

мике — силовые линии магнитного поля) тоже прямые. Следовательно, они либо все замкнуты, либо всюду плотно обматывают M . Однако, если $\rho \neq \text{const}$, то в отличие от линий тока интегральные линии поля u замыкаются через разные промежутки времени.

Если касательные поля v и w полны на M , то в некомпактном случае M диффеоморфна цилиндру $R^1 \times T^1$ или плоскости R^2 и в некоторых координатах на M линии тока и интегральные линии векторного поля w тоже выпрямляются в целом.

Описанная конструкция находит наиболее содержательное применение в задаче о баротропных течениях идеальной жидкости. В этом случае из уравнения движения в форме Ламба вытекает, что все интегральные поверхности совпадают с замкнутыми уровнями интеграла Бернулли $f = c$.

Теорема. Предположим, что область течения компактна и ограничена регулярной аналитической поверхностью, а поле скоростей v аналитично и $v \times \text{rot } v \neq 0$. Тогда почти все связные поверхности Бернулли $M = \{f = c\}$ (кроме, быть может, конечного числа) диффеоморфны либо двумерному тору, либо кольцу $[0, 1] \times T^1$. При этом на каждом из торов все линии тока либо замкнуты, либо всюду плотны, а на каждом кольце линии тока замкнуты. Периоды обращения частиц жидкости по разным замкнутым траекториям, лежащим на одной поверхности Бернулли, совпадают.

В случае несжимаемой жидкости это утверждение доказано в работе [4].

Доказательство. Из уравнения Ламба вытекает, что f — непостоянная аналитическая функция. Следовательно, все поверхности $f = c$ (за исключением, быть может, некоторого конечного числа) регулярны [5]. На этих поверхностях, очевидно, $v \times \text{rot } v \neq 0$. Если $M = \{f = c\}$ не имеет общих точек с границей, то остается провести уже описанную общую конструкцию, а случай, когда M пересекается с границей области течения, рассматривается точно также, как в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
2. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 316 с.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
4. Арнольд В. И. О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. — ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 183—185.
5. Souček J., Souček V. Morse — Sard theorem for real-analytic functions. — Comment. Math. Univ. Carol. 1972, v. 13, No 1, p. 45—51.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1982

УДК 532.5: 532.135

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТИПА ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ РИВЛИНА — ЭРИКСЕНА

Георгеску А., Четти С. С.

Отыскиваются точные нестационарные решения, описывающие плоские движения типа Пуазейля для жидкостей Ривлина — Эриксона при произвольном падении давления. Все рассмотренные течения для бесконечно больших времен переходят в стационарное плоское течение Пуазейля. В частных случаях, рассмотренных ранее [1], получено совпадение результатов. Некоторые утверждения, сформулированные [1] без доказательств, ниже строго доказаны.

Нестационарное плоское течение типа Пуазейля для жидкости Ривлина — Эриксона между плоскостями $y = \pm 1$ описывается уравнениями с начальными и граничными условиями

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + S \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} + 2(2S + S_1) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u^2}{\partial y^2}$$

$$(2) \quad u(y, t) = 0; \quad -1 \leq y \leq 1, \quad t \leq 0;$$

$$u(y, t) = 0, \quad t > 0, \quad y = \pm 1$$

Здесь $(u(y, t), 0)$ — безразмерная скорость, $p = p(x, y, t)$ — давление, $R > 0$ — число Рейнольдса, $S > 0$ — параметр вязкоупругости и $uS_1 > 0$ — параметр поперечной вязкости. Из второго уравнения (1) следует, что $\partial p / \partial y$ — функция только от y и t и, следовательно, $p = f_1(y, t)x + f(y, t)$. Подставляя это выражение в первое уравнение (1), потребуем $f_1(y, t) = -f(t)$, поэтому $p = -f(t)x + g(y, t)$, когда x — ось, параллельная стенкам.

В предположении, что функция $f(t)$ задана, скорость u будем определять из первого уравнения (1) и условий (2). Затем падение давления $\partial p / \partial y$ находится из второго уравнения (1).

Выражение для p показывает, что течение должно рассматриваться в ограниченной области. Так как падение управляющего давления обусловлено движением жидкости, естественно определить его так же, как в классическом ньютоновском случае.

Скорость u удовлетворяет условиям (2) и первому уравнению (1), в котором — $\partial p / \partial x = f(t)$. Ограничиваясь рассмотрением скоростей с экспоненциальным затуханием при $t \rightarrow \infty$, методом преобразования Лапласа находим

$$(3) \quad u(y, t) = \int_0^t f(\tau) H(y, t - \tau) d\tau, \quad t \in [0, \infty], \quad y \in [-1, 1]$$

$$H(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n (1 + \lambda_n RS)}{\pi(2n+1)} \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n+1)y \right] \exp(\lambda_n t)$$

$$\lambda_n = - \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4R + \pi^2 (2n+1)^2 RS}$$

Так как $0 < 1 + RS\lambda_n < 1$, $\lambda_n < 0$, ряд для $H(y, t)$ равномерно сходится. Поэтому в формуле (3) можно поменять местами знаки интеграла и суммы. Отметим, что (равномерная) сходимость не только ряда, определяющего H , но и других рядов, встречающихся ниже, может быть доказана на основании свойств λ_n .

