

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА
ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ**

Иванов Н. М., Мартынов А. И., Соколов Н. Л.

Предлагается приближенный метод расчета траекторий движения летательного аппарата в атмосфере с учетом уноса массы аппарата и вращения планеты. Показана эффективность метода при расчете входа аппарата в высокоплотную атмосферу с большими скоростями. Результаты иллюстрируются на ряде численных примеров.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую движение летательного аппарата в атмосфере [1,2]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{C_x S \rho V^2}{2m} + (\omega^2 r - g) \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{C_y S \rho V}{2m} + \left(\frac{\omega^2 r}{V} + \frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta + 2\omega \\ \frac{dh}{dt} &= V \sin \theta, \quad \frac{dL}{dt} = V \cos \theta \frac{R}{r}, \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{C_1 S_1 q_\Sigma}{\eta} \end{aligned}$$

Здесь V — скорость полета летательного аппарата, θ — угол наклона вектора скорости к местному горизонту, h — высота полета, r — расстояние от центра планеты до аппарата, m — масса аппарата, ρ — плотность атмосферы, C_x, C_y — аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, S — площадь миделева сечения аппарата, ω — угловая скорость вращения планеты, g — ускорение силы тяжести, t — время полета, q_Σ — суммарный тепловой поток в критической точке аппарата, η — эффективная энтальпия, C_1 — усредненный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения уносимой массы на поверхности аппарата, S_1 — площадь уносимой поверхности летательного аппарата, L — дальность полета.

Система (1.1) описывает плоское движение летательного аппарата при экваториальном входе с учетом вращения планеты и уноса массы теплозащитного покрытия с поверхности аппарата.

Решение системы (1.1) с необходимой степенью точности можно получить при помощи численных методов интегрирования. Однако это связано с большими затратами машинного времени, особенно при проведении параметрических расчетов или при решении краевых задач, когда требуется проведение большого числа итераций [1—3]. Поэтому во многих случаях необходимо иметь решение системы в аналитическом виде. Для более простого вида системы дифференциальных уравнений (без учета вращения планеты и уноса массы теплозащитного покрытия с поверхности аппарата) приближенные аналитические методы применялись в работах [4—15]. Следует отметить, что использование этих методов для анализа движения летательного аппарата в атмосферах с высокой плотностью (атмосферы Венеры, Юпитера) или при больших скоростях входа приводит к большим относительным погрешностям (для задач спуска аппарата в атмосфере Юпитера расчетные данные могут отличаться более чем на 20% от данных, полученных численными методами).

2. Анализ траекторий движения летательных аппаратов в атмосферах Земли и других планет позволяет ввести следующие допущения:

$$\begin{aligned} \left| \frac{C_x S \rho V^2}{2m} \right| &\gg |g \sin \theta| + |\omega^2 r \sin \theta|, \quad R \gg h \\ \theta &\ll 1, \quad \rho(h) = p_0 \exp(-\beta h), \quad q_\Sigma = 1/2 \alpha \rho V^3 \end{aligned}$$

Здесь α — коэффициент, характеризующий поглощающую способность материала теплозащитного покрытия.

Исключая время t и учитывая указанные допущения, запишем систему (1.1) в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\theta}{dV} &= -\frac{K}{V} - \frac{2mM}{C_x S V}, \quad \frac{d\rho}{dV} = \frac{2m\theta\rho}{C_x S V} \\ \frac{dm}{dV} &= \frac{C_1 S_1 \alpha V m}{\eta C_x S}, \quad \frac{dL}{dV} = -\frac{2m}{C_x S \rho V} \\ M &= \left(1 - \frac{gr}{V^2} + \frac{\omega^2 r^2}{V^2} + \frac{2\omega r}{V} \right) \frac{1}{\rho r}, \quad K = \frac{C_y}{C_x} \end{aligned}$$

Время движения определяется соотношением

$$t = - \frac{2}{C_x S} \int_{V_0}^V \frac{m(V)}{\rho(V) V^2} dV$$

Будем далее считать функцию M кусочно-постоянной на конечных интервалах изменения аргумента V .

