УДК 531.36

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЗОНАНСНЫХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Хапаев М. М., Шинкин В. Н.

Рассматривается ранее неисследованный случай резонанса четвертого порядка квазилинейных систем с почти-периодическими по времени коэффициентами. В этом случае применение аналитических методов приведения к нормальной форме связано с рядом трудностей. Ниже эта проблема решается путем конструктивного построения возмущенной функции Ляпунова (Четаева) и изучения экстремальных свойств среднего от ее производной [1], содержащего только резонансные члены.

Квазилинейные системы изучались во многих работах, посвященных развитию ряда качественных идей метода приведения к нормальной форме по А. Д. Брюно [2, 3], а также в работах, связанных со вторым обобщенным методом Ляпунова [4, 5]. Квазилинейные системы с почти-периодическими коэффициентами, формально приводимые к автономным, при резонансе нечетного порядка изучались в [6].

Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
&x_j^{\cdot} = \lambda_j y_j + f_{2j}'(t, x, y) + f_{3j}'(t, x, y) + F_{4j}'(t, x, y)\\
&y_j^{\cdot} = -\lambda_j x_j + f_{2j}''(t, x, y) + f_{3j}''(t, x, y) + F_{4j}''(t, x, y)\\
&x = (x_1, \ldots, x_n),\quad y = (y_1, \ldots, y_n),\quad j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
&z = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n),\quad f_2 = (f_{21}', f_{21}'', \ldots, f_{2n}', f_{2n}'')\\
&f_3 = (f_{31}', f_{31}'', \ldots, f_{3n}', f_{3n}''),\quad F_4 = (F_{41}', F_{41}'', \ldots, F_{4n}', F_{4n}'')
\end{aligned}
$$

А) Пусть правые части системы (1) аналитичны по z и являются почти-периодическими функциями времени.

Б) Пусть функции $f_2(t, z)$ и $f_3(t, z)$ — полиномы второй и третьей степени по z соответственно, а функция $F_4(t, z)$ имеет по z порядок выше третьего.

Рассмотрим также систему

$$
x_j^{\cdot} = \lambda_j y_j,\quad y_j^{\cdot} = -\lambda_j x_j,\quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2}
$$

В) Пусть собственные числа линейной части системы (2) $i\lambda_j$ ($i^2 = -1$) чисто мнимые и не связаны резонансными соотношениями до третьего порядка включительно.

Условие В означает, что любая линейная комбинация с целыми коэффициентами чисел $\pm\lambda_j$ не принадлежит частотному спектру коэффициентов исходной системы (1), если сумма модулей всех целых чисел, стоящих множителями при $\pm\lambda_j$, не превышает трех.

Система (2) имеет функцию Ляпунова

$$
V_0(z, t) = \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \frac{(x_j^2 + y_j^2)}{2},\qquad k \leqslant n
$$

Построим возмущенную функцию Ляпунова [1] в виде отрезка ряда по степеням z: $V = V_0 + S$, где возмущение S — однородный полином по z, таким образом, чтобы полная производная от V в силу системы (1) начиналась с членов четного порядка по z.

Обозначим

$$
\Psi(z, t) = \frac{\partial S}{\partial z} f_2 + \frac{\partial V_0}{\partial z} f_3,\qquad H(z, t) = \frac{\partial V_0}{\partial z} f_2
$$

Разложим функцию H в ряд по комплексным переменным $u_j = x_j + iy_j$, $v_j = x_j - iy_j$. Обозначим через $\alpha_{m_1,\ldots,k_n}(t)$ коэффициент этого ряда при члене $u_1^{m_1}v_1^{k_1}\ldots u_n^{m_n}v_n^{k_n}$ (m_i, k_i — натуральные числа).

