

УДК 531.384

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ

Паскаль М.

Делается попытка теоретического объяснения явления преобразования трансверсальных колебаний кельтского камня во вращение. Уравнения движения рассматриваются в окрестности устойчивого положения равновесия, и в них удерживаются только линейные и квадратичные члены по отношению к начальным возмущениям, которые предполагаются малыми. Для интегрирования получаемой таким образом системы используется метод усреднения. В качестве иллюстрации рассматривается конкретная модель, численные значения параметров которой приведены в [1].

Кельтский камень, или тело Магнуса, — это волчок с несимметричным распределением массы, такой, что устойчивость его вращения вокруг вертикали зависит от направления вращения. Утверждается также, что если такое твердое тело приведено в неустойчивое вращение, то через короткий промежуток времени вращение прекратится, затем тело будет совершать колебания вокруг горизонтальной оси и после этого придет во вращение в противоположном направлении; в некоторых случаях это явление может происходить много раз.

Пусть волчок движется по неподвижной горизонтальной плоскости так, что скорость скольжения точки контакта тела с плоскостью равна нулю. Следовательно, на движение волчка наложена неголономная связь. Изучение этой задачи было начато Уолкером [2] и Магнусом [3, 4]. Первое систематическое исследование устойчивости вращений, выполненное В. В. Румянцевым [5], а затем дополненное в работах [6—8], позволило, в частности, объяснить зависимость устойчивости вращений тела от направления вращения. Однако пока не дано теоретического объяснения явлению изменения направления вращения. Это явление наблюдалось Уолкером [9], изготовившим различные модели кельтского камня. Другой опыт состоял в том, что в результате удара по верхней части неподвижного в начальный момент времени волчка ему сообщались колебания вокруг горизонтальной оси. Оказалось, что эти колебания быстро затухают и преобразуются во вращение вокруг вертикали, а направление вращения зависит от положения точки, в которую нанесен удар. Для объяснения этих явлений была построена [10] математическая модель, хотя и обладавшая свойствами кельтского камня, однако, по мнению самого автора, не связанная с какой-либо реальной физической моделью. В другом численном исследовании уравнений движения для одной модели кельтского камня были очень четко обнаружены [1] все явления, описанные в [9].

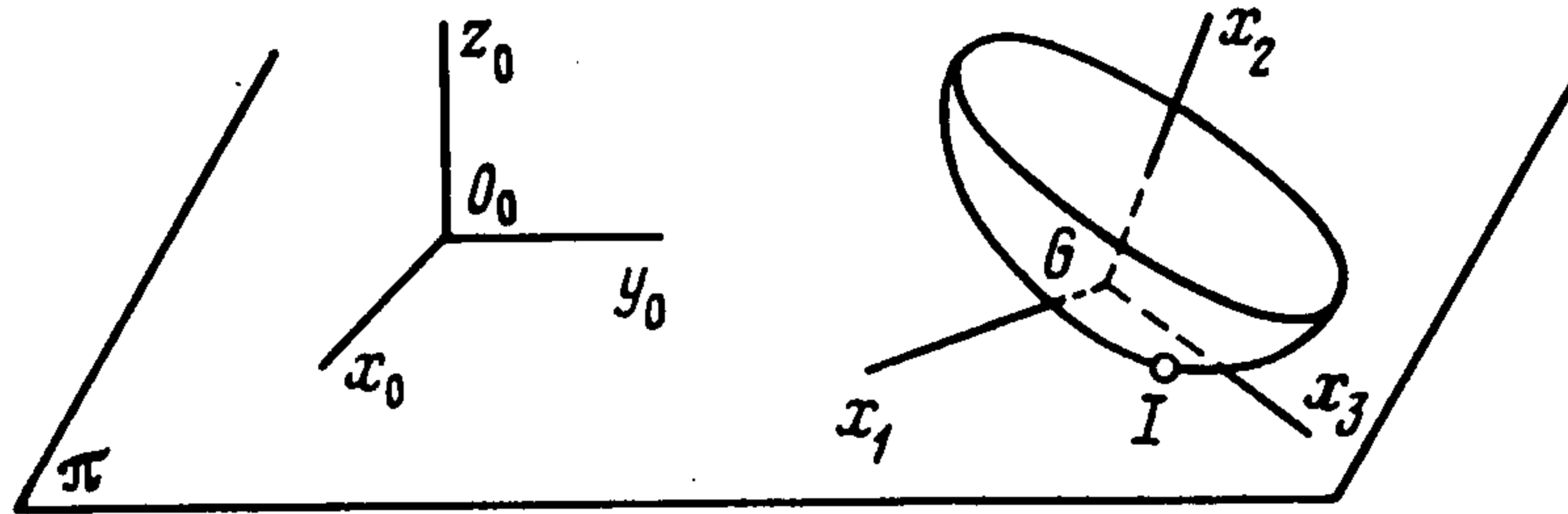
1. Уравнения движения [6]. Кельтский камень  $S$  движется без скольжения по горизонтальной плоскости  $\pi$  (фиг. 1). Положение тела  $S$  массы  $m$  определяется координатами  $x_0, y_0$  на горизонтальной плоскости его центра инерции  $G$  по отношению к неподвижному трехграннику  $O_0x_0y_0z_0$  (плоскость  $x_0O_0y_0$  совпадает с плоскостью  $\pi$ ) и углами Эйлера  $\theta, \psi, \varphi$ , определяющими ориентацию системы координат  $Gx_1x_2x_3$ , оси которой направлены по главным центральным осям инерции тела  $S$ , относительно неподвижного трехгранника.

