Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 5, 1983

УДК 517.9:531

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

Сазонов В. В.

Рассматривается дифференциальное уравнение вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы в случае, когда собственная частота системы много больше внешней. Доказывается существование периодических решений такого уравнения, близких периодическим решениям соответствующего вырожденного уравнения. Полученный результат обобщается на случай системы с несколькими степенями свободы. Рассматривается система с циклическими координатами под действием внешних периодических сил, частота которых много меньше собственных частот приведенной системы. Доказывается существование периодических решений уравнений движения такой системы, близких периодическим решениям соответствующих вырожденных уравнений.

1. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + \mu^2 F(t, x) = f(t, x, x^\cdot) \tag{1.1}$$

где μ — положительный параметр, $F(t, x)$ и $f(t, x, x^\cdot)$ — периодические функции t с периодом $T > 0$. Пусть уравнение $F(t, x) = 0$ имеет T-периодическое решение $x = \varphi(t)$. Будем искать T-периодические решения уравнения (1.1), определенные при достаточно большом μ и близкие решению $x = \varphi(t)$. Полагаем, что функции $F(t, x)$, $f(t, x, x^\cdot)$, $\varphi(t)$ трижды непрерывно дифференцируемы при $0 \leqslant t \leqslant T$ и достаточно малых $|x - \varphi(t)|$, $|x^\cdot - \varphi^\cdot(t)|$ и

$$p(t) = \partial F(t, \varphi(t))/\partial x > 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Пусть

$$a = -\frac{1}{4b}\int_0^T \frac{\partial f(t, \varphi(t), \varphi^\cdot(t))}{\partial x^\cdot}\,dt, \qquad b = \frac{1}{2}\int_0^T p^{1/2}(t)\,dt$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 ab}$$

Для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ рассмотрим множество

$$I(\varepsilon) = \{\mu : \mu > 0,\ \operatorname{sh}^2 ab + \sin^2 \mu b > \varepsilon^2\}$$

Это множество не пусто. При $a \neq 0$ и $0 < \varepsilon < |\operatorname{sh} ab|$ оно совпадает с интервалом $(0, +\infty)$, при $a = 0$

$$I(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\pi(k-1) + \arcsin\varepsilon}{b}, \frac{\pi k - \arcsin\varepsilon}{b}\right]$$

Теорема 1. Для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют такие положительные числа M, C_1 и C_2, что при $\mu \geqslant M$, $\mu \in I(\varepsilon)$ уравнение (1.1) имеет единственное T-периодическое решение $x_*(t, \mu)$, удовлетворяющее неравенствам

$$|x_*(t,\mu) - \varphi(t)| \leqslant \frac{C_1}{\mu^2}, \qquad |x_*^\cdot(t,\mu) - \varphi^\cdot(t)| \leqslant \frac{C_2}{\mu}\ (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Замечание. Если $a \neq 0$, то величины M, C_1 и C_2 можно выбрать не зависящими от ε (но тогда $M, C_1, C_2 \to +\infty$ при $a \to 0$). Взяв $\varepsilon < |\operatorname{sh} ab|$, найдем, что в таком случае решение $x_*(t, \mu)$ будет определено при любом $\mu \geqslant M$.

Если $p(t) < 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, то существование T-периодического решения уравнения (1.1), переходящего в $\varphi(t)$ при $\mu \to +\infty$, следует из результатов [1]. Случай, когда $p(t)$ обращается в нуль в некоторых точках отрезка $[0, T]$, требует особого исследования.

Уравнение (1.1) можно интерпретировать как уравнение вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы. Величину $2a$ можно считать обобщенным коэффициентом трения этой системы для движения $x \approx \varphi(t)$. При некоторых значениях μ в системе возможен резонанс. Такие значения исключаются из анализа условием $\mu \in I(\varepsilon)$. Если $a \neq 0$, то, рассматривая достаточно большие значения μ, это условие можно опустить. Если же $a = 0$, то резонанс в системе может возникнуть на любом достаточно удаленном от нуля отрезке оси μ, длина которого больше π/b.

Уравнением вида (1.1) описываются, например, колебания вокруг центра масс твердого тела с сильным постоянным магнитом во внешнем периодическом магнитном поле [2]. Для уравнения, изучавшегося в [2], $a = 0$. Приведенные в этой работе результаты численных расчетов наглядно демонстрируют возникновение резонансов при некоторых значениях большого параметра.

2. Для доказательства теоремы 1 в уравнении (1.1) сделаем замену переменных $(t, x) \to (\tau, y)$:

$$\tau = \int_0^t p^{1/2}(s)\, ds, \qquad y = [x - \varphi(\psi(\tau))] \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\tau c(s)\, ds - a\tau\right)$$

$$c(\tau) = \left[\frac{p^{\cdot}(t)}{2p^{3/2}(t)} - \frac{1}{p^{1/2}(t)} \frac{\partial f(t, \varphi(t), \varphi^{\cdot}(t))}{\partial x^{\cdot}}\right]_{t=\psi(\tau)}$$

где $t = \psi(\tau)$ — обращение первого выписанного интеграла. Такая замена представляет собой модифицированную подстановку Лиувилля. В новых переменных (1.1) можно записать в виде

$$y'' + 2ay' + (\mu^2 + a^2)\, y = f_1(\tau, y, y') + \mu^2 F_1(\tau, y) \tag{2.1}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по τ, функции f_1 и F_1 периодически зависят от τ с периодом $2b$

$$\frac{\partial f_1(\tau, 0, 0)}{\partial y'} = F_1(\tau, 0) = \frac{\partial F_1(\tau, 0)}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

Сделанная замена переменных сводит отыскание T-периодического решения уравнения (1.1), близкого $\varphi(t)$, к отысканию $2b$-периодического решения уравнения (2.1), близкого к нулю.

В силу условий гладкости, наложенных на функции F, f и φ, функции f_1 и F_1 непрерывно дифференцируемы по τ и трижды непрерывно дифференцируемы по y и y'. Отсюда и из (2.2) следует существование таких положительных чисел h_1, h_2, M_1, M_2 и M_3, что для всех τ, y, y', u, u', удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \tau \leqslant 2b$, $|y| \leqslant h_1$, $|u| \leqslant h_1$, $|y'| \leqslant h_2$, $|u'| \leqslant h_2$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} &|f_1(\tau, y, y') - f_1(\tau, u, u')| \leqslant M_1 |y - u| + \\ &+ M_2 |y' - u'| (|y| + |u| + |y'| + |u'|) \\ &|F_1(\tau, y) - F_1(\tau, u)| \leqslant M_3 |y - u| (|y| + |u|) \end{aligned} \tag{2.3}$$

В частности, при $u = u' = 0$ и $M_4 = M_1 + M_2 h_2$ имеем

$$\begin{aligned} &|f_1(\tau, y, y') - f_1(\tau, 0, 0)| \leqslant M_4 |y| + M_2 y'^2 \\ &|F_1(\tau, y)| \leqslant M_3 y^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + 2ay' + (\mu^2 + a^2)\, y = h(\tau) \tag{3.1}$$

