УДК 541.124 : 62 — 50

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ СОРБЦИИ

Галанин М. П.

Рассматривается система уравнений сорбции. Скорость движения вещества — параметр управления. Доказывается существование оптимального управления для некоторых видов функций стоимости. Получены и обоснованы необходимые условия оптимальности.

В $Q = (0, T) \times (0, l)$ рассматривается система

$$(0.1) \qquad R_t + vR_x = W - R, \quad W_t = R - W$$
$$R(x, 0) = W(x, 0) = \varphi(x), \quad R(0, t) = 0$$

$v = v(t) \in V = \{v : 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha(t) \leqslant v \leqslant \beta(t) \leqslant \beta_0$ почти всюду на $(0, T)\}$.

По физическому смыслу R и W — концентрации несорбированной и сорбированной фаз вещества соответственно, v — скорость движения продуваемого газа, промываемой воды и т. п.— параметр управления, V — множество допустимых управлений ($\alpha(t)$, $\beta(t)$ — измеримые ограниченные функций, α_0, β_0 — постоянные). Требуется найти управление $v \in V$, которое минимизирует функционал

$$(0.2) \qquad J(v) = \int_0^T [(v(t) R(l, t) - z(t))^2 + 2\nu v(t)]\, dt$$

где $\nu > 0$ — постоянная. Для задач рассоления почв [1], например, минимизация (0.2) означает приближение скорости выноса солей из слоя $(0, l)$ к заданной скорости $z(t)$ при минимальном количестве затраченной на это воды.

В работе доказывается существование оптимального управления для некоторого класса начальных условий и режимов. Выводятся необходимые условия, которым должно удовлетворять оптимальное управление. Функционал (0.2) рассматривается лишь для примера, доказательство без труда переносится на случай и других типов функционалов.

1. Существование оптимального управления. Для функциональных пространств используются следующие обозначения: $L^p(Q)$ — пространство функций, интегрируемых с p-й степенью в Q; $L^\infty(Q)$ — пространство существенно ограниченных по мере Лебега функций в Q; $H^1(Q) = W^{1,2}(Q) = \{u : u,\ \partial u/\partial x,\ \partial u/\partial t \in L^2(Q)\}$ — пространство С. Л. Соболева; $L^p(0, T; X) = \{f : f$ — измеримое отображение $(0, T) \to X$: $\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p\, dt\right)^{1/p} < +\infty$ при $1 \leqslant p < +\infty$ и $\operatorname{supess}_{t \in (0, T)} \|f(t)\|_X < +\infty$ при $p = +\infty\}$; $D'(Q)$ — пространство распределений на Q.

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in H^1(0, l) \cap L^\infty(0, l)$, $z(t) \in L^2(0, T)$. При этих условиях существует и единственное решение задачи (0.1) и существует оптимальное управление $v \in V$, минимизирующее функционал (0.2).

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (0.1) доказывается аналогично решению задачи Карлемана в [2]. При этом доказывается, что для $v \in V$ нормы решения оцениваются через нормы φ с использованием лишь постоянных α_0, β_0. В условиях теоремы решения системы

$$R, \ W \in L^\infty(0, T;\ H^1(0, l) \cap L^\infty(0, l))$$

причем, как следует из (0.1), R, $W \in H^1(Q)$. Тем самым для функций R, W могут быть определены их следы на границе Γ области Q, принадлежащие $L^2(\Gamma)$ [3], и функционал (0.2) имеет смысл.