Интегрируя третье уравнение системы (2.1), определим зависимость массы летательного аппарата от скорости движения V в форме

$$(2.2) \quad m(V) = A \exp(BV^2)$$

$$A = m_0 \exp\left(-\frac{\kappa V_0^2}{2C_x S}\right), \quad B = \frac{\kappa}{2C_x S}, \quad \kappa = \frac{C_1 S_1 \alpha}{\eta}$$

Зависимость от скорости угла наклона вектора скорости к местному горизонту θ следует из первого уравнения системы (2.1):

$$(2.3) \quad \theta(V) = \theta_0 - K \ln \frac{V}{V_0} - \frac{2MA}{C_x S} I_1, \quad I_1 = \int_{V_0}^V \frac{\exp(BV^2)}{V} dV$$

Из второго уравнения (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) найдем соотношение между скоростью движения аппарата V и плотностью атмосферы ρ , соответствующей высоте полета летательного аппарата, в виде

$$(2.4) \quad \rho(V) = \rho_0 + \frac{2\beta A}{C_x S} [(\theta_0 + K \ln V_0) I_1 - K I_2 - 2MA I_3]$$

$$I_2 = \int_{V_0}^V \frac{\exp(BV^2) \ln V}{V} dV, \quad I_3 = \int_{V_0}^V \frac{\exp(BV^2) I_1}{V} dV.$$

Отметим, что соотношение (2.4) фактически определяет изменение скорости полета с высотой.

Зависимости (2.2), (2.3), (2.4) дают возможность определить параметры траектории движения летательного аппарата в атмосфере при известных начальных условиях, характеристиках аппарата и параметрах атмосферы. Для нахождения траекторий движения аппарата баллистического типа в формулах (2.2), (2.3), (2.4) следует положить $K = 0$.

3. Расчет траекторий движения летательных аппаратов производился по соотношениям (2.2), (2.3), (2.4) при помощи разложения экспоненциальных членов в подынтегральных выражениях в ряд и отбрасывания старших членов ряда. Проанализируем влияние числа l оставленных членов ряда на точность полученных результатов.

Проведенные исследования показали, что при $l = 2$ для многочисленных расчетов траекторий движения летательных аппаратов в атмосферах различных планет погрешности вычислений не превышают 10% по сравнению с аналогичными результатами, полученными с помощью численных методов (см., например, [3]). В частности, расчет траекторий движения аппарата в атмосфере Земли приводит к относительным погрешностям, не превышающим 7%, а для Юпитера — 10%. Время численного счета по предлагаемым приближенным аналитическим формулам сокращается при этом в 15—20 раз по сравнению со временем, требующимся для численного решения исходной задачи. При $l = 3$ погрешности не превосходят 5%, при $l = 5$ — 4%, а при $l = 20$ — 2,5%.

Был проведен сравнительный анализ точности расчета траекторных параметров с помощью приближенного метода (при $l = 2$) и при использовании других известных аналитических решений [4—14]. Установлено, что для движения в атмосфере любой планеты Солнечной системы использование предлагаемого аналитического метода дает наиболее точные результаты (даже при $l = 2$). Погрешности в определении конечных значений траекторного угла θ_K и высоты h_K максимальных величин перегрузки (n_{\max}), температуры (T_{\max}), суммарного теплового потока ($q_{\Sigma \max}$), вычисленных с использованием методов, предложенных в [4—14], достаточно велики и составляют 15—30% (Юпитер). При нахождении этих же параметров с помощью предлагаемого метода погрешности не превышают 10%.

Таким образом, на этапе предварительного проектирования для расчета траекторий движения летательного аппарата в атмосфере планет с помощью предлагаемого метода, можно ограничиться значением $l = 2$. В этом случае расчетные выражения (2.2)

(2.3), (2.4) для полета аппарата с постоянной величиной аэродинамического качества имеют вид

$$(3.1) \quad m(V) = A \exp(BV^2), \quad \theta(V) = \theta_0 - K \ln \frac{V}{V_0} - \frac{2MA}{C_x S} G_1(V)$$

$$\rho(V) = \rho_0 + \frac{2\beta A}{C_x S} \{G_1(V) [\theta_0 + K \ln V_0 - M A G_1(V)] - K G_2(V)\}$$

$$G_1(V) = \ln \frac{V}{V_0} + \frac{B}{8} (V^2 - V_0^2) (4 + BV^2 + BV_0^2)$$

$$G_2(V) = \frac{1}{2} \left(\ln^2 V - \ln^2 V_0 + BV^2 \ln V - BV_0^2 \ln V_0 - \frac{BV^2}{2} + \frac{BV_0^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{B^2 V^4 \ln V}{4} - \frac{B^2 V_0^4 \ln V_0}{4} - \frac{B^2 V^4}{16} + \frac{B^2 V_0^4}{16} \right)$$

