$$- x_1y_1^2 (3\cos \sqrt{5}t - 1) + x_1y_2^2 \sin \sqrt{7}t + o (|z|^4)$$

$$y_2^{\cdot} = \lambda_2x_2 - \lambda_2 \cos (2\lambda_1 + \lambda_2) tx_1x_2 - (2\lambda_1 + \lambda_2) \sin (2\lambda_1 + \lambda_2) tx_1y_2 -$$

$$- x_1^3 \sin \sqrt{5}t - x_2^3 (\cos t - 3 \sin \sqrt{2}t) + o (|z|^4)$$

$$z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

В системе (5) наблюдается внутренний резонанс четвертого порядка при $\lambda_1 = 3\sqrt{6}$, $\lambda_2 = \sqrt{6}$. В этом случае возмущенная функция Ляпунова имеет вид

$$V = x_1x_2 (x_2^2 - 3y_2^2) - y_1y_2 (3x_2^2 - y_2^2) + x_2^5 (\cos t - \sin \sqrt{5}t) -$$

$$- 2 \sin (2\lambda_1 + \lambda_2) ty_1^2y_2^3 + 2\cos (2\lambda_1 + \lambda_2) tx_1^2x_2^3$$

Среднее $\overline{\Psi}$ от произвольной возмущенной функции Ляпунова есть знакопостоянная функция $\overline{\Psi} = 0{,}125r_2^6$, положительно-определенная в области $\{V > 0\}$. Следовательно, по теореме 3 нулевое положение равновесия системы (5) неустойчиво.

Отметим, что с помощью возмущенной функции может быть исследована неустойчивость лагранжевых точек либрации круговой ограниченной задачи трех тел при резонансах третьего и четвертого порядков, которая ранее исследовалась с помощью методов приведения к нормальной форме по А. Д. Брюно [8].

В случае резонанса третьего порядка

$$V = V_0 + S,\ V_0 = x_1 (x_2^2 - y_2^2) - 2y_1x_2y_2,\ S \equiv 0$$

В случае резонанса четвертого порядка

$$V_0 = x_1x_2 (x_2^2 - 3y_2^2) - y_1y_2 (3x_2^3 - y_2^2)$$

а S однозначно определяется по формулам выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хапаев М. М.* Обобщение второго метода Ляпунова.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 11, с. 2020—2028.
2. *Куницин А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979, т. 4, с. 58—139.
3. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1971, т. 25, с. 119—262.
4. *Хапаев М. М., Анашкин О. В.* Об исследовании на устойчивость в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1028—1031.
5. *Хапаев М. М., Анашкин О. В.* Об устойчивости в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 7, с. 1216—1224.
6. *Гольцер Я. М.* Нормальная форма и устойчивость одного класса почти-периодических систем при резонансе.— Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем., 1976, № 5, с. 58—63.
7. *Шинкин В. Н.* Об одном способе исследования на устойчивость вторым обобщенным методом Ляпунова с помощью численного счета.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 1980, № 1, с. 36—43.
8. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.VI.1982

УДК 531.55 : 521.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ТОЧКЕ ЛИБРАЦИИ

Рузанова В. Н.

Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела относительно его центра масс, помещенного в треугольную точку либрации L_4 круговой ограниченной задачи трех тел. Предполагается, что движение основных тел M_1 и M_2 конечных масс m_1 и m_2 и движение центра масс O твердого тела описывается уравнениями плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Размеры твердого тела считаются малыми по сравнению с расстоянием от его центра масс до M_1 и M_2, что позволяет пренебречь влиянием движения твердого тела вокруг его центра масс на движение самого центра масс.

Достаточные условия устойчивости спутника-гиростата в предположении, что центр масс спутника находится в точках либрации, получены в [1]. Стационарные движения тела, центр масс которого во все время движения находится в одной из точек либрации, в гравитационном поле двух точечных масс найдены в [2]. Исследован [3] вопрос об их устойчивости в первом приближении, получены [4] достаточные условия устойчивости некоторых из этих движений. Исследование устойчивости относительного равновесия осесимметричного твердого тела, центр масс которого движется по периодической орбите круговой ограниченной задачи трех тел, проведено в [5].