где $h(\tau)$ — непрерывно дифференцируемая $2b$-периодическая функция. При $\operatorname{sh}^2 ab + \sin^2 \mu b > 0$ уравнение (3.1) имеет единственное $2b$-периодическое решение, и это решение можно представить в виде

$$y(\tau) = \int_0^{2b} G(\tau, s) h(s)\, ds = \frac{h(\tau)}{\lambda_1 \lambda_2} + \int_0^{2b} G_1(\tau, s) h'(s)\, ds \tag{3.2}$$

$$G(\tau, s) = -\frac{\exp[\lambda_1(\tau - s \pm b)]}{2(\lambda_1 - \lambda_2)\operatorname{sh}\lambda_1 b} - \frac{\exp[\lambda_2(\tau - s \pm b)]}{2(\lambda_2 - \lambda_1)\operatorname{sh}\lambda_2 b}$$

$$G_1(\tau, s) = -\frac{\exp[\lambda_1(\tau - s \pm b)]}{2\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)\operatorname{sh}\lambda_1 b} - \frac{\exp[\lambda_2(\tau - s \pm b)]}{2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)\operatorname{sh}\lambda_2 b}$$

$$\lambda_{1,2} = -a \pm i\mu, \quad i^2 = -1$$

Здесь $G(\tau, s)$ — функция Грина периодической краевой задачи $y(0) = y(2b)$, $y'(0) = y'(2b)$ для (3.1); в выражениях для $G(\tau, s)$ и $G_1(\tau, s)$ верхний знак берется при $\tau \leqslant s$, нижний — при $\tau > s$.

Производную решения (3.2) можно найти по формуле

$$y'(\tau) = \int_0^{2b} \frac{\partial G(\tau, s)}{\partial \tau} h(s)\, ds = \int_0^{2b} G(\tau, s) h'(s)\, ds$$

Нормой функции $f(\tau)$, непрерывной на отрезке $[0, 2b]$, будем называть число $\nu(f) = \max |f(\tau)|$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 2b$. Так как

$$\max \int_0^{2b} |G(\tau, s)|\, ds \leqslant K, \qquad \max \int_0^{2b} \left| \frac{\partial G(\tau, s)}{\partial \tau} \right| ds \leqslant K\sqrt{a^2 + \mu^2}$$

$$\max \int_0^{2b} |G_1(\tau, s)|\, ds \leqslant \frac{K}{\sqrt{a^2 + \mu^2}}; \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 2b$$

$$K = \frac{\operatorname{sh} ab}{a\mu\sqrt{\operatorname{sh}^2 ab + \sin^2 \mu b}}$$

то для норм решения (3.2) и его производной имеют место оценки

$$\nu(y) \leqslant K\nu(h), \qquad \nu(y') \leqslant K\sqrt{a^2 + \mu^2}\,\nu(h) \tag{3.3}$$

$$\nu(y) \leqslant \frac{\nu(h)}{a^2 + \mu^2} + \frac{K\nu(h')}{\sqrt{a^2 + \mu^2}}, \qquad \nu(y') \leqslant K\nu(h')$$

справедливые как при $a \neq 0$, так и при $a = 0$. В последнем случае значения коэффициентов, содержащих a, находятся предельным переходом при $a \to 0$. В частности, при $a = 0$ имеем $K = b/(\mu |\sin \mu b|)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и положим $N = \operatorname{sh} ab / a\varepsilon$. Тогда, усиливая неравенства (3.3), при $\mu \in I(\varepsilon)$, $\mu \geqslant |a|$ можно записать

$$\nu(y) \leqslant N\mu^{-1}\nu(h), \quad \nu(y') \leqslant 2N\nu(h) \tag{3.4}$$

$$\nu(y) \leqslant \mu^{-2}[\nu(h) + N\nu(h')], \quad \nu(y') \leqslant N\mu^{-1}\nu(h') \tag{3.5}$$

Полученные неравенства содержательны при любом a: если $a = 0$, то $N = b/\varepsilon$. Если же $a \neq 0$, то можно взять $N = |a|^{-1}$. В этом случае неравенства (3.4), (3.5) будут справедливы при любом $\mu \geqslant |a|$. В п. 4 оценки (3.4), (3.5) используются без дополнительных оговорок относительно способа определения N и выбора μ.

4. Отыскание $2b$-периодических решений уравнения (2.1) сводится к решению для этого уравнения периодической краевой задачи на отрезке $[0, 2b]$, которая в свою очередь эквивалентна системе интегральных урав-

нений

$$(4.1)\qquad y_j(\tau)=\int_0^{2b} g_j(\tau,s)\,[f_1(s,y_1(s),y_2(s))+\mu^2F_1(s,y_1(s))]\,ds\equiv L_j(y_1,y_2)$$

$$j=1,2;\quad g_1(\tau,s)=G(\tau,s),\quad g_2(\tau,s)=\partial G(\tau,s)/\partial\tau$$

Здесь $y_1=y$, $y_2=y'$. Систему (4.1) будем решать методом последовательных приближений. Построим на отрезке $0\leqslant\tau\leqslant 2b$ последовательности функций $\{y_j^{(k)}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ $(j=1,2)$, положив

$$(4.2)\qquad y_j^{(0)}(\tau)\equiv 0,\quad y_j^{(k+1)}=L_j(y_1^{(k)},\ y_2^{(k)})\quad (j=1,2;\ k=0,1,\ldots)$$

Докажем, что при достаточно большом μ эти последовательности сходятся (в смысле нормы $\nu(\cdot)$) к решению системы (4.1).

Сначала доказывается, что при достаточно большом μ

$$(4.3)\qquad \nu(y_1^{(k)})\leqslant B_1\mu^{-2}\leqslant h_1,\quad \nu(y_2^{(k)})\leqslant B_2\mu^{-1}\leqslant h_2\quad (k=0,1,\ldots)$$

где B_1 и B_2 — некоторые положительные числа.