Для баллистических траекторий второе и третье выражения принимают вид

$$\theta(V) = \theta_0 - \frac{2MA}{C_x S} G_1(V)$$

$$\rho(V) = \rho_0 + \frac{2\beta A}{C_x S} G_1(V) [\theta_0 - M A G_1(V)]$$

При нахождении параметров траекторий движения летательного аппарата в атмосферах планет, где унос массы теплозащитного покрытия незначителен (например, для некоторых случаев движения в атмосфере Марса), расчетные формулы (3.1) преобразуются к более простому виду:

$$(3.2) \quad \theta(V) = \theta_0 - \left(K + \frac{2mM}{C_x S} \right) \ln \frac{V}{V_0}$$

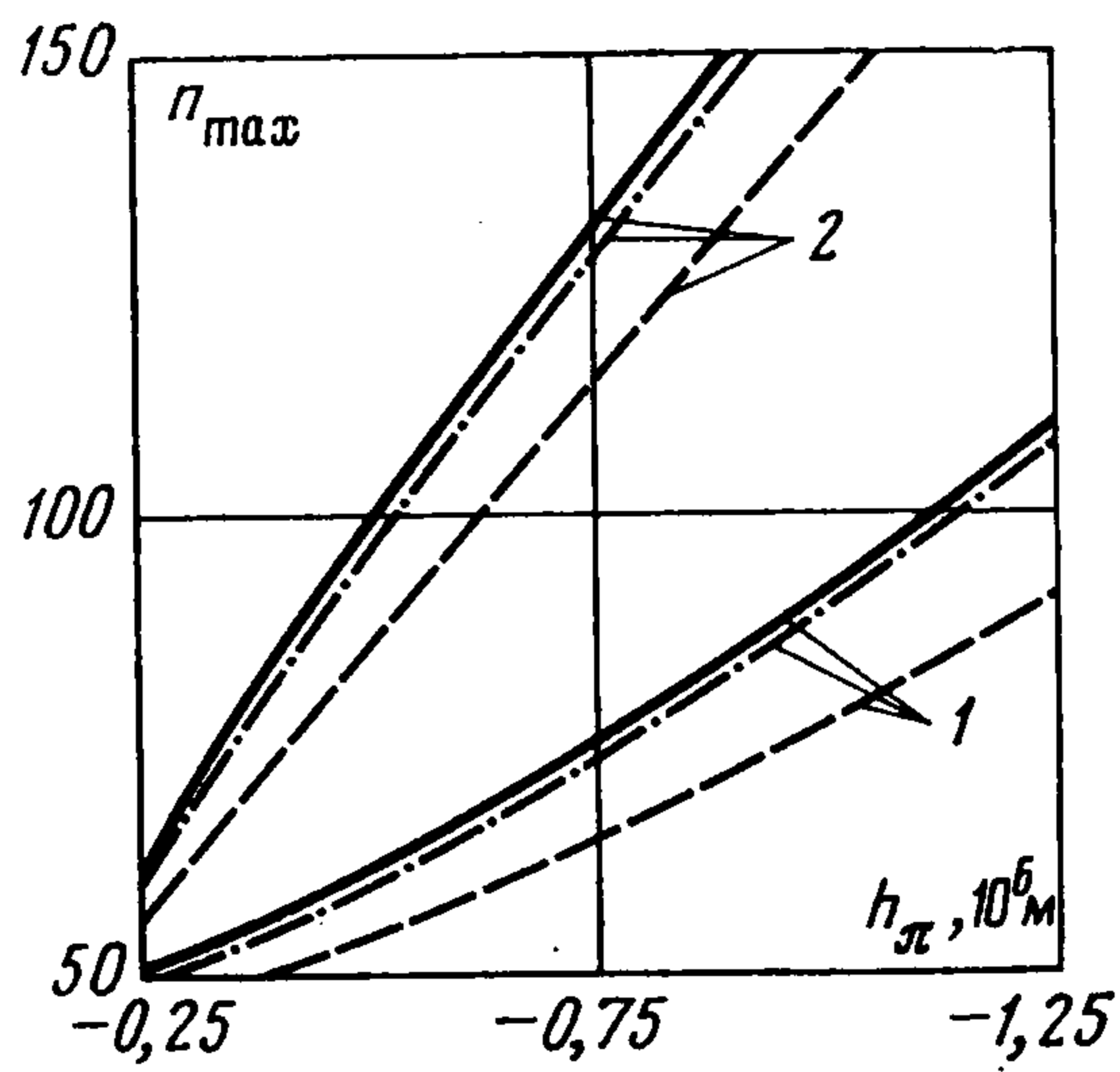
$$\rho(V) = \rho_0 + \frac{2m\beta}{C_x S} \ln \frac{V}{V_0} \left[\theta_0 - 2 \left(K + \frac{2mM}{C_x S} \right) \ln \frac{V}{V_0} \right].$$