Для исследования движения твердого тела относительно его центра масс введем две системы координат: орбитальную $OXYZ$ (ось OZ — продолжение радиуса-вектора M_1L_4, ось OY перпендикулярна плоскости треугольника $M_1M_2L_4$ и направлена так, что с ее конца обращение точек M_1 и M_2 видно против часовой стрелки, ось OX дополняет оси OY и OZ до правой тройки) и связанную $Oxyz$ (ее оси направлены по главным центральным осям инерции твердого тела, причем ось Oz направлена по оси его динамической симметрии). Ориентация связанной системы координат относительно орбитальной определяется углами Эйлера ψ, θ, φ.

Из выражений для кинетической энергии тела, проекций p, q, r абсолютной угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz и силовой функции [6] следует, что φ — циклическая координата, поэтому величина проекции абсолютной угловой скорости на ось Oz постоянна, $r = r_0 = \text{const}$.

Выберем единицу длины так, чтобы расстояние между точками M_1 и M_2 было равно единице. Тогда (n — угловая скорость тел M_1 и M_2, f — универсальная гравитационная постоянная)

$$k_1 = (1 - \mu)\, n^2, \quad k_2 = \mu n^2$$
$$(\mu = m_2/(m_1 + m_2), \quad k_i = f m_i)$$

Полагая в уравнениях Лагранжа движения оси симметрии тела относительно орбитальной системы координат $\psi'' = \psi' = \theta'' = \theta' = 0$, $\psi = \psi_0$, $\theta = \theta_0$ (штрихом обозначено дифференцирование по $\tau = nt$), получаем для определения стационарных движений тела следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}4\sin 2\psi_0 \sin^2\theta_0 + 8\alpha\beta \sin\psi_0 \sin\theta_0 - \\ -3(\alpha - 1)\,\mu\,(3\sin 2\psi_0 \sin^2\theta_0 + \sqrt{3}\cos\psi_0 \sin 2\theta_0) = 0 \\ 4\cos^2\psi_0 \sin 2\theta_0 + 8\alpha\beta\cos\psi_0\cos\theta_0 - 3(\alpha - 1)\,[4(1-\mu)\sin 2\theta_0 + \\ + \mu(\sin 2\theta_0 - 3\sin^2\psi_0 \sin 2\theta_0 - 2\sqrt{3}\sin\psi_0 \cos 2\theta_0)] = 0 \\ \alpha = C/A,\ \beta = r_0/n\end{gathered} \tag{1}$$

Не проводя полного исследования системы (1) для произвольных параметров α, β, μ, рассмотрим следующие ее частные решения:

$$\theta_0 = \pi/2, \quad \psi_0 = \pi \quad (\beta \text{ — любое}) \tag{2}$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\mu}{2 - 3\mu}, \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2}; \quad \theta_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\mu}{2-3\mu} + \frac{\pi}{2}, \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2} \quad (\beta = 0) \tag{3}$$

Решение (2), а также (3) для $\mu = 0{,}5$ были получены в [2].

Для решения (2) ось динамической симметрии тела перпендикулярна плоскости треугольника $M_1M_2L_4$ и тело вращается вокруг этой оси с постоянной скоростью $\dot\varphi$. Для решений (3) ось динамической симметрии тела лежит в плоскости треугольника $M_1M_2L_4$ и составляет угол θ_0 с радиус-вектором M_1O, при этом угловая скорость $\dot\varphi$ собственного вращения, так же как и r_0, равна нулю.

Для исследования устойчивости полученных решений будем использовать уравнения движения в гамильтоновой форме.