Поскольку

$$(4.4)\qquad y_j^{(1)}(\tau)=\int_0^{2b} g_j(\tau,s)\,f_1(s,0,0)\,ds\quad (j=1,2)$$

соотношения (4.2) при $k\geqslant 1$ можно представить в виде

$$y_j^{(k+1)}(\tau)=y_j^{(1)}(\tau)+\int_0^{2b} g_j(\tau,s)\,[f_1(s,y_1^{(k)}(s),y_2^{(k)}(s))-$$

$$-f_1(s,0,0)+\mu^2F_1(s,y_1^{(k)}(s))]\,ds\quad (j=1,2)$$

Предположим, что $\nu(y_j^{(k)})\leqslant h_j$ $(j=1,2;\ k=0,1,\ldots)$. Тогда в силу неравенств (2.4) и (3.4) будем иметь

$$(4.5)\qquad \nu(y_j^{(k+1)})\leqslant\nu(y_j^{(1)})+n_j\,[M_4\nu(y_1^{(k)})+\mu^2M_3\nu^2(y_1^{(k)})+M_2\nu^2(y_2^{(k)})]$$

$$j=1,2;\quad n_1=N\mu^{-1},\quad n_2=2N$$

С помощью соотношений (4.4) и (3.5) получаем оценки

$$\nu(y_1^{(1)})\leqslant D_1\mu^{-2},\quad \nu(y_2^{(1)})\leqslant D_2\mu^{-1}$$

$$D_2=N\nu(\partial f_1(\tau,0,0)/\partial\tau),\quad D_1=D_2+\nu(f_1(\tau,0,0))$$

Выберем числа B_1, B_2 из условий $B_1>D_1$, $B_2>D_2$ и положим

$$\mu\geqslant\mu_1=\max\left(\sqrt{\frac{B_1}{h_1}},\ \frac{B_2}{h_2},\ \frac{\varkappa}{B_1-D_1},\ \frac{2\varkappa}{B_2-D_2}\right)$$

$$\varkappa=N(M_4B_1+M_3B_1^2+M_2B_2^2)$$

Тогда если для некоторого k выполнены неравенства (4.3), то в силу (4.5) будем иметь

$$\nu(y_1^{(k+1)})\leqslant\mu^{-2}(D_1+\varkappa\mu^{-1})\leqslant B_1\mu^{-2}\leqslant h_1$$

$$\nu(y_2^{(k+1)})\leqslant\mu^{-1}(D_2+2\varkappa\mu^{-1})\leqslant B_2\mu^{-1}\leqslant h_2$$

Так как при $k=1$ неравенства (4.3) выполнены, отсюда следует их справедливость при всех k.

Докажем сходимость последовательных приближений (4.2). В силу неравенств (2.3) и (3.4) имеем

$$\nu(y_j^{(k+1)}-y_j^{(k)})\leqslant n_j\,[K_1\nu(y_1^{(k)}-y_1^{(k-1)})+K_2\nu(y_2^{(k)}-y_2^{(k-1)})]$$

$$j=1,2;\quad K_1=M_1+\mu^2M_3\,[\nu(y_1^{(k)})+\nu(y_1^{(k-1)})]$$

$$K_2=M_2\,[\nu(y_1^{(k)})+\nu(y_2^{(k)})+\nu(y_1^{(k-1)})+\nu(y_2^{(k-1)})]$$

Оценивая K_1 и K_2 с помощью неравенств (4.3), получаем

$$(4.6)\qquad \begin{gathered} \nu\,(y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}) \leqslant n_j\rho_k \quad (j = 1, 2) \\ \rho_k = H_1\nu\,(y_1^{(k)} - y_1^{(k-1)}) + H_2\mu^{-1}\nu\,(y_2^{(k)} - y_2^{(k-1)}) \\ H_1 = M_1 + 2M_3B_1, \quad H_2 = 2M_2\,(B_2 + B_1\mu^{-1}) \end{gathered}$$

Рассмотрим числовую последовательность ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$. В силу (4.6) справедливо соотношение

$$\rho_{k+1} \leqslant N\mu^{-1}\,(H_1 + 2H_2)\,\rho_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

где $N\mu^{-1}\,(H_1 + 2H_2) \to 0$ при $\mu \to +\infty$. Поэтому существует такое число $\mu_2 > 0$, что при $\mu \geqslant \mu_2$ имеет место неравенство $N\mu^{-1}\,(H_1 + 2H_2) \leqslant \leqslant {}^1/_2$.

Пусть $\mu \geqslant M = \max\,(\mu_1, \mu_2)$. Тогда $\rho_{k+1} \leqslant \rho_k/2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Используя эту оценку, можно доказать, что последовательности $\{y_j^{(k)}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2)$ равномерно сходятся на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant 2b$ к некоторым непрерывным функциям $y_j^*\,(\tau)$. Так как по построению этих последовательностей $y_j^{(k)}\,(0) = y_j^{(k)}\,(2b)$ $(j = 1, 2;\ k = 0, 1, \ldots)$, то $y_j^*\,(0) = y_j^*\,(2b)$. Аналогично в силу (4.3)

$$(4.7)\qquad \nu\,(y_1^*) \leqslant B_1\mu^{-2}, \quad \nu\,(y_2^*) \leqslant B_2\mu^{-1}$$

Переходя в соотношениях (4.2) к пределу при $k \to \infty$, находим, что $y_1^*\,(\tau)$ и $y_2^*\,(\tau)$ — решение системы (4.1), причем функция $y_1^*\,(\tau)$ дважды непрерывно дифференцируема и $dy_1^*\,(\tau)/d\tau = y_2^*\,(\tau)$.

Докажем единственность найденного решения. Предположим, что система (4.1) имеет еще одно решение $y_1^0\,(\tau)$, $y_2^0\,(\tau)$, удовлетворяющее оценкам (4.7). С помощью описанных выше построений для величины $\rho = H_1\nu\,(y_1^* - y_1^\circ) + H_2\mu^{-1}\nu\,(y_2^* - y_2^\circ)$ можно установить неравенство $\rho \leqslant \rho/2$. Отсюда $\rho = 0$ и, следовательно, $y_j^\circ = y_j^*$ $(j = 1, 2)$.

Продолжив $y_1^*\,(\tau)$ на всю действительную ось с помощью соотношений $y_1^*\,(\tau \pm 2b) = y_1^*\,(\tau)$, получим $2b$-периодическое решение уравнения (2.1). Этому решению отвечает искомое периодическое решение уравнения (1.1) $x_*\,(t, \mu)$. Вспоминая способ выбора μ, B_1, B_2, M и преобразуя оценки (4.7) в оценки для $\max\,|\,x_*\,(t, \mu) - \varphi\,(t)\,|$, $\max\,|\,x_*^{\boldsymbol{\cdot}}\,(t, \mu) - \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}\,(t)\,|$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, устанавливаем справедливость теоремы 1.

5. Уравнение (1.1) интерпретировалось как уравнение движения механической системы с одной степенью свободы. В оставшейся части статьи аналогичная задача решается для системы с несколькими степенями свободы. Доказанная ниже теорема 2 в определенной степени является обобщением теоремы 1.

Рассмотрим механическую систему с l степенями свободы, уравнения движения которой можно записать в виде

$$(5.1)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\mu^2\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, l)$$

Здесь $q_1, \ldots, q_l$ — обобщенные координаты системы, μ — положительный параметр:

$$(5.2)\qquad Q_j = Q_j\,(t, q_1, \ldots, q_l, q_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, q_l^{\boldsymbol{\cdot}}) \quad (j = 1, 2, \ldots, l)$$

— обобщенные силы, действующие в системе:

$$(5.3)\qquad \mu^2\Pi = \mu^2\Pi\,(q_1, \ldots, q_n)$$

— потенциальная энергия системы:

$$(5.4)\qquad T=\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{l}a_{jk}(q_1,\ldots,q_n)\dot q_j\dot q_k+\sum_{j=1}^{l}a_j(t,q_1,\ldots,q_l)\dot q_j+a_0(t,q_1,\ldots,q_l)$$

— ее кинетическая энергия. Полагаем, что в (5.4) матрица $(a_{jk})_{j,\,k=1}^{l}$ не содержит t и положительно определена, функции (5.2) и (5.4) 2π-периодически зависят от t, в (5.3) и (5.4) $1\leqslant n\leqslant l$. Примером механической системы, описываемой уравнениями вида (5.1), может служить намагниченное твердое тело, совершающее движение вокруг центра масс в сильном постоянном магнитном поле и подверженное дополнительному воздействию периодических внешних моментов.