Проведем сравнительный анализ точности вычисления параметров движения в соответствии с выражениями (3.2) и при помощи известных аналитических методов [4—14]. Погрешности в расчетах параметров движения при использовании предложенного метода составляет не более 10%, что меньше соответствующих погрешностей, получаемых при применении методов [4—6, 11—14], и несколько больше вычисленных с помощью работ [7—10].

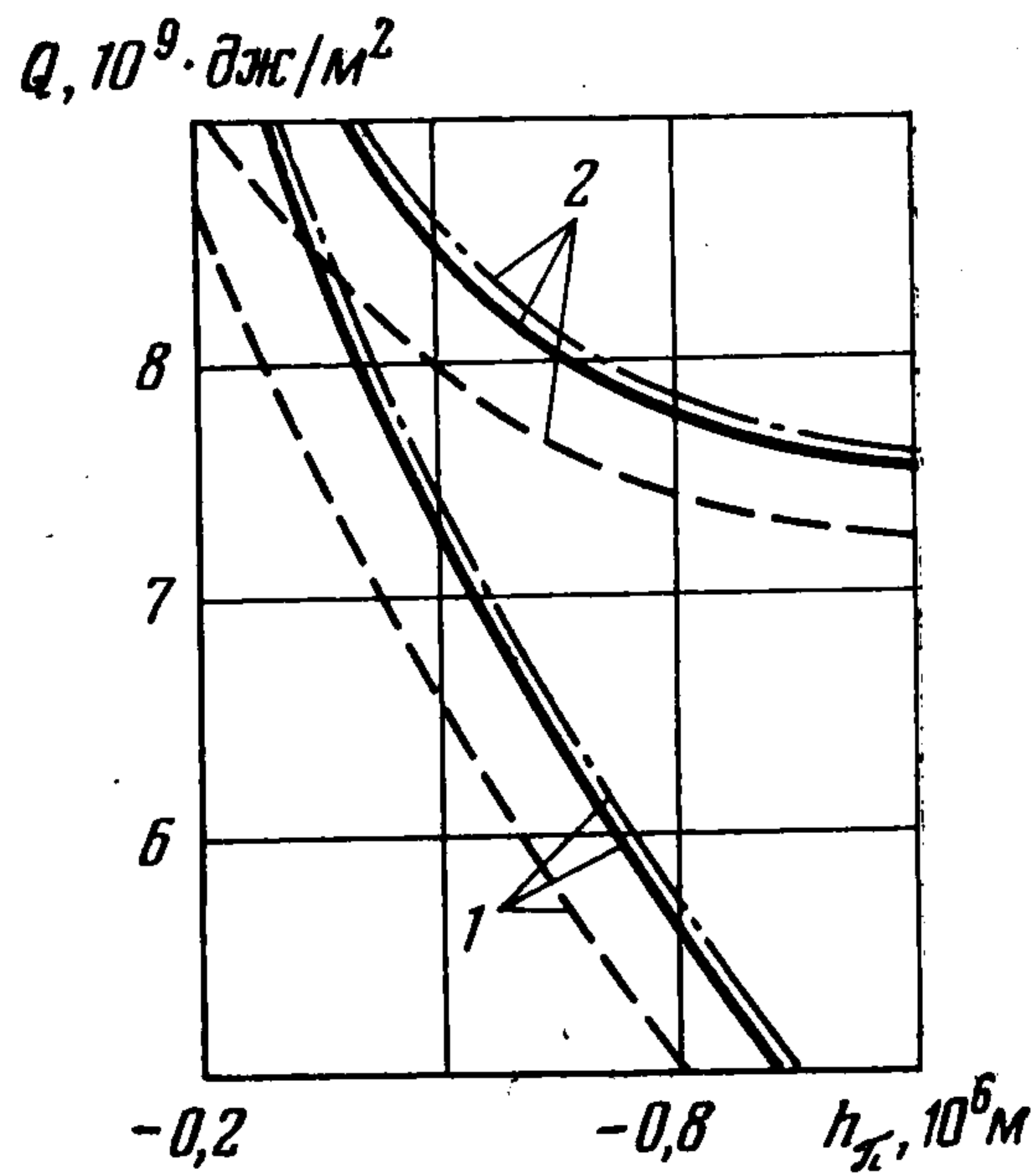
Так, например, погрешности расчетов конечных значений параметров траекторий спуска летательного аппарата в атмосфере Марса θ_K и V_K не превышают 7% при использовании предложенного приближенного аналитического метода, 4% — для методов [7—10] и 16% для [4—6, 11—14].