Функционал $J(v)$ ограничен снизу. Следовательно, существует его inf на V. Пусть $\{v_n\}$ — минимизирующая последовательность, $\{R_n\}$, $\{W_n\}$ — соответствующие ей решения (0.1). В силу ограниченности $\{v_n\}$ в $L^\infty(0, T)$ ($v_n \in V$) и $\{R_n\}$, $\{W_n\}$ в $L^\infty(0, T;\ H^1(0, l) \cap L^\infty(0, l))$ существуют подпоследовательности (обозначаемые так же), такие, что $\{v_n\} \to v$ $*$-слабо в $L^\infty(0, T)$, $\{R_n\} \to R$, $\{W_n\} \to W$ $*$-слабо в $L^\infty(0, T;\ H^1(0, l) \cap L^\infty(0, l))$. При этом $v \in V \in L^\infty(0, T)$, R, $W \in L^\infty(0, T;\ H^1(0, l) \cap L^\infty(0, l))$ в силу $*$-слабой замкнутости шаров в этих пространствах. А так как R_n, $W_n \in H^1(Q)$ и вложение $H^1(Q) \to L^2(Q)$ компактно, существуют подпоследовательности $\{R_n\}$, $\{W_n\}$: $\{R_n\} \to R$, $\{W_n\} \to W$ сильно в $L^2(Q)$ и почти всюду. Для этих подпоследовательностей в (0.1) можно совершить предельный переход в $D'(Q)$. Тем самым показано, что v — оптимальное управление.

2. Необходимые условия оптимальности управления. Оптимальное управление v характеризуется тем, что для любого $u \in V$ и $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ справедливо неравенство [3] $dJ_\theta/d\theta|_{\theta=0} | \geqslant 0$; $J_\theta = J(v_\theta)$, $v_\theta = v + \theta(u - v)$.

Для вычисления производной функционала рассмотрим (0.1) с v и v_θ (решения R_θ, W_θ). Вычтем их соответствующим образом один из другого. Получаем задачу

$$R_{*t} + vR_{*x} = W_* - R_* - (u - v) R_{\theta x}, \quad W_{*t} = R_* - W_* \tag{2.1}$$

$$R_*(x, 0) = W_*(x, 0) = R_*(0, t) = 0$$

$$R_* = (R_\theta - R)/\theta, \quad W_* = (W_\theta - W)/\theta$$

Необходимо обосновать возможность перехода при $\theta \to 0$ в (2.1). Из (2.1) получается тождество

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|R_*|^2 + |W_*|^2) + \frac{1}{2} vR_*^2(l, t) + |R_* - W_*|^2 = \tag{2.2}$$

$$= -\int_0^l (u - v) R_{\theta x} R_* \, dx, \quad |R|^2 = \int_0^l R^2(x, t)\, dx$$

Отсюда следует, что $R_*, W_* \in L^\infty(0, T; L^2(0, l))$ для любого $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Сделав замену переменных

$$x \to \zeta, t \to \tau : x = \zeta, \; x = \int_\tau^t v(t')\, dt'$$

получим из (2.1), что функции $R_{*\zeta}$, $W_{*\tau}$ ограничены в $L^\infty(0, T; L^2(0, l))$. Из п. 1 следует, что функция $R_{\theta x}$ ограничена в $L^\infty(0, T; L^2(0, l))$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\theta_k\} \to 0 : \{R_{*k}\} \to y_1$, $\{W_{*k}\} \to y_2$ $*$-слабо в $L^\infty(0, T; L^2(0, l))$, $\{R_{*k\zeta}\} \to y_{1\zeta}$, $\{W_{*k\tau}\} \to y_{2\tau}$, $\{R_{\theta_k x}\} \to R_x$ $*$-слабо в $L^\infty(0, T; L^2(0, l))$.