Положим

$$
\begin{aligned}
&\beta_{m_1\ldots k_n}(t) = \exp\{-i(\lambda_1(m_1 - k_1) + \ldots + \lambda_n(m_n - k_n))t\} \times\\
&\times \left[c_{m_1\ldots k_n} - \int_0^t \alpha_{m_1\ldots k_n}(t) \exp\{i(\lambda_1(m_1 - k_1) + \ldots + \lambda_n(m_n - k_n))t\}\,dt\right]\\
&c_{m_1\ldots k_n} = \mathrm{const}
\end{aligned}
$$

Теперь построим возмущение S в виде ряда

$$S(x, y, t) = \sum_{m_1+\ldots+k_n=3} \beta_{m_1\ldots k_n}(t)\,(x_1+iy_1)^{m_1}\ldots(x_n-iy_n)^{k_n}$$

Представим общее решение системы (2) в виде $x_j = r_j\cos(\lambda_j t + \theta_j)$, $y_j = r_j\sin(\lambda_j t + \theta_j)$. Отсюда соответственно $u_j = r_j\exp\{i(\lambda_j t + \theta_j)\}$, $v_j = r_j\exp\{-i(\lambda_j t + \theta_j)\}$. Вычислим среднее Ψ вдоль решения системы (2)

$$\overline{\Psi}(r, \theta) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \Psi(z(r, \theta, t), t)\,dt$$

В силу построения Ψ — почти-периодическая функция времени, поэтому среднее $\overline{\Psi}$ всегда существует. Удобно вычислить среднее в комплексных переменных, в которых функция Ψ принимает вид

$$\Psi(u, v, t) = \sum_Q\sum_m \Psi_{Qm}\,r^Q\exp\{i((Q\Lambda)t + \Omega_m t + (Q\theta))\}$$

$$\Psi_{Qm}\in C,\quad \Lambda = (\lambda_1, -\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_n),$$

$$\theta = (\theta_1, -\theta_1, \ldots, \theta_n, -\theta_n)$$

$$\Omega_m\in R,\quad m\in Z,\quad Q = (q_1, \ldots, q_{2n})\in Z^{2n},$$

$$r^Q = r_1^{q_1+q_2}\ldots r_n^{q_{2n-1}+q_{2n}}$$

Будем говорить, что в системе (1) наблюдается внутренний резонанс порядка $|Q|$, если $(Q\Lambda) + \Omega_m = 0$. Внутренний резонанс называется тождественным, если $(Q\Lambda)\equiv 0$.

Вычисляя среднее $\overline{\Psi}$, получаем, что оно содержит только резонансные члены функции Ψ

$$\overline{\Psi}(r, \theta) = \sum_Q\sum_m \Psi_{Qm}r^Q\exp\{i(Q\theta)\};\quad (Q\Lambda) + \Omega_m = 0$$

Г) Пусть среднее $\overline{\Psi}(r, \theta)$ — определенно-отрицательная функция по $r_1, \ldots, r_k$ $(k\leqslant n)$.

Сформулируем теоремы об исследовании на асимптотическую устойчивость и неустойчивость при тождественном резонансе четвертого порядка на основе изучения экстремальных свойств среднего от производной возмущенной функции Ляпунова.

Теорема 1. Пусть выполняются условия А — Г. Тогда положение равновесия системы (1) асимптотически устойчиво по части переменных $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия А — В. Пусть среднее $\overline{\Psi}(r, \theta)$ является определенно-положительной функцией по $r_1, \ldots, r_k$ $(k\leqslant n)$. Тогда положение равновесия системы (1) неустойчиво по части переменных $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$.

Доказательства теорем 1, 2 аналогичны соответствующим доказательствам в работе [7].