4. Применение приближенного аналитического метода расчета траекторий движения летательного аппарата в атмосфере наиболее эффективно при проведении массовых параметрических исследований и при решении многоитерационных краевых задач, возникающих при оптимизации заданного функционала. Как отмечено выше, предложенный метод может быть использован для случаев, когда аппарат движется с постоянным или нулевым значением аэродинамического качества. Однако, это не исключает возможности решения с его помощью вариационных задач. Как показано, например, в работах [1, 2], решение задач оптимального управления летательным аппаратом скользящего типа сводится к поиску моментов переключений управляющего параметра — аэродинамического качества с одного экстремального значения на другое. Это, в принципе, позволяет последовательно проводить расчеты для тех участков движения, где полет осуществлялся с постоянным значением аэродинамического качества, а затем сопрягать такие участки. При наличии ограничений на траекторные параметры или при двухканальном управлении по углам крена, и атаки предложенный аналитический метод можно использовать при поиске первого приближения.

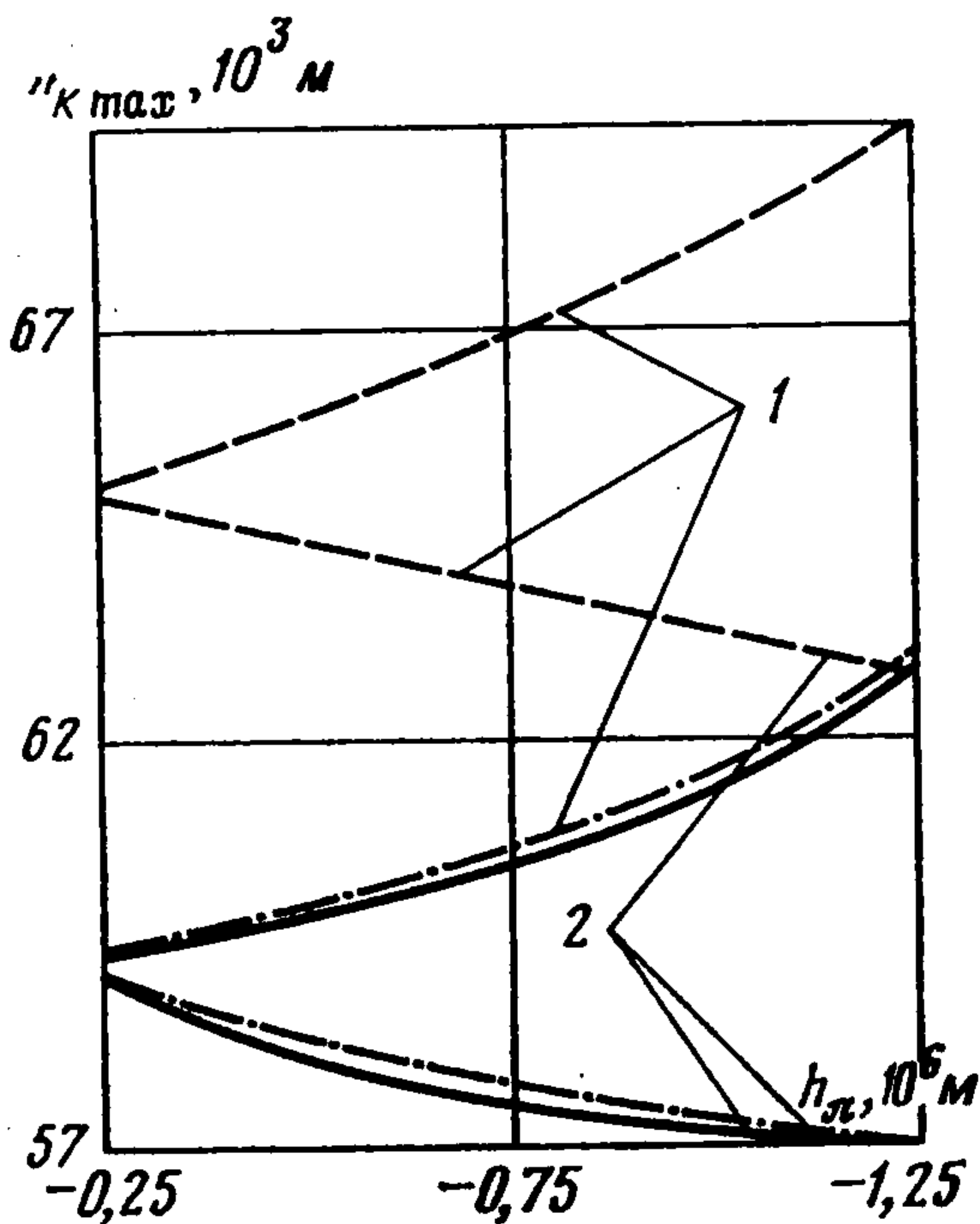
Ниже приведены результаты решения нескольких известных задач оптимального управления движением летательного аппарата применительно к атмосфере Юпитера: минимизации максимальной величины скоростной перегрузки n_{\max} , интегрального теплового потока в критической точке Q_k , максимизации конечной высоты спуска аппарата h_K при ограничении на максимально допустимую величину перегрузки ($n \leq n^*$), максимизации скорости вылета летательного аппарата из атмосферы при выведении на заданную орбиту искусственного спутника Юпитера. Принимались



