Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 531.31

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ В ОКРЕСТНОСТИ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Булатович Р. М.

Доказывается, что если в положении равновесия аналитическая потенциальная энергия имеет локальный максимум и невырождена, то существует аналитическое решение уравнения Гамильтона — Якоби на нулевом уровне полной энергии. В бесконечно дифференцируемом случае существование гладкого решения доказано ранее [1] при помощи анализа движений, асимптотических к положению равновесия. В отличие от [1] в публикуемой работе используется прямой метод разложения решений уравнения Гамильтона — Якоби в степенные ряды.

Рассмотрим натуральную механическую систему с n степенями свободы (x — ее обобщенные координаты, y — обобщенные импульсы). Дифференциальные уравнения движения возьмем в форме канонических уравнений

$$x^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

с аналитическим гамильтонианом

$$H = K(x, y) + \Pi(x), \quad K = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, y_i y_j$$

где $K(x, y)$ — кинетическая, а $\Pi(x)$ — потенциальная энергия системы. Изолированные положения равновесия — это изолированные критические точки функции $\Pi(x)$. Не уменьшая общности, допустим, что $x = 0$ — критическая точка функции $\Pi(x)$ и $\Pi(0) = 0$. Предположим, что $\Pi(x)$ в точке $x = 0$ имеет локальный максимум.

Гамильтониан имеет смысл полной энергии и $H(x, y) = h = \mathrm{const}$ — первый интеграл дифференциальных уравнений движения. Канонические уравнения можно заменить одним дифференциальным уравнением в частных производных Гамильтона — Якоби

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j} + \Pi(x) = h \tag{1}$$

где h — постоянная полной энергии. Далее рассмотрим существование аналитического решения уравнения (1) в окрестности точки $x = 0$ при $h = 0$.

С помощью подходящего линейного преобразования можно добиться того, что в новых переменных (которые снова будем обозначать x, y) кинетическая и потенциальная энергии приняли вид

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x)\, y_i y_j, \quad A^{ij}(0) = 0$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \overline{\Pi}(x); \quad d^2\overline{\Pi}(x)\,|_{x=0} = 0$$

Учитывая аналитичность функций $\Pi(x)$ и $A^{ij}(x)$, запишем уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{ij}(x)\right)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j} + \sum_{k=2}^{\infty}\Pi_k(x) = 0 \tag{2}$$

$$A_k^{ij}(x) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} a^{ij}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$\Pi_k(x) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} p_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

Ищем решение в виде ряда

$$W = W_2 + W_3 + \dots \tag{3}$$

Подставляя его выражение в уравнение (2), получим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W_2}{\partial x_i}\right)^2 = -\Pi_2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2$$

откуда

$$W_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i x_i^2, \qquad \Lambda_i = \pm\sqrt{-\lambda_i}$$

Возьмем $\Lambda_i = \sqrt{-\lambda_i}$. Коэффициенты формы

$$W_k = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} a_{\alpha_1\dots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \qquad (k=3, 4, \dots,)$$

определяются из рекуррентного соотношения

$$\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i x_i \frac{\partial W_k}{\partial x_i} = -\Pi_k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=3}^{k-1}\frac{\partial W_l}{\partial x_i}\frac{\partial W_{k+2-l}}{\partial x_i} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{m=1}^{k-2}A_m^{ij}\sum_{l=2}^{k-m}\frac{\partial W_l}{\partial x_i}\frac{\partial W_{k+2-m-l}}{\partial x_j}$$

которое можно записать в виде

$$\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k}(\alpha_1\Lambda_1+\dots+\alpha_n\Lambda_n)\,a_{\alpha_1\dots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} c_{\alpha_1\dots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$$

где коэффициенты k-й формы $c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ определенным образом зависят от коэффициентов форм Π_l ($l = 2, 3, \dots, k$) и A_l^{ij} ($l = 1, \dots, k-2$).