Будем искать периодические решения уравнений (5.1), определенные при достаточно большом μ. Для того чтобы дать точную постановку задачи, перейдем в (5.1) к переменным Рауса q_j, $\dot q_j$, q_α, $p_\alpha=\partial T/\partial\dot q_\alpha$ $(j=1,\,2,\ldots,n;\ \alpha=n+1,\ldots,l)$. В результате эти уравнения примут вид

$$(5.5)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}=\mu^2\frac{\partial\Pi}{\partial q_j}-Q_j\qquad(j=1,\ldots,n)$$

$$\dot q_\alpha=\frac{\partial R}{\partial p_\alpha},\qquad \dot p_\alpha=Q_\alpha\qquad(\alpha=n+1,\ldots,l)$$

Здесь

$$R=\sum_{\alpha=n+1}^{l}p_\alpha\dot q_\alpha-T=-\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n}a_{jk}^{0}(q)\dot q_j\dot q_k+\sum_{j=1}^{n}b_j(t,x,q)\dot q_j+b_0(t,x,q)$$

$q=(q_1,\ldots,q_n)^T$, $x=(q_{n+1},\ldots,q_l,\ p_{n+1},\ldots,p_l)^T$, причем матрица $A_0(q)=(a_{jk}^{0})_{j,\,k=1}^{n}$ положительно определена. Введя подходящим образом функции $F(t,\,x,\,q,\,\dot q)\in R^{2(l-n)}$ и $f(t,\,x,\,q,\,\dot q)\in R^n$, уравнения (5.5) можно записать в виде

$$(5.6)\qquad \dot x=F(t,\,x,\,q,\,\dot q)$$

$$A_0(q)\ddot q+\mu^2\frac{\partial\Pi(q)}{\partial q}=f(t,x,q,\dot q)$$

Полученная система представляет самостоятельный интерес, поскольку уравнения движения некоторых механических систем приводятся к виду (5.6) без использования переменных Рауса. Ниже уравнения (5.6) рассматриваются вне связи с уравнением (5.5). Предполагается, что (5.6) x и $F\in R^m$ $(m\geqslant 0)$, q и $f\in R^n$ $(n\geqslant 1)$, $\Pi\in R^1$, F и f 2π-периодически зависят от t, $A_0(q)$ — симметричная положительно-определенная матрица порядка n. Функции $\Pi(q)$, $A_0(q)$, $f(t,\,x,\,q,\,\dot q)$ и $F(t,\,x,\,q,\,\dot q)$ считаются достаточно гладкими функциями своих аргументов, т. е. имеющими все необходимые для последующего анализа производные. Предполагается также, что $\partial\Pi(0)/\partial q=0$ и матрица $\partial^2\Pi(0)/\partial q^2$ положительно определена.

Систему

$$\dot x=F(t,\,x,\,0,\,0)$$

назовем вырожденной. Пусть эта система имеет 2π-периодическое решен $x = \varphi(t)$. Будем искать 2π-периодические решения системы (5.6) $x(t, \mu)$, $q(t, \mu)$, определенные для значений μ из некоторого неограниченного множества $I_\mu \subset (0, +\infty)$ и удовлетворяющие при $\mu \to +\infty$, $\mu \in I_\mu$ соотношениям $x(t, \mu) - \varphi(t) = O(\mu^{-1})$, $q(t, \mu) = O(\mu^{-2})$, $q^\cdot(t, \mu) = O(\mu^{-1})$.

Уравнения для x в системе (5.6) может не быть ($m = 0$). В этом случае рассматривается система

$$A_0(q)q^{\cdot\cdot} + \mu^2 \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q} = f(t, q, q^\cdot) \tag{5.7}$$

и разыскиваются ее 2π-периодические решения $q(t, \mu)$, удовлетворяющие при $\mu \to +\infty$, $\mu \in I_\mu$ условиям $q(t, \mu) = O(\mu^{-2})$, $q^\cdot(t, \mu) = O(\mu^{-1})$. При $n = 1$ существование таких решений следует из теоремы 1. Исследование системы (5.7) аналогично исследованию системы (5.6) (в последнем надо опустить все пункты, относящиеся к вектору x) и поэтому не приводится.

6. Для построения периодических решений системы (5.6) преобразуем эту систему следующим образом. Сделаем замену переменного $x = \varphi(t) + \xi$ и умножим второе уравнение слева на $A_0^{-1}(q)$. В получившихся уравнениях выделим в явном виде некоторые члены, линейные относительно ξ, q и $q^\cdot$. В результате будем иметь

$$\begin{gathered} \xi^\cdot = A(t)\xi + F_1(t, \xi, q, q^\cdot) \\ q^{\cdot\cdot} + \mu^2\Lambda q = B(t)\xi + C(t)q^\cdot + f_1(t, \xi, q, q^\cdot) + \mu^2 h_1(q) \end{gathered} \tag{6.1}$$

Здесь

$$A(t) = \frac{\partial F(t, \varphi(t), 0, 0)}{\partial x}, \qquad B(t) = A_0^{-1}(0)\frac{\partial f(t, \varphi(t), 0, 0)}{\partial x}$$

$$C(t) = A_0^{-1}(0)\frac{\partial f(t, \varphi(t), 0, 0)}{\partial q^\cdot}, \qquad \Lambda = A_0^{-1}(0)\frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^2}$$

и при $\xi, q, q^\cdot \to 0$ справедливы соотношения

$$\|F_1(t, \xi, q, q^\cdot)\| = O(\|q\| + \|q^\cdot\| + \|\xi\|^2), \ \|h_1(q)\| = O(\|q\|^2)$$

$$\|f_1(t, \xi, q, q^\cdot) - f_1(t, 0, 0, 0)\| = O(\|q\| + \|q^\cdot\|^2 + \|\xi\|^2)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Так как матрицы $A_0(0)$ и $\partial^2\Pi(0)/\partial q^2$ симметричны и положительно определены, то соответствующие им квадратичные формы можно одновременно привести к каноническому виду. Более точно, существует невырожденная матрица S, такая, что

$$S^T A_0(0) S = E_n, \qquad S^T \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^2} S = \operatorname{diag}(\omega_1^2 E_{n_1}, \ldots, \omega_r^2 E_{n_r}) \tag{6.2}$$

Здесь E_k — единичная матрица порядка k, $n_j > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, r$), $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_r$. Сделав в (6.1) замену переменного $q = Sq'$ и вернувшись к прежним обозначениям, будем считать, что матрица Λ в этой системе совпадает с правой частью второй формулы (6.2).