Сформулируем теперь теорему типа Четаева, которая применима при исследовании на неустойчивость при внутреннем резонансе четвертого порядка. Наличие нетождественных резонансов четвертого порядка между частотами линейной системы (2) может привести к знакопеременности по r квадратичной формы среднего $\overline{\Psi}(r, \theta)$ В этом случае возьмем в качестве V_0 знакопеременный однородный по x, y интеграл системы (2). Для этого рассмотрим знакопеременную по r однородную функцию

$$V_0(r, \theta) = \sum_Q\sum_m G_{Qm}r^Q\exp\{i(Q\theta)\},\quad G_{Qm}\in C,\quad (Q\Lambda) + \Omega_m = 0 \tag{3}$$

В качестве $V_0(r, \theta)$ можно взять, например, среднее $\overline{\Psi}(r, \theta)$. Подставим вместо r, θ их выражения через x, y. Полученная функция $V_0(x, y, t) = V_0(r, \theta)$ и является искомым знакопеременным интегралом системы (2). Построим возмущенную функцию $V = V_0 + S$ (аналогично тому, как это было сделано выше) таким образом, полная производная от V в силу системы (1) начиналась с членов четного порядка по x, y.

Теорема 3. Пусть выполняются условия А — В. Пусть $V(z, t)$ — определенно-положительная (определенно-отрицательная) функция по переменным $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$ в области $V > 0$ $(V < 0)$. Пусть среднее $\overline{\Psi}(r, \theta)$ от производной возмущенной функции $V = V_0 + S$ (где V_0 определяется (3)) — определенно-положительная (определенно-отрицательная) функция по $r_1, \ldots, r_k$ в области $V(x, y, t) = V(r, \theta, t) > 0$ (в области $V(x, y, t) = V(r, \theta, t) < 0$). Тогда положение равновесия системы (1) неустойчиво по части переменных $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$.

Доказательство теоремы 3 опирается на результаты работы [7], поэтому укажем лишь основные его идеи. Не ограничивая общности, будем считать, что среднее $\overline{\Psi}$ — определенно-положительная[1] функция по $r_1, \ldots, r_k$ в области $V > 0$. Из работы [7] следует, что $\exists \varepsilon_0 > 0$ и $\exists T_0 > 0$: для любого решения $z(t)$, $z(t_0) = z_0$, такого, что $z_0 \in \{V > 0\}$, $|x_1| + |y_1| + \ldots + |x_k| + |y_k| \neq 0$, $|z_0| < \varepsilon_0$, следует, что $V(z(t), t) > V(z_0, t_0) > 0$ при $t > t_0 + T_0$.

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$) и $\forall \delta \leqslant \varepsilon$. Выберем $L > 0$, такое, что множество $\{V(z, t) > L\}$ находится вне $(\varepsilon + \Delta)$-окрестности нуля по переменным $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$ ($\Delta > 0$). Из [7] следует, что $\exists T_1 > T_0$: $V(z(t), t) > L$ при $t > t_0 + T_1$.

В силу почти-периодичности по t функции V существует $T_2 \geqslant T_1$, такое, что множество $\{V(z, t_0 + T_2) \geqslant L\}$ находится вне $(\varepsilon + \Delta/2)$-окрестности нуля по переменным $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$. Отсюда получаем, что $|z(t_0 + T_2)| \geqslant \varepsilon + \Delta/2 > \varepsilon$. Поэтому нулевое решение системы (1) неустойчиво по $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$.

Замечание. При исследовании резонансов третьего порядка в системе (1) в теореме 3 достаточно положить $S \equiv 0$, а функцию $\Psi = H(z, t)$. При исследовании резонансов более высокого порядка, чем четвертый, необходимо аналогично тому, как это было сделано выше, строить функцию Ляпунова по степеням z с учетом соответственно членов четвертого, пятого и т. д. порядков.

Рассмотрим модельные примеры нелинейных систем с почти-периодическими по времени коэффициентами и голоморфной правой частью в окрестности нулевого положения равновесия.