Значения $a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ определяются однозначно, если выражение $\alpha_1\Lambda_1 + \dots + \alpha_n\Lambda_n$ никогда не обращается в нуль при целых неотрицательных α_s, таких, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 3, 4, \dots$. Если $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$), что равносильно невырожденности критической точки $x = 0$ потенциальной энергии, то $\alpha_1\Lambda_1 + \dots + \alpha_n\Lambda_n \neq 0$ при $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 3, 4, \dots$ и имеем формальное решение вида (3). Покажем, что формально написанный степенной ряд

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i x_i^2 + \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=3}^{\infty} a_{\alpha_1\dots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$$

представляет собой аналитическую в начале координат функцию. Сумма этого абсолютно сходящегося в некоторой окрестности начала координат ряда (обозначим ее через $W(x)$) будет искомым решением.

Замечание. Возьмем уравнение

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k^{ij}(x)\right)\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j} + \tag{4}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^{k-2}\Pi_k(x) = 0$$

Если существует аналитическое решение (4) при достаточно малом ε в кубе $G = \{|x_i| \leqslant 1,\ i = 1, \dots, n\}$ (оно будет иметь вид $W_2 + \varepsilon W_3 + \varepsilon^2 W_4 + \dots$), то $W = W_2 + W_2 + \dots$ будет аналитическим решением уравнение (1) в некоторой окрестности начала координат $|x_i| \leqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема. Если в положении равновесия потенциальная энергия аналитической системы имеет невырожденный максимум, то в окрестности положения равновесия существует аналитическое решение уравнения (1).

Доказательство. В силу замечания достаточно доказать существование аналитического решения уравнения (4) в кубе G.

Рассмотрим линейное пространство аналитических функций $f: R^n \to R$, которые представляются в кубе G абсолютно сходящимся степенным рядом

$$f(x) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2}^{\infty} a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}, \quad a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \in R$$

В этом пространстве зададим нормы

$$\|f\|_1 = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2}^{\infty} (\alpha_1+\ldots+\alpha_n)\,|a_{\alpha_1\ldots\alpha_n}| < \infty,$$

$$\|f\|_2 = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2}^{\infty} |a_{\alpha_1\ldots\alpha_n}| < \infty$$

Условия определения нормы здесь выполнены. Пространство с нормой $\|\cdot\|_1$ обозначим A, а пространство с нормой $\|\cdot\|_2$ — B. Нетрудно показать, что пространства A и B банаховы. Очевидно неравенство

$$\|f_1 f_2\|_2 \leqslant \|f_1\|_2 \|f_2\|_2, \quad f_1, f_2 \in B$$

которое неоднократно будет использоваться.

Запишем уравнение (4) как $F(W, \varepsilon) = 0$. Возьмем окрестность V точки $(W_2, 0) \in A \times R$

$$V = \{(W, \varepsilon) : \|W - W_2\|_1 < a, \ |\varepsilon| < b\}; \qquad W_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i x_i^2$$

и рассмотрим F как отображение окрестности V в B. Покажем, что F удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции в банаховом пространстве [2].

Действительно

1) $\quad F(W_2, 0) = 0,$

2) $\quad \|F(W, \varepsilon) - F(W_2, 0)\|_2 \leqslant n a_1 \|W - W_2\|_1 + (n^2 a_2^2 a_3 + a_4)\,|\varepsilon| < \eta$

при $\|W - W_2\|_1 < \delta$ и $|\varepsilon| < \delta$.

Здесь

$$\delta = \min\left\{\frac{\eta}{n a_1}, \frac{\eta}{n^2 n_2^2 a_3 + a_4}\right\}, \quad a_1 = a + 2\|W_2\|_1, \quad a_2 = a + \|W_2\|_1$$

$$a_3 = \max_{i,j} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=1}^{\infty} b^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-1} |a^{ij}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}|, \quad a_4 = 2\left\|\sum_{k=3}^{\infty} b^{k-3}\Pi_k\right\|_2$$