Последующие преобразования обычны при исследовании дифференциальных уравнений с большим параметром [1, 3]. Подстановка

$$q = z + \mu^{-2}\Lambda^{-1}B(t)\xi$$

приводит систему (6.1) к виду

$$\begin{gathered} \xi^\cdot = A(t)\xi + F_2(t, \xi, z, z^\cdot, \mu) \\ z^{\cdot\cdot} + \mu^2\Lambda z = C(t)z^\cdot + f_2(t, \xi, z, z^\cdot, \mu) + \mu^2 h_2(t, \xi, z, \mu), \end{gathered} \tag{6.3}$$

где при ξ, z, $z^\cdot$, $\mu^{-1} \to 0$ имеем

$$\| F_2 (t, \xi, z, z^\cdot, \mu) \| = O (\| z \| + \| z^\cdot \| + \| \xi \|^2 + \mu^{-2} \| \xi \|)$$

$$\| f_2 (t, \xi, z, z^\cdot, \mu) - f_2^0 (t, \mu) \| = O \left(\| z \| + \| z^\cdot \|^2 + \| \xi \|^2 + \frac{\| \xi \| + \| z^\cdot \|}{\mu^2} \right)$$

$$\| f_2^0 (t, \mu) \| = O (1), \quad \| h_2 (t, \xi, z, \mu) \| = O (\| z \|^2 + \mu^{-4} \| \xi \|^2)$$

Здесь и ниже для произвольной функции $g (t, \xi, \ldots, \ldots, \mu)$ используется обозначение $g^0 (t, \mu) = g (t, 0, 0, 0, \mu)$. В результате сделанной подстановки из второго уравнения исследуемой системы исчез член $B (t) \xi$.

Следующее преобразование служит для упрощения члена $C (t) z^\cdot$. Введем вместо z новое переменное

$$u = z + \mu^{-2} D (t) z^\cdot \tag{6.4}$$

где $D (t)$ — 2π-периодическая матрица. Явный вид $D (t)$ будет указан ниже. Дифференцируя соотношение (6.4) дважды по t в силу системы (6.3), получим

$$u^\cdot = -D \Lambda z + [E_n + \mu^{-2} (D^\cdot + DC)] z^\cdot + D (h_2 + \mu^{-2} f_2) \tag{6.5}$$

$$u^{\cdot\cdot} = -\mu^2 \Lambda z + (C - D \Lambda) z^\cdot + f_2' (t, \xi, z, z^\cdot, \mu) + \mu^2 h_2 \tag{6.6}$$

Для функции f_2' в (6.6) при ξ, z, $z^\cdot$, $\mu^{-1} \to 0$ справедливы те же оценки, что и для функции f_2 в (6.3). Разрешив соотношения (6.4), (6.5) относительно z и $z^\cdot$ с учетом равенства $h_2 (t, \xi, z, \mu) = h_1 (z) + O (\mu^{-2})$, найдем

$$z = u - \mu^{-2} D \{ u^\cdot + D [\Lambda u - h_1 (u)] \} + O (\mu^{-4})$$

$$z^\cdot = u^\cdot + D [\Lambda u - h_1 (u)] + O (\mu^{-2})$$

Подставив полученные выражения в (6.6) и первое уравнение (6.3), придем к системе

$$\xi^\cdot = A (t) \xi + F_3 (t, \xi, u, u^\cdot, \mu) \tag{6.7}$$

$$u^{\cdot\cdot} + \mu^2 \Lambda u = C' (t) u^\cdot + f_3 (t, \xi, u, u^\cdot, \mu) + \mu^2 h_3 (t, \xi, u, u^\cdot, \mu)$$

Здесь

$$C' (t) = C (t) + \Lambda D (t) - D (t) \Lambda \tag{6.8}$$

Для функций F_3 и h_3 при ξ, u, $u^\cdot$, $\mu^{-1} \to 0$ справедливы оценки

$$\| F_3 (t, \xi, u, u^\cdot, \mu) - F_3^0 (t, \mu) \| = O (\| u \| + \| u^\cdot \| + \| \xi \|^2 + \mu^{-2} \| \xi \|)$$

$$\| h_3 (t, \xi, u, u^\cdot, \mu) - h_3^0 (t, \mu) \| = O \left(\| u \|^2 + \frac{\| u \| + \| u^\cdot \|^2 + \| \xi \|^2}{\mu^4} + \frac{\| \xi \| + \| u^\cdot \|}{\mu^6} \right)$$

$$\| F_3^0 (t, \mu) \| = O (\mu^{-2}), \quad \| h_3^0 (t, \mu) \| = O (\mu^{-8})$$

Оценки f_3 получаются из оценок f_2 заменой $z \to u$, $z^\cdot \to u^\cdot$.

Матрицы C, C' и D представим в блочной форме, причем разбиение на блоки возьмем такое же, как во второй формуле (6.2). Пусть $C = (C_{jk})_{j,k=1}^r$, $C' = (C_{jk}')_{j,k=1}^r$, $D = (D_{jk})_{j,k=1}^r$, где C_{jk}, C_{jk}' и D_{jk} — матрицы размером $n_j \times n_k$. Тогда соотношение (6.8) можно представить в виде

$$C_{jk}' = C_{jk} + (\omega_j^2 - \omega_k^2) D_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, r)$$

Матрицу $D (t)$ определим следующим образом. Положим $D_{jk} = (\omega_k^2 - \omega_j^2)^{-1} C_{jk}$ при $j \neq k$ и $D_{jj} = 0$. В таком случае $D (t + 2\pi) = D (t)$ и

$$C' = \mathrm{diag} (C_{11}, \ldots, C_{rr})$$

Последнее преобразование, которое необходимо сделать, состоит в том, чтобы заменить в (6.7) 2π-периодическую матрицу $C'(t)$ постоянной матрицей. Рассмотрим матричные начальные задачи

$$X_j^{\cdot} = \frac{1}{2} C_{jj}(t) X_j, \qquad X_j(0) = E_{n_j} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

Согласно теории Флоке, решения этих задач можно представить в виде

$$X_j(t) = \Phi_j(t) \exp(H_j t), \qquad H_j = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Ln} X_j(2\pi)$$

$$\Phi_j(t + 2\pi) = \Phi_j(t) \quad (j = 1, \ldots, r)$$

Если $X_j(2\pi)$ не имеет отрицательных собственных чисел, то матрицу H_j можно выбрать действительной. В противном случае этого, вообще говоря, сделать нельзя. Всегда можно выбрать действительной матрицу $H_j' = (4\pi)^{-1} \operatorname{Ln} X_j(4\pi)$, но тогда матрица $\Phi_j'(t) = X_j(t) \exp(-H_j' t)$ будет удовлетворять соотношению $\Phi_j'(t + 2\pi) = \Phi_j'(t) U_j$, где $U_j = X_j(2\pi) \exp(-2\pi H_j')$, $U_j^2 = E_{n_j}$. Использование таких $\Phi_j'(t)$ в последующих преобразованиях несколько усложняет исследование 2π-периодических решений системы (5.6). В итоге приходится решать либо периодическую краевую задачу на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$ (вследствие того, что $\Phi_j'(t + 4\pi) = \Phi_j'(t)$; такой подход наиболее прост, но он может привести к некоторому сужению множества I_μ, упомянутого в п. 5), либо решать краевую задачу на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, но не периодическую, а с краевыми условиями, содержащими матрицы U_j. Ниже для краткости рассматривается случай, когда существуют действительные $\operatorname{Ln} X_j(2\pi)$ $(j = 1, \ldots, r)$. Это имеет место, если, например, система (5.6) выведена из уравнений (5.1), в которых обобщенные силы (5.2) потенциальны.