Как известно из теории преобразования Лапласа

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \bar{u}(y, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [\lambda \overline{(f(\lambda))}] \frac{R}{2} (1 - y^2) = \frac{R}{2} (1 - y^2) f(\infty)$$

Отсюда следует, что все найденные решения стремятся к классическому решению Пуазейля.

Известно, что в случае плоского стационарного течения Пуазейля для ньютоновских жидкостей можно задать либо падение давления $\partial p / \partial x = -f(\infty)$, либо трение на стенках $(\partial u / \partial y)_{y=\pm 1} = \mp Rf(\infty)$.

Аналогично в неньютоновском случае $u(y, t)$ определяется единственным образом либо через $\partial p / \partial x$, либо через $(\partial u / \partial y)_{y=\pm 1}$. Из соотношения (3) получаем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\pm 1} = \pm \sum_{n=0}^{\infty} 2(1 + \lambda_n RS) \int_0^t f(\tau) \exp[\lambda_n(t - \tau)] d\tau =$$

$$= \pm 2 \int_0^t f(\tau) M(t - \tau) d\tau$$

$$M(t - \tau) > 0$$

Для заданного трения на стенках полученный результат представляет собой уравнение типа Вольтерра, где f — известная функция. Ввиду того что $M(t - \tau) > 0$ для любого $t > 0$, $(\partial u / \partial y)_{y=\pm 1} = 0$ при $t = 0$, а M и $(\partial u / \partial y)_{y=\pm 1}$ — дифференцируемые по t функции в любом интервале $(0, a)$, $a > 0$, согласно теореме Вольтерра заключаем, что каждое из этих уравнений имеет единственное решение. Ясно, что для заданной функции $f(t)$ имеем единственную функцию трения на стенке.

Рассмотрим теперь частный случай $f(t) = P(1 - \exp(-\omega t))$, $P, \omega > 0$. В этом случае решение (3) переходит в решение, приведенное в [1]. Представляя функцию

u в виде подходящих рядов Фурье, получим следующее выражение:

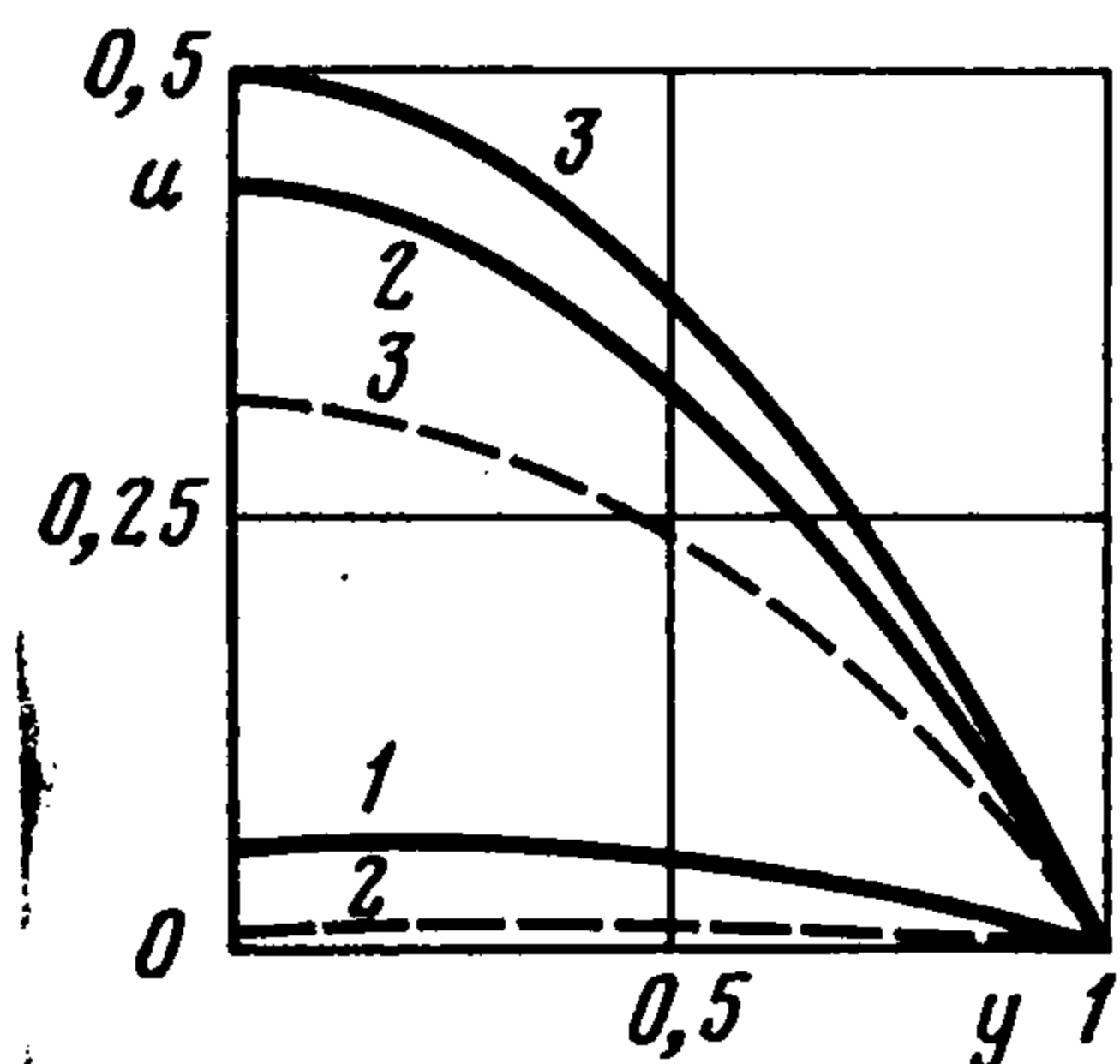
$$(4) \quad u(y, t) = \frac{P}{\omega} \left[1 + \frac{\cos hy}{\cos h} \right] (\exp(-\omega t) - 1) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} 16 (-1)^{n-1} \frac{PR\omega \cos [\pi(n+1/2)y]}{(2n+1)^3 \pi^3 (\omega + \lambda_n)} (\exp(\lambda_n t) - 1) \\ h = \sqrt{\frac{R\omega}{1 - RS\omega}}, \quad y \in [-1, 1], \quad t \in [0, \infty)$$