Лагранжиан системы и условия качения без проскальзывания имеют вид [6]

$$L = \frac{m}{2} \{x_0 \dot{\ }^2 + y_0 \dot{\ }^2 + [\gamma_2 \dot{\varphi} \sin \theta + \dot{\theta} (\gamma_1 \cos \theta - \zeta \sin \theta)]^2\} + \\ + \frac{1}{2} [A (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi)^2 + B (\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi)^2 + \\ + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2]$$

$$\begin{aligned}
x_0 \dot{\phantom{x}} &= \alpha_1 \dot{\theta} + \alpha_2 \dot{\varphi} + \alpha_3 \dot{\psi}, & y_0 \dot{\phantom{x}} &= \beta_1 \dot{\theta} + \beta_2 \dot{\varphi} + \beta_3 \dot{\psi} \\
\alpha_1 &= -\sin \psi (\gamma_1 \sin \theta + \zeta \cos \theta), & \gamma_1 &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \\
\alpha_2 &= \gamma_1 \cos \psi + \gamma_2 \cos \theta \sin \psi, & \gamma_2 &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\
\alpha_3 &= (\gamma_1 \cos \theta - \zeta \sin \theta) \cos \psi + \gamma_2 \sin \psi, & \beta_i &= -\partial \alpha_i / \partial \psi \\
&& (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

Здесь  $A, B, C$  — главные моменты инерции тела  $S$ ,  $\xi, \eta, \zeta$  — координаты точки  $I$  контакта тела  $S$  с плоскостью  $\pi$  в системе координат  $Gx_1x_2x_3$ ,



Фиг. 1

которые являются функциями  $\theta$  и  $\varphi$ , определяемыми уравнениями

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{\Delta} \left( Q \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\cos \varphi} - R \operatorname{tg} \varphi \right), & \zeta &= \frac{1}{\Delta} \left( Q \operatorname{tg} \varphi - P \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\cos \varphi} \right) \\
\eta &= -a + \frac{1}{2} (P\xi^2 + 2Q\xi\zeta + R\zeta^2)
\end{aligned}$$

где  $a$  — расстояние между точками  $G$  и  $I$ ,  $P, Q, R$  и  $\Delta$  — постоянные, связанные с главными радиусами кривизны  $\rho_1, \rho_2$  внешней поверхности тела  $S$  в точке  $I$  соотношениями

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_2}, & Q &= \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\
R &= \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_2}, & \Delta &= \frac{1}{\rho_1 \rho_2}
\end{aligned}$$

Углом  $\alpha$  определяется положение главных осей кривизны в точке  $I$  относительно осей  $Gx_1, Gx_3$ . Далее предполагаем, что  $\rho_2 > \rho_1$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $A > C$ .

Рассматриваемая система консервативна и представляет собой негोलонномную систему Чаплыгина. Уравнения движения ввиду их громоздкости здесь не приводятся (см., например, [7]).

В [6] доказано существование семейства частных решений

$$(1.1) \quad \theta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\psi} = \omega$$

где  $\omega$  — произвольная постоянная. Эти решения соответствуют равномерному вращению тела  $S$  вокруг вертикальной оси  $Gx_2$ .

**2. Устойчивость вращения.** Для исследования устойчивости движений (1.1) введем три переменные:  $u = \theta - \pi/2$ ,  $v = \varphi$ ,  $x = \dot{\psi} - \omega$ .

Уравнения возмущенных движений записываются в виде

$$\begin{aligned}
(2.1) \quad \bar{A}u'' + K_{11}u + K_{12}v - \omega\lambda_1 u' - \omega\lambda_2 v' + U &= 0 \\
\bar{C}v'' + K_{12}u + K_{22}v + \omega\lambda_1 v' - \omega\mu_1 u' + V &= 0, & Bx'' + W &= 0 \\
\bar{A} &= A + ma^2, & \bar{C} &= C + ma^2, & K_{11} &= \omega^2 \left( B - \bar{C} + ma \frac{P}{\Delta} \right) + \\
&& & & & + mg \left( \frac{P}{\Delta} - a \right) \\
K_{12} &= \frac{mQ}{\Delta} (g + a\omega^2), & K_{22} &= \omega^2 \left( B - \bar{A} + ma \frac{R}{\Delta} \right) + mg \left( \frac{R}{\Delta} - a \right) \\
\lambda_1 &= ma \frac{Q}{\Delta}, & \lambda_2 &= B - \bar{A} - \bar{C} + ma \frac{R}{\Delta} \\
\mu_1 &= \bar{A} + \bar{C} - B - ma \frac{P}{\Delta}
\end{aligned}$$

Здесь  $U, V, W$  — функции от  $u^*, v^*, u, v, x^*$ , разложения которых не содержат линейных членов относительно указанных переменных.

