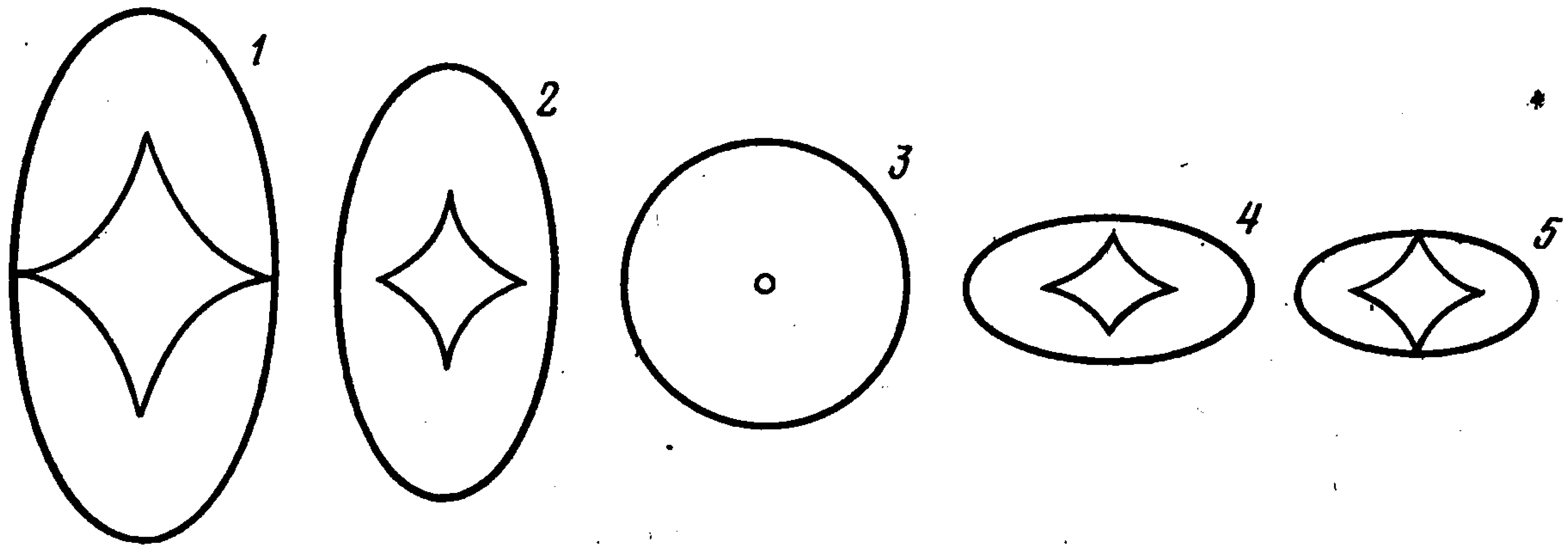
Как правило, определить каустику бывает весьма трудно. Приведем два примера, не требующих слишком сложных вычислений.

Пример 1. Пусть

$$M = R^2\{x, y\},\ 2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,\ 2U = x^2 + \omega^2 y^2$$

Область возможных движений D: $x^2 + \omega^2 y^2 \leqslant 2h$, где $h > 0$ — постоянная полной энергии.

На фигуре показано изменение каустики, когда параметр ω возрастает от 0 до



∞ (картины 1—5 соответствуют значениям $0 < \omega \leqslant 1/2$, $1/2 < \omega < 1$, $\omega = 1$, $1 < \omega < 2$, $2 \leqslant \omega < \infty$).

Пример 2. Пусть

$$M = R^2\{x, y\},\ 2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,\ 2U = x^2 - a^2 y^2,\ a = \text{const}$$

Область D: $x^2 + a^2 y^2 \leqslant 2h$, где $h < 0$.

Каустика имеет особенность — точку возврата, которая находится на расстоянии $\sqrt{-1/2h}\,(1 + \operatorname{ch} 1/2 a\pi)$ от начала координат. При уменьшении постоянной h острие каустики стремится к началу координат.

Заметим, что определение каустики границы ∂D введено независимо от уравнения Гамильтона — Якоби и каустика характеризует геометрию геодезических в области возможных движений с краем.

4. О решении в окрестности границы области возможных движений. Без ущерба общности предположим, что граница области возможных движений связная. Поставим следующую задачу: найти решение уравнения (1.1), которое на границе ∂D принимает постоянное значение, т. е. $S|_{\partial D} = a = \text{const}$. (Решение этой задачи не единственно. Действительно, если $S_1 = S$ — решение, тогда и $S_2 = 2a - S$ — тоже решение.)