Чтобы получить выражения для производных от u , необходимо дополнительно исследовать их поведение в точках $y = \pm 1$, где соответствующие ряды Фурье не всегда сходятся к разлагаемой функции.

Для отыскания производных была использована техника интегрирования назад согласно [2]. Из формулы (4) следует

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{P}{\omega} h \frac{\sin hy}{\cos h} (\exp(-\omega t) - 1) - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} 8 (-1)^{n-1} \frac{PR\omega \sin [(n+1/2)y]}{(2n+1)^2 \pi^2 (\omega + \lambda_n)} (\exp(\lambda_n t) - 1) \\ y \in [-1, 1], \quad t \in [0, \infty) \\ p = -P(1 - \exp(-\omega t))x + (2S + S_1) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \text{const}$$

Из последнего выражения видно, что за счет неньютоновских членов давление возрастает. Применяя формулу (3) для частных случаев, рассмотренных в [3], заново получаем все результаты из [3].



В частных случаях, рассмотренных выше, были проведены численные расчеты при $P = 1, S = 1, 2, 5, 10, 100, R = 1, 4, 10, 100, \omega = 2, 10, 100$ и разных значениях t и y .

Результаты расчетов при $P = 1, R = 1, \omega = 10$ показаны на фигуре сплошными линиями при $S = 1$ и штриховыми линиями при $S = 100$. Кривые 1—3 соответствуют значениям t , равным 0,3; 5 и 100. Из этих графиков, а также из формул (3) видно, что для $t = 0$ профиль скорости — прямая линия $u = 0, y \in (-1, 1)$; для $t > 0$ u — положительно-возрастающая функция t , которая при $t \rightarrow \infty$ стремится к параболическому профилю Пуазейля. Профиль скорости симметричен относительно оси x . Кроме того, u — возрастающая функция от P и не зависит от S_1 .

Давление возрастает вместе с S_1 . Видно также, что возрастание R или ω и убывание S ведет к росту скорости.

Авторы благодарят Д. Хоментковски за обсуждения некоторых результатов, а также В. Николае, помогавшего делать численные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Siddappa B., Chetty S. S., Rivlin-Ericksen fluid flow through a straight channel. — J. Karnatak Univ. Sci., 1976, v. 21, p. 89—93.
2. Goldstein S. The stability of viscous fluid flow under pressure between parallel plates. — Proc. Cambridge Phil. Soc., 1936, v. 32, No. 1, p. 40—54.
3. Siddappa B., Chetty S. S. Rivlin-Ericksen fluid flow between two parallel flat plates, one in uniform motion and the other at rest with unsteady pressure gradient. — Pure. Appl. Math. Sci., 1978, v. 7, No. 1—2, p. 61—66.