Пример 1 иллюстрирует теорему 1 об асимптотической устойчивости в случае тождественного резонанса

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & x_1^{\cdot} = \lambda_1 y_1 - x_1 y_1 3\sin t + 2y_1 y_2 (4\sin\sqrt{5}t + 1) - \lambda_1^{-1} x_1^2 \cos t - \\
& -x_1^3 (2 + 3\cos\sqrt{2}t) + x_1 x_2^2 (\sin\sqrt{3}t + \cos\sqrt{5}t) + o(|z|^4) \\
& y_1^{\cdot} = -\lambda_1 x_1 - x_2^2 (2\sin\sqrt{2}t + 1) - \lambda_1^{-1} y_1 y_2 4\sqrt{5}\cos\sqrt{5}t + \\
& + y_1 y_2^2 (3 + 7\cos t) + x_1 x_2 y_2 5\cos\sqrt{2}t + o(|z|^4) \\
& x_2^{\cdot} = -\lambda_2 y_2 - y_1^2 (4\sin\sqrt{5}t + 1) - \lambda_2^{-1} 2\sqrt{2} x_1 x_2 \cos\sqrt{2}t - x_1 x_2 y_1 (6 - \\
& -\cos\sqrt{5}t) + o(|z|^4) \\
& y_2^{\cdot} = \lambda_2 x_2 + 2x_1 x_2 (2\sin\sqrt{2}t + 1) - y_1^2 y_2 (5 - 3\cos\sqrt{2}t) - y_2^3 (1 + \\
& + \cos\sqrt{3}t) + o(|z|^4) \\
& z = (x_1, y_1, x_2, y_2)
\end{aligned}
$$

Положим $\lambda_1 = 2\sqrt{6}$, $\lambda_2 = 3\sqrt{6}$. Тогда возмущенная функция Ляпунова имеет достаточно простой вид

$$
\begin{aligned}
V = {} & 0{,}5\lambda_1 (x_1^2 + y_1^2) + 0{,}5\lambda_2 (x_2^2 + y_2^2) + x_1^3 \sin t + \\
& + x_1 x_2^2 (2\sin\sqrt{2}t + 1) + y_1^2 y_2 (4\sin\sqrt{5}t + 1)
\end{aligned}
$$

Среднее $\overline{\Psi}$ от производной возмущенной функции] Ляпунова содержит только члены тождественного резонанса четвертого порядка и является знакоотрицательной биквадратичной функцией по r_i ($r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$, $i = 1, 2$) $\overline{\Psi} = \sqrt{6}(-1{,}5r_1^4 - 2{,}25r_1^2 r_2^2 - 1{,}125r_2^4)$. Следовательно, по теореме 1 нулевое положение равновесия (4) асимптотически устойчиво.

Пример 2 посвящен исследованию на неустойчивость в случае внутреннего резонанса четвертого порядка с помощью теоремы 3 типа Четаева

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad & x_1^{\cdot} = \lambda_1 y_1 + (\sin t + \sqrt{5}\cos\sqrt{5}t) x_2^2 - \frac{5}{8}\lambda_2 (\cos t - \sin\sqrt{5}t) x_2 y_2 - \\
& - \frac{3}{8}(\sin t + \sqrt{5}\cos\sqrt{5}t) y_2^2 + 2(2\lambda_1 + \lambda_2)\sin(2\lambda_1 + \lambda_2) t x_1^3 + \\
& + 2\lambda_1 \cos(2\lambda_1 + \lambda_2) t x_1 y_1 + x_2^3 (1 - 5\sin\sqrt{7}t) + o(|z|^4) \\
& y_1^{\cdot} = -\lambda_1 x_1 - \frac{15}{8}\lambda_2 (\cos t - \sin\sqrt{5}t) x_2^2 - \frac{9}{8}(\sin t + \sqrt{5}\cos\sqrt{5}t) x_2 y_2 + \\
& + 2\lambda_1 \sin(2\lambda_1 + \lambda_2) t x_1 y_1 + 2(2\lambda_1 + \lambda_2)\cos(2\lambda_1 + \lambda_2) t y_1^2 - \\
& - y_1 x_2 y_2 (1 + \cos\sqrt{5}t) + x_1 y_2^2 \sin t + o(|z^4) \\
& x_2^{\cdot} = -\lambda_2 y_2 - (2\lambda_1 + \lambda_2)\cos(2\lambda_1 + \lambda_2) t y_1 x_2 - \lambda_2 \sin(2\lambda_1 + \lambda_2) t y_1 y_2 -
\end{aligned}
$$