В самом деле, не ограничивая общности, будем считать, что в (5.6) матрицы $A_0(0)$ и $\partial^2\Pi(0)/\partial q^2$ совпадают с правыми частями формул (6.2). Тогда в случае потенциальности сил (5.2) в (6.1) должно быть $C(t) = -C^T(t)$. Отсюда $X_j^T(2\pi) = X_j^{-1}(2\pi)$ $(j = 1, \ldots, r)$, т. е. матрицы $X_j(2\pi)$ ортогональны, причем $\det X_j(2\pi) = 1$. Собственные числа матриц $X_j(2\pi)$ расположены на единичной окружности и имеют простые элементарные делители. Кратность собственного числа -1 (если оно существует) четна. В такой ситуации матрицы $\operatorname{Ln} X_j(2\pi)$ всегда можно выбрать действительными. Если силы (5.2) потенциальны и в (6.2) $r = n$, то $C'(t) \equiv 0$. В этом случае $H_j = 0$, $\Phi_j(t) \equiv 1$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Положим

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}(\Phi_1(t), \ldots, \Phi_r(t)), \quad H = \operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_r)$$

Замена переменного $u = \Phi(t) y$ переводит (6.7) в систему

$$\begin{aligned} &\xi^{\cdot} = A(t)\xi + F_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) \\ &y^{\cdot\cdot} - 2Hy^{\cdot} + (\mu^2\Lambda + H^2) y = f_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) + \mu^2 h_4(t, \xi, \\ &y, y^{\cdot}, \mu) \end{aligned} \tag{6.9}$$

При $\xi, y, y^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$ для функций F_4, f_4 и h_4 справедливы оценки, аналогичные оценкам функций F_3, f_3 и h_3 при $\xi, u, u^{\cdot}, \mu^{-1} \to 0$. В силу этих оценок существуют такие положительные числа δ, K и μ_1, что при всех t, μ, ξ, η $(\eta \in R^m)$, y, $y^{\cdot}$, u, $u^{\cdot}$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $\mu \geqslant \mu_1$ и $\max(\|\xi\|, \|\eta\|, \|y\|, \|y^{\cdot}\|, \|u\|, \|u^{\cdot}\|) \leqslant \delta$, имеем

$$\begin{aligned} &\|F_4^0(t, \mu)\| \leqslant K\mu^{-2}, \quad \|f_4^0(t, \mu)\| \leqslant K, \|h_4^0(t, \mu)\| \leqslant K\mu^{-8} \\ &\|F_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) - F_4(t, \eta, u, u^{\cdot}, \mu)\| \leqslant K(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta\alpha_0) \\ &\|f_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) - f_4(t, \eta, u, u^{\cdot}, \mu)\| \leqslant K[\alpha_1 + \beta(\alpha_0 + \alpha_2)] \\ &\|h_4(t, \xi, y, y^{\cdot}, \mu) - h_4(t, \eta, u, u^{\cdot}, \mu)\| \leqslant \\ &\leqslant K\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{\mu^2}\right)\left(\|y\| + \|u\| + \frac{\|y^{\cdot}\| + \|u^{\cdot}\| + \|\xi\| + \|\eta\|}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4}\right) \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\alpha_0 = \| \xi - \eta \|, \quad \alpha_1 = \| y - u \|, \quad \alpha_2 = \| y^{\cdot} - u^{\cdot} \|$$

$$\beta = \| \xi \| + \| \eta \| + \| y \| + \| u \| + \| y^{\cdot} \| + \| u^{\cdot} \| + \mu^{-2}$$

Проверив сделанные выше преобразования, можно убедиться, что независимое переменное t входит в систему (6.9) 2π-периодически. Поставленная в п. 5 задача об отыскании 2π-периодических решений системы (5.6) эквивалентна задаче об отыскании 2π-периодических решений системы (6.9) $\xi(t, \mu)$, $y(t, \mu)$, определенных для значений μ из некоторого неограниченного множества $I_\mu \subset (0, +\infty)$ и удовлетворяющих при $\mu \to +\infty$ $\mu \in I_\mu$ соотношениям $\xi(t, \mu) = O(\mu^{-1})$, $y(t, \mu) = O(\mu^{-2})$, $y^{\cdot}(t, \mu) = O(\mu^{-1})$.

Прежде чем сформулировать теорему о существовании таких решений введем некоторые определения. Пусть P — квадратная матрица порядка k с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Введем функцию

$$\Delta(k, P, \mu) = |\det[\operatorname{sh}\pi(P + i\mu E_k)]| = \\ = \left\{\prod_{j=1}^{k} [\operatorname{sh}^2(\pi \operatorname{Re}\lambda_j) + \sin^2\pi(\mu + \operatorname{Im}\lambda_j)]\right\}^{1/2}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество

$$I(\varepsilon) = \{\mu : \mu \geqslant 0, \ \Delta(n_j, H_j, \mu\omega_j) \geqslant \varepsilon \ (j = 1, \ldots, r)\}$$

Каждая функция $\Delta(n_j, H_j, \mu\omega_j)$—периодическая по μ. Поэтому существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ либо $I(\varepsilon) = [0, +\infty)$, либо

$$I(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k(\varepsilon), \beta_k(\varepsilon)], \qquad 0 \leqslant \alpha_1(\varepsilon) \leqslant \beta_1(\varepsilon) < \alpha_2(\varepsilon) \leqslant \beta_2(\varepsilon) < \ldots$$

$$0 < l_1 < \varlimsup_{k\to\infty} [\beta_k(\varepsilon) - \alpha_k(\varepsilon)] < l_2 < +\infty$$

и числа l_1, l_2 можно выбрать не зависящими от ε. Первая или вторая из этих возможностей реализуется в зависимости от того, все или не все собственные числа матриц H_j $(j = 1, \ldots, r)$ имеют ненулевые действительные части.