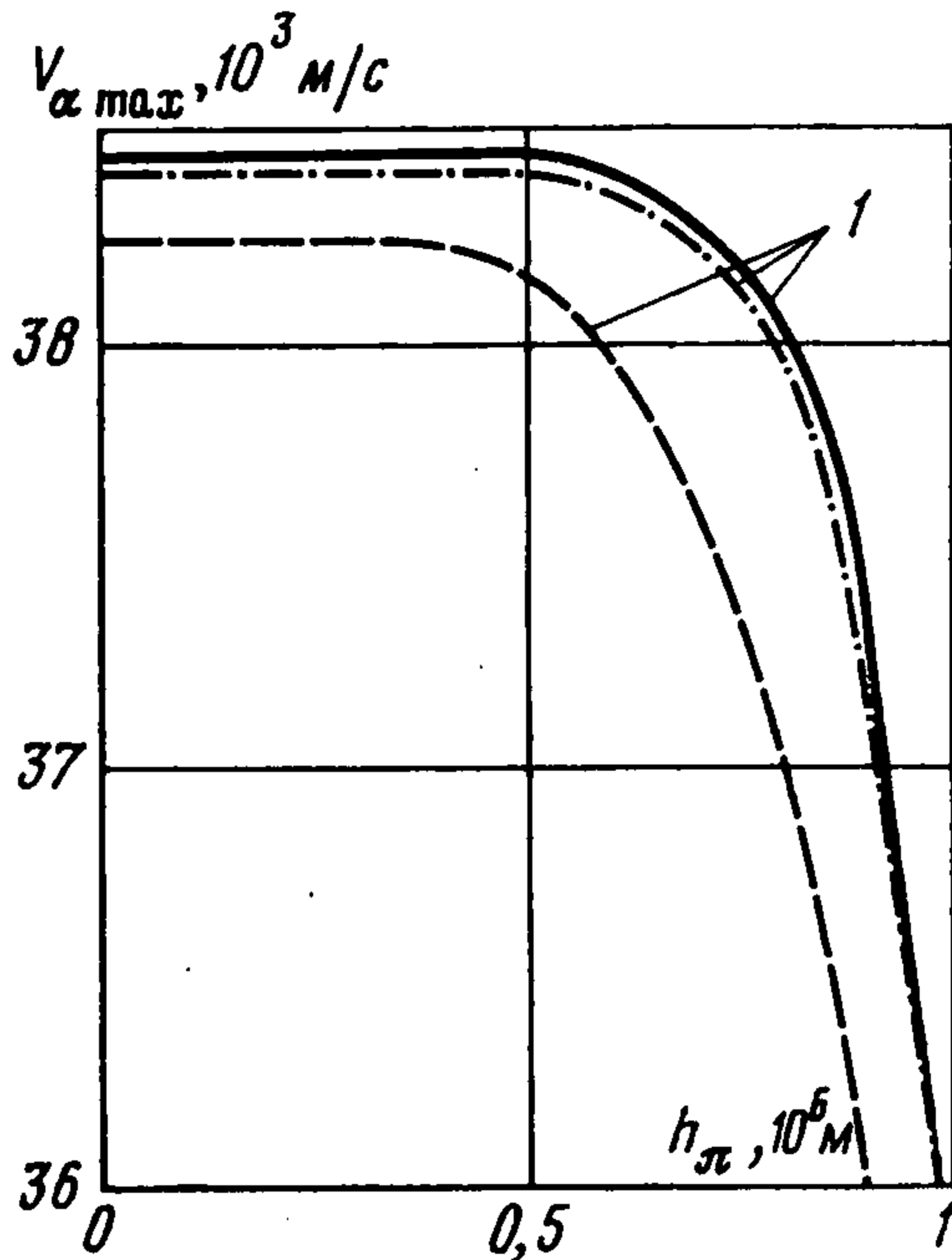
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

следующие исходные условия: $V_0 = 6 \cdot 10^4$ м/с, $\theta_0 = -0,14$ рад, $P_x = 200$ кг/м², $K = 0,5$, $\rho_0 = 0,152$ кг/м³, $\beta = 4,6 \cdot 10^{-5}$ м⁻¹. Параметры $V_0, \theta_0, P_x, K, \rho_0, \beta$ варьировались в следующих пределах: $5 \cdot 10^4$ м/с $\leq V_0 \leq 7 \cdot 10^4$ м/с, $0,07$ рад $\leq |\theta_0| \leq 0,21$ рад, $0,2 \leq K \leq 0,6$, 100 кг/м² $\leq P_x \leq 400$ кг/м², $0,124$ кг/м³ $\leq \rho_0 \leq 0,24$ кг/м³, $3,28 \cdot 10^{-5}$ м⁻¹ $\leq \beta \leq 5,5 \cdot 10^{-5}$ м⁻¹.

Результаты, представленные на фиг. 1—4, показывают, что качественно численные (сплошные линии) и приближенные (штриховые линии) решения совпадают, а количественно приближенные расчеты дают погрешность порядка 10% (кривые 1 — данные для оптимального управления, 2 — для баллистических траекторий).

5. При проведении сравнительного анализа результатов расчета траекторий, найденных с использованием предложенного приближенного аналитического метода и численного решения, было обнаружено, что в зависимости от решаемой конкретной задачи приближенные данные в конечной точке траектории либо всегда больше, либо меньше соответствующих численных результатов. Это обстоятельство позволяет ввести в расчетные выражения поправочные полиномы, компенсирующие систематические ошибки и повышающие точность решения задач. Для этого необходимо проанализировать погрешности (Λ), получаемые при приближенном решении, найти зависимости погрешностей от условий входа (V_0, θ_0), параметров летательного аппарата (K, P_x) и характеристик атмосферы (ρ_0, β).