Тем самым можно перейти к слабому пределу в (2.1). Получаем, что при этом

$$y_{1t} + vy_{1x} = y_2 - y_1 - (u - v) R_x, \quad y_{2t} = y_1 - y_2 \tag{2.3}$$

$$y_1(x, 0) = y_2(x, 0) = y_1(0, t) = 0$$

Используя свойства сходимости следов функций при $x = l$, вытекающие из (2.2), получаем

$$\left.\frac{\partial J_\theta}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 2\int_0^T [(vR(l, t) - z(t))(R(l, t)(u - v) + vy_1(l, t)) + \nu(u - v)]\, dt \geqslant 0$$

Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу (сопряженную с (0.1))

$$p_{1t} + vp_{1x} = p_1 - p_2, \quad p_{2t} = p_2 - p_1 \tag{2.4}$$

$$p_1(x, T) = p_2(x, T) = 0, \quad p_1(l, t) = v(t) R(l, t) - z(t)$$

Согласно общей теории линейных уравнений и систем гиперболического типа [4], существует и единственно обобщенное решение задачи (2.4) $p_1 p_2 \in L^2(Q)$. Отсюда следует, что

$$\left.\frac{\partial J_\theta}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 2\int_0^T R^2(l, t)(v(t) - g(t))(u - v)\, dt \geqslant 0 \tag{2.5}$$

$$g(t) = \frac{1}{R^2(l, t)}\left(z(t) R(l, t) + \int_0^l R_x(x, t)\, p_1(x, t)\, dx - \nu\right)$$

для оптимального управления v и любого $u \in V$. Следовательно, почти всюду на $(0, T)$ подынтегральное выражение в первой формуле (2.5) неотрицательно.

Введем функцию

$$\Phi(\alpha, \beta, g) = \begin{cases} \alpha(t), & g < \alpha(t) \\ \beta(t), & g > \beta(t) \\ g(t), & \alpha(t) \leqslant g \leqslant \beta(t) \end{cases}$$

получаем, что для решения задачи оптимального управления необходимо решить задачу

$$R_t + \Phi(\alpha, \beta, g) R_x = W - R, \quad W_t = R - W \tag{2.6}$$

$$p_{1t} + \Phi(\alpha, \beta, g) p_{1x} = p_1 - p_2, \quad p_{2t} = p_2 - p_1$$

$$R(x, 0) = W(x, 0) = \varphi(x), \; R(0, t) = 0$$

$$p_1(x, T) = p_2(x, T) = 0, \; p_1(l, t) = \Phi(\alpha, \beta, g) \; R(l, t) - z(t)$$

и оптимальное управление $v = \Phi(\alpha, \beta, g)$.

В п. 1 доказано существование оптимального управления — решения задачи (0.1)—(0.2). Решение (2.6) соответствует (0.1)—(0.2), удовлетворяет необходимым условиям оптимальности управления. Ясно, что решение (2.6) также существует. Вопрос о единственности решения задач (2.6) и (0.1)—(0.2) остается открытым в силу нелинейности отображения $v \to (R, W)$.

3. Другие виды функционалов. Теория для функционала (0.2) с небольшими изменениями переносится на другие функционалы, например

$$J(v) = \int_0^T [(vR(l, t) - z(t))^2 + \nu v^2] \, dt$$

$$J(v) = \int_0^T \left[\int_0^l (R + W - z)^2 \, dx + \nu v^2\right] dt$$

$$J(v) = \int_0^l (R(x, T) + W(x, T) - z(x))^2 \, dx + \nu \int_0^T v^2 \, dt$$

Для последнего случая необходимое условие выглядит так:

$$g(t) = \frac{1}{\nu} \int_0^l R_x(x, t) \, p_1(x, t) \, dx$$

Функция $\Phi(\alpha, \beta, g)$ — та же, что и в п. 2. Окончательная задача отличается от (2.6) лишь условиями на p_1, p_2

$$p_1(l, t) = 0, \; p_1(x, T) = p_2(x, T) = R(x, T) + W(x, T) - z(x)$$

Отметим, что задача оптимального управления может быть решена численными методами [5] без использования задач типа (2.6).

Автор благодарит Н. А. Тихонова за постановку задачи, поддержку и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов Н. А.* О математическом моделировании рассоления почв.— Докл. ВАСХНИЛ, 1980, № 2, с. 39—40.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.
4. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1978. 592 с.
5. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487с.

Москва

Поступила в редакцию
28.V.1982