Теорема 2. Предположим, что система

$$\xi^{\cdot} = A(t)\,\xi \tag{6.11}$$

не имеет отличных от нуля 2π-периодических решений. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют такие положительные числа C_0, C_1, C_2 и M, что при $\mu \geqslant M$, $\mu \in I(\varepsilon)$ система (6.9) имеет единственное 2π-периодическое решение $\xi_*(t, \mu)$, $y_*(t, \mu)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\| \xi_*(t, \mu) \| \leqslant \frac{C_0}{\mu}, \qquad \| y_*(t, \mu) \| \leqslant \frac{C_1}{\mu^2}$$

$$\| y_*^{\cdot}(t, \mu) \| \leqslant \frac{C_2}{\mu} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

7. В этом пункте приводятся некоторые соотношения, используемые при доказательстве теоремы 2. Рассмотрим отвечающую первому уравнению (6.9) линейную неоднородную систему

$$\xi^{\cdot} = A(t)\,\xi + F(t) \tag{7.1}$$

где $F(t)$ — 2π-периодическая функция. По условию теоремы 2 (отсутствие у (6.11) нетривиальных 2π-периодических решений) эта система имеет единственное 2π-периодическое решение

$$(7.2)\qquad \xi(t) = \int_0^{2\pi} G_0(t, \tau) F(\tau)\, d\tau$$

Здесь $G_0(t, \tau)$ — функция Грина периодической краевой задачи $\xi(0) = \xi(2\pi)$ для (7.1).

Нормой векторной функции $f(t)$, непрерывной на отрезке $[0, 2\pi]$, будем называть число $\nu(f) = \max \| f(t) \|$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Для нормы решения (7.2) справедлива оценка

$$(7.3)\qquad \nu(\xi) \leqslant N_0 \nu(F)$$

где N_0 — некоторое положительное число.

Рассмотрим теперь отвечающее второму уравнению системы (6.9) линейное уравнение

$$(7.4)\qquad y^{\cdot\cdot} - 2Hy^{\cdot} + (\mu^2\Lambda + H^2)\, y = f(t)$$

где $f(t)$ — 2π-периодическая функция. Если $\Delta(n_j, H_j, \mu\omega_j) > 0$ $(j = 1, \ldots, r)$, то это уравнение имеет единственное 2π-периодическое решение

$$(7.5)\qquad y(t) = \int_0^{2\pi} G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau = (\Lambda_1\Lambda_2)^{-1} f(t) + \int_0^{2\pi} G'(t, \tau) f^{\cdot}(\tau)\, d\tau$$

$$G(t, \tau) = -\frac{1}{2}[(\Lambda_1 - \Lambda_2)\operatorname{sh}\pi\Lambda_1]^{-1}\exp[\Lambda_1(t - \tau \pm \pi)] +$$
$$+ \operatorname{idem}(1 \leftrightarrow 2)$$
$$G'(t, \tau) = -\frac{1}{2}[(\Lambda_1 - \Lambda_2)\Lambda_1\operatorname{sh}\pi\Lambda_1]^{-1}\exp[\Lambda_1(t - \tau \pm \pi)] +$$
$$+ \operatorname{idem}(1 \leftrightarrow 2)$$
$$\Lambda_{1,2} = H \pm i\mu\Omega, \qquad \Omega = \operatorname{diag}(\omega_1 E_{n_1}, \ldots, \omega_r E_{n_r})$$

Здесь $G(t, \tau)$ — функция Грина краевой задачи $y(0) = y(2\pi)$, $y^{\cdot}(0) = y^{\cdot}(2\pi)$ для (7.4); в выражениях для $G(t, \tau)$ и $G'(t, \tau)$ через idem $(1 \leftrightarrow 2)$ обозначены слагаемые, получающиеся из слагаемых, выписанных явно, заменой $\Lambda_1 \leftrightarrow \Lambda_2$; верхний знак в этих выражениях берется при $t \leqslant \tau$, нижний — при $t > \tau$. Для вывода формул (7.5) следует заметить, что матрицы H, Ω, Λ_1 и Λ_2 коммутируют между собой и общее решение уравнения (7.4) при $f(t) = 0$ имеет вид $y = \exp(\Lambda_1 t)\, a_1 + \exp(\Lambda_2 t)\, a_2$, где a_1, a_2 — произвольные постоянные векторы.

Производную решения (7.5) можно найти по формуле

$$y^{\cdot}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t} f(\tau)\, d\tau = \int_0^{2\pi} G(t, \tau) f^{\cdot}(\tau)\, d\tau$$

Нормой произвольной матрицы $P = (p_{jk})_{j,k=1}^{l}$ будем называть число

$$\| P \| = \Big(\sum_{j,k=1}^{l} |p_{jk}|^2\Big)^{1/2}$$

Используя это понятие, для норм решения (7.5) и его производной можно получить оценки

$$(7.6)\qquad \nu(y) \leqslant K_1\nu(f), \quad \nu(y^{\cdot}) \leqslant K_2\nu(f)$$
$$\nu(y) \leqslant K_3\nu(f^{\cdot}) + K_4\nu(f), \quad \nu(y^{\cdot}) \leqslant K_1\nu(f^{\cdot})$$

Здесь коэффициенты K_1, K_2 и K_3 равны умноженным на 2π максимальным значениям функций $\| G(t, \tau) \|$, $\| \partial G(t, \tau)/\partial t \|$ и $\| G'(t, \tau) \|$ на множестве $\{t, \tau : t, \tau \in [0, 2\pi],\ t \neq \tau\}$, $K_4 = \| \Lambda_1^{-1}\Delta_2^{-1} \|$.

Оценим эти коэффициенты. Поскольку матрицы H и Ω — блочно-диагональные, матрица $G(t, \tau)$ — тоже блочно диагональная с такими же размерами блоков и имеет вид

$$G(t, \tau) = \operatorname{diag}(G_1(t, \tau), \ldots, G_r(t, \tau))$$

где $G_j(t, \tau)$ задается второй формулой (7.5) при $\Lambda_{1,2} = H_j \pm i\mu\omega_j E_{n_j}$ $(j = 1, \ldots, r)$. Можно доказать, что

$$2\pi \max \| G_j(t, \tau) \| \leqslant \frac{d(n_j, H_j)}{\mu\omega_j \Delta(n_j, H_j, \mu\omega_j)}; \qquad t, \tau \in [0, 2\pi]$$

Здесь $d(k, P)$ — некоторая скалярная положительная функция от квадратной матрицы P порядка k. Так как

$$\| G(t, \tau) \|^2 = \sum_{j=1}^{r} \| G_j(t, \tau) \|^2$$

то при $\mu \in I(\varepsilon)$, $\mu > 0$ имеем

$$K_1^2 \leqslant \frac{1}{\mu^2\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{r} d_j, \qquad d_j = \omega_j^{-2} d^2(n_j, H_j)$$