$$- x_1 y_1^2 (3\cos \sqrt{5} t - 1) + x_1 y_2^2 \sin \sqrt{7} t + o(|z|^4)$$

$$y_2^{\cdot} = \lambda_2 x_2 - \lambda_2 \cos (2\lambda_1 + \lambda_2)\, t x_1 x_2 - (2\lambda_1 + \lambda_2) \sin (2\lambda_1 + \lambda_2)\, t x_1 y_2 -$$

$$- x_1^3 \sin \sqrt{5} t - x_2^3 (\cos t - 3 \sin \sqrt{2} t) + o(|z|^4)$$

$$z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

В системе (5) наблюдается внутренний резонанс четвертого порядка при $\lambda_1 = 3\sqrt{6}$, $\lambda_2 = \sqrt{6}$. В этом случае возмущенная функция Ляпунова имеет вид

$$V = x_1 x_2 (x_2^2 - 3y_2^2) - y_1 y_2 (3x_2^2 - y_2^2) + x_2^5 (\cos t - \sin \sqrt{5} t) -$$

$$- 2 \sin (2\lambda_1 + \lambda_2)\, t y_1^2 y_2^3 + 2\cos (2\lambda_1 + \lambda_2)\, t x_1^2 x_2^3$$

Среднее $\overline{\Psi}$ от произвольной возмущенной функции Ляпунова есть знакопостоянная функция $\overline{\Psi} = 0{,}125 r_2^6$, положительно-определенная в области $\{V > 0\}$. Следовательно, по теореме 3 нулевое положение равновесия системы (5) неустойчиво.

Отметим, что с помощью возмущенной функции может быть исследована неустойчивость лагранжевых точек либрации круговой ограниченной задачи трех тел при резонансах третьего и четвертого порядков, которая ранее исследовалась с помощью методов приведения к нормальной форме по А. Д. Брюно [8].

В случае резонанса третьего порядка

$$V = V_0 + S,\ V_0 = x_1 (x_2^2 - y_2^2) - 2y_1 x_2 y_2,\ S \equiv 0$$

В случае резонанса четвертого порядка

$$V_0 = x_1 x_2 (x_2^2 - 3y_2^2) - y_1 y_2 (3x_2^3 - y_2^2)$$

а S однозначно определяется по формулам выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хапаев М. М.* Обобщение второго метода Ляпунова.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 11, с. 2020—2028.
2. *Куницин А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979, т. 4, с. 58—139.
3. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1971, т. 25, с. 119—262.
4. *Хапаев М. М., Анашкин О. В.* Об исследовании на устойчивость в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1028—1031.
5. *Хапаев М. М., Анашкин О. В.* Об устойчивости в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 7, с. 1216—1224.
6. *Гольцер Я. М.* Нормальная форма и устойчивость одного класса почти-периодических систем при резонансе.— Изв. АН КазССР, Сер. физ.-матем., 1976, № 5, с. 58—63.
7. *Шинкин В. Н.* Об одном способе исследования на устойчивость вторым обобщенным методом Ляпунова с помощью численного счета.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 1980, № 1, с. 36—43.
8. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.VI.1982

УДК 531.55 : 521.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ТОЧКЕ ЛИБРАЦИИ

Рузанова В. Н.

Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела относительно его центра масс, помещенного в треугольную точку либрации L_4 круговой ограниченной задачи трех тел. Предполагается, что движение основных тел M_1 и M_2 конечных масс m_1 и m_2 и движение центра масс O твердого тела описывается уравнениями плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Размеры твердого тела считаются малыми по сравнению с расстоянием от его центра масс до M_1 и M_2, что позволяет пре-