УДК 531.01

ЗАМЕЧАНИЯ О СТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЯХ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Козлов В. В.

Общее уравнение для изменения соленоидального векторного поля, которому удовлетворяет напряженность магнитного поля в магнитной гидродинамике и вектор вихря баротропных течений идеальной жидкости, с учетом уравнения неразрывности приведено к «уравнению Эйлера для изменения момента». С помощью этого замечания исследована топология стационарных баротропных течений невязкой сжимаемой жидкости.

При изучении общих свойств вихревых линий важную роль играет уравнение

$$\partial u/\partial t = \operatorname{rot}(v \times u) \tag{1}$$

Здесь u — некоторое соленоидальное векторное поле в трехмерном евклидовом пространстве (его физический смысл зависит от конкретной постановки задачи), v — скорость частиц сплошной среды ([1], гл. VI).

Вектор магнитной напряженности в среде с бесконечной проводимостью удовлетворяет уравнению (1) [1]. Таким же уравнением описывается изменение вектора вихря баротропных течений идеальной жидкости (газа) в поле потенциальных массовых сил.

Оказывается, уравнение (1) с учетом уравнения неразрывности можно представить в виде уравнения Эйлера для изменения момента

$$\partial w/\partial t = [v, w], \quad w = u/\rho \tag{2}$$

Скобка [,] — коммутатор векторных полей, ρ — плотность вещества. В частности, в стационарном случае поля v и w коммутируют.

Для доказательства (2) вычислим

$$\frac{\partial(u/\rho)}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\operatorname{rot}(v \times u) + \frac{u}{\rho^2}\operatorname{div}(\rho v) \tag{3}$$

С другой стороны

$$\left[v, \frac{u}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}[v, u] + \frac{u}{\rho^2} L_v\rho$$

где $L_v\rho$ — производная функции ρ вдоль векторного поля v. Воспользовавшись известным тождеством векторного анализа, получим, что

$$\left[v, \frac{u}{\rho}\right] = \frac{1}{\rho}\operatorname{rot}(v \times u) + \frac{u}{\rho}\operatorname{div} v + \frac{u}{\rho^2} L_v\rho \tag{4}$$

Так как $L_v\rho + \rho \operatorname{div} v = \operatorname{div}(\rho v)$, то из (3) и (4) будет следовать (2).

Стационарное движение сплошной среды с векторным полем u будем называть вихревым, если $u \times v \neq 0$. Каждой точке x из области течения естественно поставить в соответствие плоскость $\pi(x)$, порожденную линейными комбинациями независимых векторов $u(x)$ и $v(x)$. Поля v и u/ρ коммутируют, и поэтому распределение плоскостей $\pi(x)$ инволютивно [2]. В частности, через каждую точку x проходит единственная максимальная интегральная поверхность M_x этого распределения, которая касается векторов u и v. В общем случае поверхности M_x могут быть погружены в область течения весьма сложным образом: они, вообще говоря, не замкнуты.

Наиболее просто описывается движение частиц сплошной среды по компактным интегральным поверхностям. Пусть M — компактная поверхность без края. Так как касательные поля v и w коммутируют и линейно независимы, то M диффеоморфна двумерному тору T^2 и в некоторых угловых координатах φ_1, $\varphi_2 \bmod 2\pi$ дифференциальные уравнения $x^\cdot = v(x)$ и $x^\cdot = w(x)$ на T^2 имеют следующий вид ([3], гл. 10):

$$\varphi_1^\cdot = \omega_1, \ \varphi_2^\cdot = \omega_2 \text{ и } \varphi_1^\cdot = \Omega_1, \ \varphi_2^\cdot = \Omega_2 \ (\omega, \Omega = \text{const})$$

Следовательно, в компактном случае линии тока либо замкнуты (и тогда периоды обращения частиц по разным замкнутым траекториям совпадают), либо всюду плотны на M.

В координатах φ_1, φ_2 уравнение $x^\cdot = u(x) = \rho(x)\, w(x)$ приводится, очевидно, к виду $\varphi_i^\cdot = \Omega_i\, \rho$ и интегральные линии векторного поля u (в магнитной гидродинамике — силовые линии магнитного поля) тоже прямые. Следовательно, они либо все замкнуты, либо всюду плотно обматывают M. Однако, если $\rho \neq \mathrm{const}$, то в отличие от линий тока интегральные линии поля u замыкаются через разные промежутки времени.

Если касательные поля v и w полны на M, то в некомпактном случае M диффеоморфна цилиндру $R^1 \times T^1$ или плоскости R^2 и в некоторых координатах на M линии тока и интегральные линии векторного поля w тоже выпрямляются в целом.

Описанная конструкция находит наиболее содержательное применение в задаче о баротропных течениях идеальной жидкости. В этом случае из уравнения движения в форме Ламба вытекает, что все интегральные поверхности совпадают с замкнутыми уровнями интеграла Бернулли $f = c$.

Теорема. Предположим, что область течения компактна и ограничена регулярной аналитической поверхностью, а поле скоростей v аналитично и $v \times \mathrm{rot}\, v \not\equiv 0$. Тогда почти все связные поверхности Бернулли $M = \{f = c\}$ (кроме, быть может, конечного числа) диффеоморфны либо двумерному тору, либо кольцу $[0, 1] \times T^1$. При этом на каждом из торов все линии тока либо замкнуты, либо всюду плотны, а на каждом кольце линии тока замкнуты. Периоды обращения частиц жидкости по разным замкнутым траекториям, лежащим на одной поверхности Бернулли, совпадают.

В случае несжимаемой жидкости это утверждение доказано в работе [4].

Доказательство. Из уравнения Ламба вытекает, что f — непостоянная аналитическая функция. Следовательно, все поверхности $f = c$ (за исключением, быть может, некоторого конечного числа) регулярны [5]. На этих поверхностях, очевидно, $v \times \mathrm{rot}\, v \neq 0$. Если $M = \{f = c\}$ не имеет общих точек с границей, то остается провести уже описанную общую конструкцию, а случай, когда M пересекается с границей области течения, рассматривается точно также, как в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
2. *Шевалле К.* Теория групп Ли.Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 316 с.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
4. *Арнольд В. И.* О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 183—185.
5. *Souček J.*, *Souček V.* Morse — Sard theorem for real-analytic functions.— Comment. Math. Univ. Carol. 1972, v. 13, No 1, p. 45—51.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1982

УДК 532.5: 532.135

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТИПА ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ РИВЛИНА — ЭРИКСЕНА

Георгеску А., Четти С. С.

Отыскиваются точные нестационарные решения, описывающие плоские движения типа Пуазейля для жидкостей Ривлина — Эриксена при произвольном падении давления. Все рассмотренные течения для бесконечно больших времен переходят в стационарное плоское течение Пуазейля. В частных случаях, рассмотренных ранее [1], получено совпадение результатов. Некоторые утверждения, сформулированные [1] без доказательств, ниже строго доказаны.

Нестационарное плоское течение типа Пуазейля для жидкости Ривлина — Эриксена между плоскостями $y = \pm 1$ описывается уравнениями с начальными и граничными условиями

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u^2}{\partial y^2} + S\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\,(2S + S_1)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u^2}{\partial y^2}$$

$$(2)\qquad u\,(y,\, t) = 0;\ \ -1 \leqslant y \leqslant 1,\ \ t \leqslant 0;$$

$$u\,(y,\, t) = 0,\ \ t > 0,\ \ y = \pm 1$$