Теорема 4.1. Функции

$$S(q) = a \pm \int_{q_0 \in \partial D}^{q} 2T\,dt$$

(интегрирование вдоль траектории, соединяющей точку q с ∂D) — единственные решения поставленной задачи.

Доказательство. Следуя методу характеристик [6], приходим к процессу, который единственным способом, с точностью до знака $\pm$ приводит к решению $S(q)$. Причина двузначности — обратимость уравнений движения.

Теорема утверждает, что в малой окрестности границы можно получить интегральную поверхность, исходящую с границы. Рассмотрим возможность продолжения решения «вдоль траекторий», т. е. в окрестности некоторой заранее фиксированной траектории, исходящей из точки $q_0 \in \partial D$, которой соответствует значение $\alpha = 0$. Несмотря на то что $q(t, \alpha)$ и $S(t, \alpha)$ однозначно определяются характеристической системой, нельзя как угодно далеко продолжить интегральную поверхность, не попадая на особые точки. Особые точки — это точки, в которых функция $S(q)$ не может быть однозначной. Неоднозначность возникает в тех точках, когда нельзя выразить t, α через q однозначно. В этих точках должны нарушаться условия теоремы об обратной функции, т. е. обращается в нуль якобиан, что приводит к определению каустики. Таким образом, границей однозначного продолжения решения уравнения (1.1) служит часть каустики.

Оценим область существования однозначного решения. Из каждой точки $q_0 \in \partial D$ выпустим траекторию и найдем первую фокальную точку q_0^*. Расстояние точки q_0^* от q_0 вдоль траектории равно $\partial(q_0^*)$. Сдвинем ∂D вдоль траектории на расстояние

$$c = \inf_{q_0 \in \partial D} \partial(q_0^*)$$

Получим гиперповерхность Σ_c, вместе с ∂D выделяющую из D полосу, в которой

$$\det \| \partial q / \partial(t, \alpha) \| \neq 0$$

и заведомо существует решение уравнения (1.1). Если dq — перемещение вдоль гиперповерхности Σ_b $(b < c)$, то

$$0 = dS|_{\Sigma_b} = p dq$$

откуда следует, что траектории пересекают гиперповерхности под прямым углом. Таким образом получена оценка числа p_0 в лемме Гаусса 1.2, т. е. p_0 должно быть меньше, чем расстояние до ближайшей фокальной точки границы ∂D.

В теории Гамильтона — Якоби существенную роль играют полные интегралы — решения уравнения (1.1), содержащие кроме h еще $n-1$ постоянную $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$: $S = S(q, a, h)$ и удовлетворяющие условию невырожденности

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \, \partial q} \right\| \neq 0, \quad \xi = (a, h)$$

Установим связь между полным интегралом и решением уравнения (1.1) в окрестности границы. Для простоты ограничимся случаем двух степеней свободы. При фиксированном значении h полный интеграл $S(q, a, h)$ представляет однопараметрическое семейство решений уравнения (2.1). Область определения этих решений D_a зависит разумеется от a и составляет некоторую часть области возможных движений. Так как при разных значениях a функции $S(q, a, h)$ представляют разные решения уравнения Гамильтона — Якоби, то из теоремы 4.1 следует, что замыкание области D_a может пересекаться с границей ∂D лишь по изолированному множеству точек. Пусть это условие выполнено. Если существует огибающая семейства решений $S(q, a, h)$, то эта функция тоже будет решением [6]. Следовательно, эта огибающая совпадает с одним из ранее определенных решений $S(q)$ в окрестности границы ∂D.

Пример. Пусть

$$2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \ 2U = x^2 + y^2, \ h = \text{const}; \ D = \{x^2 + y^2 \leqslant 2h\}$$

Уравнение Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + x^2 + y^2 = 2h$$

Используя метод разделения переменных, находим полный интеграл S и с учетом уравнения $\partial S / \partial a = 0$ получаем огибающую

$$S(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2h - (x^2 + y^2)} + h \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{2h}}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что она действительно представляет решение в окрестности границы.

Автор благодарит В. В. Козлова, под руководством которого выполнена работа, а Я. В. Татаринова и С. В. Болотина за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
2. *Болотин С. В.*, *Козлов В. В.* Либрация в системах со многими степенями свободы.— ПММ, 1978, т. 42, вып, 2, с. 245—250.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
4. *Милнор Дж.* Теорема об h-кобордизме. М.: Мир, 1969. 115 с.
5. *Бишоп Р. Л.*, *Криттенден Р. Дж.* Геометрия многообразий. М.: Мир, 1967. 335 с.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

Титоград

Поступила в редакцию 1.VI.1982