Движению (2) соответствует решение уравнений Гамильтона

$$\theta = \pi/2 + x_1,\ p_\theta = y_1,\ \psi = \pi + x_2,\ p_\psi = y_2 \tag{4}$$

Разложим функцию Гамильтона в ряд в окрестности решения (4), положив

$$\theta = \pi/2 + x_1,\ p_\theta = y_1,\ \psi = \pi + x_2,\ p_\psi = y_2$$

Получим

(5) $$H = H_2 + H_4 + \ldots$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \left[\frac{\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta}{2} + \frac{3}{2}(\alpha - 1)\left(1 - \frac{3}{4}\mu\right)\right] x_1^2 +$$

$$+ \frac{3\sqrt{3}}{4}(\alpha - 1)\mu x_1 x_2 + \left[\frac{\alpha\beta}{2} + \frac{9}{8}(\alpha - 1)\mu\right] x_2^2 + (\alpha\beta - 1) x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$H_4 = \left[\frac{1}{3}\alpha^2\beta^2 - \frac{5}{24}\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha - 1)\left(1 - \frac{3}{4}\mu\right)\right] x_1^4 +$$

$$+ \frac{1}{8}[2\alpha\beta - 9(\alpha - 1)\mu] x_1^2 x_2^2 - \left[\frac{1}{24}\alpha\beta + \frac{3}{8}(\alpha - 1)\mu\right] x_2^4 -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{8}(\alpha - 1)\mu x_1 x_2^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - 1)\mu x_1^3 x_2 + \frac{1}{2} x_1 x_2^2 y_2 +$$

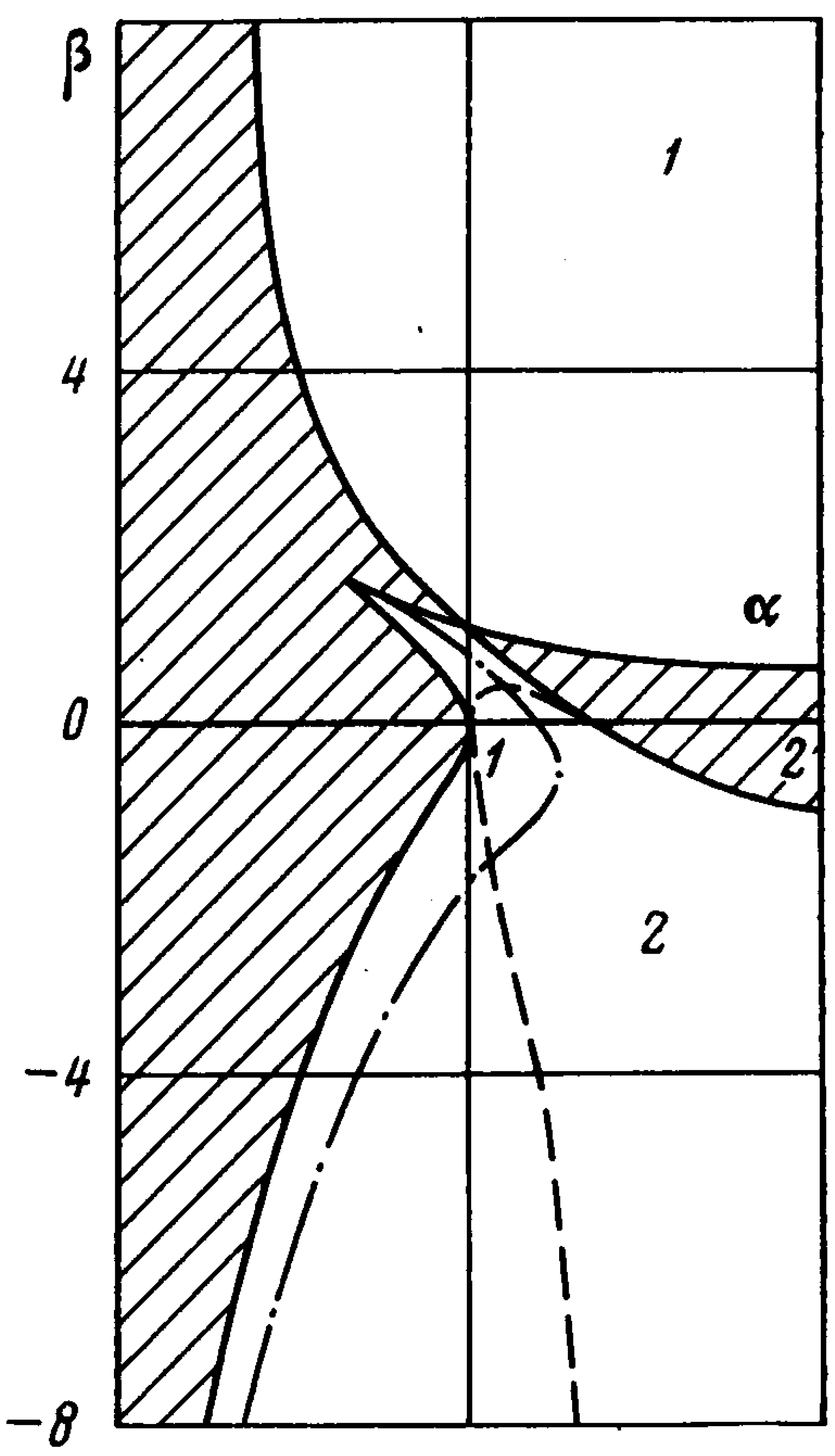
$$+ \left(\frac{5}{6}\alpha\beta - \frac{1}{3}\right) x_1^3 y_2 - \frac{1}{6} x_2^3 y_1 + \frac{1}{2} x_1^2 y_2^2$$