что доказывает непрерывность отображения F в точке $(W_2, 0)$

3) Можно показать, что в окрестности V существует производная $F'_W(W, \varepsilon)$ и

$$\|F'_W(W, \varepsilon) - F'_W(W_2, 0)\| = \sup_{h \in A} \frac{\|F'_W(W, \varepsilon)h - F'_W(W_2, 0)h\|_2}{\|h\|_1} \leqslant n\|W - W_2\|_1 + n^2 a_2 a_3 |\varepsilon| < \eta$$

когда

$$\|W - W_2\|_1 < \delta, \ |\varepsilon| < \delta; \ \delta = \min\left\{\frac{\eta}{2n}, \frac{\eta}{2n^2 a_2 a_3}\right\}$$

Таким образом, производная $F_W'(W, \varepsilon)$ непрерывна в точке $(W_2, 0)$. Поскольку $\det(\partial^2\Pi/\partial x_i \partial x_j)_{x=0} \neq 0$, то уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = v, \quad v = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2}^{\infty} b_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} \in B$$

имеет однозначное решение

$$u = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2}^{\infty} \frac{b_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\alpha_1\Lambda_1 + \ldots + \alpha_n\Lambda_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

$$\|u\|_1 \leqslant c\|v\|_2, \quad c = \frac{1}{\min_i \Lambda_i}$$

т. е.

$$\| [F'_W (W_2, 0)]^{-1} v \|_1 \leqslant c \| v \|_2$$

Значит, оператор

$$F'_W (W_2, 0) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

имеет ограниченный обратный.

Таким образом, в силу теоремы о неявной функции в пространстве A существует решение уравнения (4) $W = W(\varepsilon)$ при достаточно малом ε. Теорема доказана.

Приведем пример существования неаналитического решения, если не выполнено условие теоремы. Пусть

$$2\Pi (x_1, x_2) = -(A x_1^4 + B x_1^2 x_2^2 + C x_2^4), \quad A, B, C > 0$$

Очевидно, что $x_1 = x_2 = 0$ — точка локального вырожденного максимума функции П. Уравнение (2) принимает вид

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 = A x_1^4 + B x_1^2 x_2^2 + C x_2^4 \tag{5}$$

Можно показать, что когда коэффициенты A, B, C удовлетворяют условиям

$$B \neq 0, \ 4A \pm 2\sqrt{AC} \neq B, \quad 4C \pm 2\sqrt{AC} \neq B \tag{6}$$

и либо $A \neq C$, либо $A = C \neq B/2$, то не существует аналитического решения уравнения (5).

Переходя к полярным координатам $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, преобразуем уравнение (5)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = r^4 \Phi (\varphi)$$

$$\Phi (\varphi) = A \cos^4 \varphi + B \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C \sin^4 \varphi$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $W = r^3 f(\varphi)$. Тогда функция $f(\varphi)$ будет удовлетворять уравнению

$$f'^2 + 9f^2 = \Phi (\varphi) \tag{7}$$

Если

$$4 (A + C) \pm 10\sqrt{AC} = 9B \tag{8}$$

то уравнение (7) имеет решение

$$f (\varphi) = a_1 \cos^2 \varphi + a_2 \cos \varphi \sin \varphi + a_3 \sin^2 \varphi$$

Очевидно, что коэффициенты A, B, C можно выбрать так, чтобы одновременно были выполнены условия (6) и (8). При этом в исходных координатах x_1, x_2

$$W = \frac{1}{3} (\sqrt{A}\, x_1^2 + \sqrt{C}\, x_2^2) \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Эта функция, конечно, неаналитична, однако принадлежит классу C^2.

Отметим, что частные решения $W(x)$ уравнения Гамильтона — Якоби (1) определяют инвариантные многообразия $y = \pm \partial W / \partial x$. В предположениях теоремы они сплошь заполнены траекториями, асимптотически приближающимися к положению равновесия при $t \to \pm \infty$ [1].

Автор благодарен В. В. Козлову, под руководством которого была выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики.— Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1980, № 4, с. 84—89.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.

Титоград

Поступила в редакцию
11.II.1982