Аналогично при $\mu \in I(\varepsilon)$, $\mu > 0$ устанавливаются оценки

$$K_2^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{r} d_j \| P_j \|^2, \qquad K_3^2 \leqslant \frac{1}{\mu^4\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{r} d_j \| P_j^{-1} \|^2$$

$$K_4 \leqslant \frac{1}{\mu^2} \sum_{j=1}^{r} \| P_j^{-1} \|^2$$

где $P_j = \mu^{-1} H_j + i\omega_j E_{n_j}$. Поскольку матрица H_j действительна, $\| P_j \|^2 = \omega_j^2 n_j + \mu^{-2} \| H_j \|^2$. Разлагая матрицу P_j^{-1} в ряд по степеням μ^{-1}, можно доказать, что $\| P_j^{-1} \| \leqslant (\sqrt{n_j} + 1)/\omega_j$ при $\mu \geqslant 2 \| H_j \|/\omega_j$. Из указанных оценок следует существование таких положительных чисел N и μ_2, что при $\mu \geqslant \mu_2$, $\mu \in I(\varepsilon)$ выполняются неравенства $K_1 \leqslant N\mu^{-1}$, $K_2 \leqslant N$, $K_3 \leqslant N\mu^{-2}$, $K_4 \leqslant N\mu^{-2}$. Отсюда и (7.6) для норм решения (7.5) и его производной получаем оценки

$$\nu(y) \leqslant N\mu^{-1}\nu(f), \quad \nu(y^{\cdot}) \leqslant N\nu(f) \tag{7.7}$$

$$\nu(y) \leqslant N\mu^{-2}(\nu(f) + \nu(f^{\cdot})), \quad \nu(y^{\cdot}) \leqslant N\mu^{-1}\nu(f^{\cdot}) \tag{7.8}$$

Ниже без дополнительных оговорок предполагается, что $\mu \in I(\varepsilon)$ и $\mu \geqslant \mu_1 \geqslant \max(1, \mu_2)$.

8. Отыскание 2π-периодических решений системы (6.9) сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи на отрезке $[0, 2\pi]$, которая в свою очередь эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\xi(t) = \int_0^{2\pi} G_0(t, \tau) F_4(\tau, \xi(\tau), y_1(\tau), y_2(\tau), \mu)\, d\tau \equiv L_0(\xi, y_1, y_2) \tag{8.1}$$

$$y_j(t) = \int_0^{2\pi} g_j(t, \tau) [f_4(\tau, \xi(\tau), y_1(\tau), y_2(\tau), \mu) +$$

$$+ \mu^2 h_4(\tau, \xi(\tau), y_1(\tau), y_2(\tau), \mu)]\, d\tau \equiv L_j(\xi, y_1, y_2)$$

$$j = 1,2; \quad g_1(t, \tau) = G(t, \tau), \quad g_2(t, \tau) = \partial G(t, \tau)/\partial t$$

Здесь $y_1 = y$, $y_2 = y^{\cdot}$. Систему (8.1) будем решать методом последовательных приближений. Построим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ последовательности функций $\{\xi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{y_j^{(k)}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2)$, положив

$$\xi^{(0)}(t) \equiv 0, \quad y_j^{(0)}(t) \equiv 0 \tag{8.2}$$
$$\xi^{(k+1)} = L_0(\xi^{(k)}, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}), \qquad y_j^{(k+1)} = L_j(\xi^{(k)}, y_1^{(k)}, y_2^{(k)})$$
$$(j = 1, 2;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Докажем, что при достаточно большом μ эти последовательности сходятся к решению системы (8.1).

Сначала доказывается существование таких положительных чисел C_0, C_1, C_2 и μ_3 $(\mu_3 \geqslant \mu_1)$, что при $\mu \geqslant \mu_3$ выполнены неравенства

$$\nu(\xi^{(k)}) \leqslant C_0\mu^{-1} \leqslant \delta, \quad \nu(y_1^{(k)}) \leqslant C_1\mu^{-2} \leqslant \delta \tag{8.3}$$
$$\nu(y_2^{(k)}) \leqslant C_2\mu^{-1} \leqslant \delta \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству неравенств (4.3) и проводится с использованием оценок (7.7), (7.8) и оценок (6.10) в случае $\eta = 0$, $u = u^* = 0$.

Введем обозначения

$$a_k = \nu(\xi^{(k)} - \xi^{(k-1)}), \qquad b_k = \nu(y_1^{(k)} - y_1^{(k-1)}), \qquad c_k = \nu(y_2^{(k)} - y_2^{(k-1)})$$

В силу неравенств (6.10), (7.7) и (8.3) при $\mu \geqslant \mu_3$ имеем

$$a_{k+1} \leqslant \varkappa\left(\frac{a_k}{\mu} + b_k + c_k\right), \qquad b_{k+1} \leqslant \frac{\varkappa}{\mu}\left(\frac{a_k + c_k}{\mu} + b_k\right) \tag{8.4}$$
$$c_{k+1} \leqslant \varkappa\left(\frac{a_k + c_k}{\mu} + b_k\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$
$$\varkappa = K[1 + 2(C_0 + C_1 + C_2)]\max(N_0,\ 2N)$$

Рассмотрим числовую последовательность $\rho_k = a_k\mu^{-3/2} + b_k + c_k\mu^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Вследствие (8.4) $\rho_{k+1} \leqslant 3\varkappa\mu^{-1/2}\rho_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Положим $M = \max(\mu_3, 36\varkappa^2)$. Тогда при $\mu \geqslant M$ будет справедлива оценка $\rho_{k+1} \leqslant \rho_k/2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Используя эту оценку, можно доказать, что последовательности $\{\xi^{(k)}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{y_j^{(k)}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ $(j = 1, 2)$ сходятся равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$ к некоторым непрерывным функциям $\xi^*(t)$, $y_j^*(t)$. Справедливы соотношения

$$\xi^*(0) = \xi^*(2\pi), \quad y_j^*(0) = y_j^*(2\pi) \quad (j = 1, 2)$$
$$\nu(\xi^*) \leqslant C_0\mu^{-1}, \quad \nu(y_1^*) \leqslant C_1\mu^{-2}, \quad \nu(y_2^*) \leqslant C_2\mu^{-1}$$

Переходя в (8.2) к пределу при $k \to \infty$, находим, что $\xi^*(t)$, $y_1^*(t)$ и $y_2^*(t)$ — решение системы (8.1). Функция $\xi^*(t)$ непрерывно дифференцируема, функция $y_1^*(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $dy_1^*(t)/dt = y_2^*(t)$. Точно так же, как при доказательстве теоремы 1, можно установить, что найденное решение единственно. Продолжив функции ξ^*, y_1^* 2π-периодически на всю действительную ось, получим искомое периодическое решение системы (6.9).

Автор благодарит В. А. Сарычева за обсуждения при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Flatto L., Levinson N.* Periodic solutions of singularly perturbed systems.— J. Rat. Mech. and Analysis, 1955, v. 4, No. 6, p. 943—950.— Рус. перев.: Математика, 1958, т. 2, № 2, с. 61—68.
2. *Хентов А. А.* Влияние магнитного и гравитационного полей Земли на колебания спутника вокруг своего центра масс.— Космич. исследования, 1967, т. 5, вып. 4, с. 554—572.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.XII.1980