Характеристическое уравнение линейной системы, определяемой формой H_2, имеет вид

6) $$\lambda^4 + [(\alpha\beta - 1)^2 + 3\alpha - 2]\lambda^2 +$$

$$+ (\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 3\alpha - 4) + \frac{27}{4}(\alpha - 1)^2 \mu (1 - \mu) = 0$$

Для устойчивости необходимо, чтобы все корни этого уравнения были чисто мнимыми. Достаточными условиями устойчивости являются условия положительной определенности квадратичной формы H_2 [7].



На фигуре для $\mu = 0{,}01215$, что соответствует системе Земля — Луна, в плоскости параметров α, β $(0 < \alpha < 2,\ -\infty < \beta < +\infty)$ в заштрихованной области движение неустойчиво, в области 1 устойчиво, а в области 2 выполнены только необходимые условия устойчивости. В области 2 решение (2) устойчиво в первом приближении. В этой области форма H_2 не является знакоопределенной, но характеристическое уравнение (6) имеет только чисто мнимые корни.

Для решения вопроса об устойчивости в области 2 в строгом нелинейном смысле с помощью вещественного линейного канонического преобразования $x_i, y_i \to q_i, p_i$, найденного методом, разработанным в [8], функцию H_2 приведем к нормальной форме

$$H_2 = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2)$$

а затем (так как $H_3 \equiv 0$) преобразованием Биркгофа $q_i, p_i \to q_i^*, p_i^*$ приведем гамильтониан H к виду

(7) $$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 +$$

$$+ a r_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + b r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)$$

$$q_i^* = \sqrt{2 r_i} \sin \varphi_i, \quad p_i^* = \sqrt{2 r_i} \cos \varphi_i$$

Величины c_{20}, c_{11}, c_{02}, a и b вычисляются по коэффициентам формы H_4, записанной в переменных q_i, p_i.

Если в системе нет резонанса четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$, то последние два слагаемых в выражении (7) отсутствуют. В этом случае по теореме Арнольда — Мозера положение равновесия системы с функцией Гамильтона (5) устойчиво, если $D(\alpha, \beta) = c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0$. Кривая $D(\alpha, \beta) = 0$ для $\mu = 0{,}01215$ изображена на фигуре штриховой линией. Вопрос об устойчивости на ней не рассматривался.