В общем случае погрешность Λ можно представить в виде полинома по всем варьируемым параметрам:

$$\Lambda = \sum_{i_j, j=1, 2, \dots, 6}^{n_j} A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4} A_{i_5} A_{i_6} V_{0i_1} \theta_{0i_2} P_{xi_3} K_{i_4} \rho_{0i_5} \beta_{i_6}$$

Исследования широкого класса задач движения летательного аппарата в атмосфере планет показали, что достаточно вводить в расчетные выражения поправочные поли-

номы второго порядка, что позволит повысить точность расчета траекторий движения до 3% (см., например, штрихпунктирные линии на фиг. 1—4).

Отметим, что поправочные полиномы вычисляются для каждого конкретного класса задач. Очевидно, что наиболее целесообразно вводить их в расчетные формулы при исследовании большого семейства траекторий, где требуется высокая точность расчетов (например, при решении многоитерационных краевых задач, при проведении параметрических исследований и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Н. М., Мартынов А. И., Соколов Н. Л. Оптимальное управление КА при выведении на орбиту ИСЮ комбинированным способом.— Космич. исследования, 1982, т. 20, вып. 2, с. 211—226.
2. Иванов Н. М., Мартынов А. И., Соколов Н. Л. Оптимальное управление КА в атмосфере Юпитера.— Космич. исследования, 1980, т. 18, вып. 3, с. 348—365.
3. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления.— Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 1, с. 14—34.
4. Gazley C. Atmospheric entry of manned vehicles.— *Aerosp. Enging*, 1960, v. 19, p. 22—23.
5. Allen H. J., Eggers A. J. A study of the motion and aerodynamics heating of ballistic missiles entering the earth's atmosphere at high supersonic speeds.— NASA. Rept, 1958, No. 1381. 16 p.
6. Lees L. Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speed.— *Jet propul.*, 1956, v. 26, No. 4, p. 259—269.
7. Лох У. Динамика и термодинамика спуска в атмосфере планет. М.: Мир, 1966. 276 с.
8. Ярошевский В. А. Приближенный расчет траекторий входа в атмосферу. Ч. I, II.— Космич. исследования, 1964, т. 2, вып. 4, с. 507—531; вып. 5, с. 679—697.
9. Chapman D. R. An approximate analytical method for studying entry into planetary atmospheres.— NASA. Techn. Rep., 1959, No. R-11, 44 p.
10. Busemann A., Vinh N., Kelley G. F. Optimum maneuvers of a skip vehicle with bounded lift constraints.— *J. optimiz. theory and appl.*, 1969, v. 3, No. 4, p. 243—262.
11. Goutensou P. Contribution a l'etude schematique des trajectoires semi-ballistiques a grande portee.— *Bull. assoc. techn. maritime et aeronaut.*, 1965, No. 65, p. 55—78.
12. Fave J. Approche analytique du probleme du domaine accessible a un planeuz orbital.— *Recherche aerospatiale*, 1968, No. 124, p. 3—11.
13. Speyer J. L., Womble M. E. Aproximate optimal atmospheric entry trajectories.— AIAA Paper, 1971, No. 919. 11 p.
14. Shi Y. Matched asymptotic solutions for optimum left controlled atmospheric entry.— AIAA Paper, 1971, No. 21. 16 p.
15. Филатьев А. С. Приближенный аналитический синтез оптимального управления гиперзвуковыми летательными аппаратами при движении в атмосфере с дозвуковой скоростью. Ч. I.— Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 9, вып. 1, с. 41—47; II, вып. 2, с. 54—67.

Москва

Поступила в редакцию
4.I.1982

Технический редактор В. М. Пахомова

Сдано в набор 25.01.83 Подписано к печати 15.03.83 Т-05191 Формат бумаги 70×108^{1/16}
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 + 1 вкл. Усл. кр.-отт. 35,9 тыс. Уч.-изд. л. 16,0 Бум. л. 5,5
Тираж 2292 экз. Зак. 2449

Издательство «Наука», 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10