На резонансной кривой $\omega_1 = 3\omega_2$ (она показана на фигуре штрихпунктирной линией) по теореме А. П. Маркеева [8] положение равновесия устойчиво, если

$$3\sqrt{3}\sqrt{a^2 + b^2} < |c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}|$$

и неустойчиво, если в этом неравенстве противоположный знак.

Вычисления на ЭВМ показали, что на резонансной кривой в области 2 существуют два участка неустойчивости ($\mu = 0{,}01215$): $-1{,}747 < \beta < -1{,}573$ и $0{,}386 < \beta < 0{,}449$.

Исследуем теперь устойчивость первого решения (3). Исследование второго решения (3) проводится аналогично. Рассматриваемому движению соответствует следующее решение уравнений Гамильтона:

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}\mu}{2 - 3\mu}, \quad p_\psi = 0, \quad p_\theta = 1 \tag{8}$$

Введем новые канонические переменные x_i, y_i по формулам

$$\theta = \theta_0 + x_1, \; p_\theta = 1 + y_1, \; \psi = \pi/2 + x_2, \; p_\psi = y_2$$

Выражение H_2 будет таким:

$$\begin{aligned} H_2 = {} & \frac{1}{2}\left[\frac{y_2^2}{\sin^2\theta_0} + y_1^2 + 2x_2y_2 \operatorname{ctg}\theta_0 + x_2^2\right] - \\ & - \frac{3}{4}(\alpha - 1)\left[2(1-\mu)\cos 2\theta_0 - \mu\cos 2\theta_0 + \sqrt{3}\mu \sin 2\theta_0\right] x_1^2 - \\ & - \frac{3}{16}(\alpha - 1)\mu\left(6\sin^2\theta_0 + \sqrt{3}\sin 2\theta_0\right) x_2^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Можно показать, что неравенство

$$\alpha < 1 \tag{10}$$

является условием того, что корни характеристического уравнения линейной системы чисто мнимые, а также условием положительной определенности квадратичной формы (9), т. е. (10) — необходимое и достаточное условие устойчивости решения (8). Условие (10) означает, что движение тела будет устойчивым, если его полярный момент инерции меньше экваториального, т. е. тело вытянуто вдоль оси симметрии. Это же условие было получено в [4]. Для второго решения (3) условием устойчивости является условие $\alpha > 1$.

В заключение отметим, что рассмотренная в работе задача является естественным обобщением хорошо изученной задачи о регулярной прецессии спутника на круговой орбите. Библиография по этой задаче содержится в [6]. Результаты проведенного исследования переходят при $\mu = 0$ в соответствующие результаты работ [9, 10].

Автор благодарит А. П. Маркеева за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости ориентации динамически симметричного спутника в точках либрации.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2, с. 3—8.
2. *Кондударь В. Т., Шинкарик Т. К.* О точках либрации в ограниченной обобщенной задаче трех тел.— Бюл. Ин-та теор. астрон., 1972, т. 13, № 2, с. 102—110.
3. *Шинкарик Т. К.* Об устойчивости точек либрации в ограниченной обобщенной задаче трех тел.— Астрон. ж., 1971, т. 48, № 3, с. 627—637.
4. *Чинь Ван нян.* Об устойчивости стационарных движений спутника в обобщенной ограниченной задаче трех тел. I.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1975, № 3, с. 76—82.
5. *Hitzl D. L., Levinson D. A.* Attitude stability of a spinning symmetric satelite in a planar periodic orbit.— AIAA Paper, 1978, No. 1390. 14 p.
6. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1950, 472 с.
8. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
9. *Черноусько Ф. Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, с. 155—157.
10. *Маркеев А. П.* Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника.— Космич. исследования, 1967, т. 5, вып. 3, с. 365—375.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1982