Характеристическое уравнение линейной системы, получаемой из (2.1), имеет двойной нулевой корень. Другие корни определяются из уравнения

$$\begin{aligned} D(s) &\equiv a_0 s^4 + a_1 \omega s^3 + a_2 s^2 + a_1 \omega^3 s + a_3 = 0 \\ a_0 &= \bar{A}\bar{C}, \quad a_1 = \lambda_1 (\bar{A} - \bar{C}), \quad a_2 = \bar{A}K_{22} + \bar{C}K_{11} - \omega^2 (\lambda_1^2 + \\ &+ \lambda_2 \mu_1) \\ a_3 &= K_{11}K_{22} - K_{12}^2 \end{aligned}$$

Было показано [11], что здесь имеет место частный случай теоремы И. Г. Малкина [12]. Отсюда следуют достаточные условия устойчивости

$$(2.2) \quad a_1 \omega > 0, \quad a_3 > 0, \quad -a_0 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_3 > 0$$

Если одно из этих неравенств не выполняется, то по крайней мере один из корней  $D(s) = 0$  имеет положительную или равную нулю вещественную часть. С другой стороны,  $s = i\rho$  ( $\rho$  — вещественное) может быть корнем уравнения  $D(s) = 0$  только при

$$(2.3) \quad \rho = \omega, \quad -a_0 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_3 = 0$$

При выполнении условия (2.3)  $D(s)$  записывается в виде

$$D(s) \equiv (s^2 + \omega^2) D_1(s), \quad D_1(s) \equiv a_0 s^2 + \omega a_1 s + a_2 - a_0 \omega^2$$

Уравнение  $D_1(s) = 0$  не имеет чисто мнимых корней, если величина  $a_1 \omega$  отлична от нуля. Отсюда заключаем, что при выполнении хотя бы одного из неравенств

$$a_1 \omega < 0, \quad a_3 < 0, \quad -a_0 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_3 < 0$$

имеет место неустойчивость.

Для интерпретации условий (2.2) предварительно исследуем частный случай равновесия ( $\omega = 0$ ). В этом случае имеем биквадратное уравнение

$$\begin{aligned} D(s) &\equiv a_0 s^4 + a_2^0 s^2 + a_3^0 = 0 \\ a_2^0 &= mg [\bar{A} (\rho_1 \cos^2 \alpha + \rho_2 \sin^2 \alpha - a) + \bar{C} (\rho_1 \sin^2 \alpha + \\ &+ \rho_2 \cos^2 \alpha - a)] \\ a_3^0 &= m^2 g^2 (\rho_1 - a) (\rho_2 - a) \end{aligned}$$

Отсюда получаем необходимые условия устойчивости равновесия

$$a_2^0 > 0, \quad a_2^{02} - 4a_0 a_3^0 > 0, \quad a_3^0 > 0$$

В частности, условие

$$(2.4) \quad (\rho_1 - a) (\rho_2 - a) > 0$$

является необходимым условием равновесия.

Можно показать [5], что в случае равновесия интеграл энергии позволяет построить функцию Ляпунова.

Получены следующие достаточные условия равновесия:

$$\rho_1 \sin^2 \alpha + \rho_2 \cos^2 \alpha - a > 0, \quad (\rho_1 - a) (\rho_2 - a) > 0$$

Из сопоставления этих условий с (2.4) следует, что если

$$(2.5) \quad a < \rho_1 < \rho_2$$

то равновесие устойчиво; если  $a > \rho_1$ , равновесие неустойчиво. Далее предполагаем, что условие (2.5) выполняется.

Рассмотрим теперь общий случай  $\omega \neq 0$ . Условия (2.2) записываются в виде

$$(2.6) \quad (\rho_2 - \rho_1) (\bar{A} - \bar{C}) \omega \sin 2\alpha > 0$$

$$(2.7) \quad l_1 \omega^4 + l_2 \omega^2 + a_3^\circ > 0, \quad l_3 \omega^2 - \frac{a_3^\circ}{mg} > 0$$

$$l_1 = (B - \bar{A})(B - \bar{C}) + \frac{ma}{2} [(\rho_1 + \rho_2)(2B - \bar{A} - \bar{C}) + (\rho_2 - \rho_1)(\bar{A} - \bar{C}) \cos 2\alpha] + m^2 a^2 \rho_1 \rho_2$$

$$l_2 = \frac{ma}{2} [(\rho_1 + \rho_2 - 2a)(2B - \bar{A} - \bar{C}) + (\rho_2 - \rho_1)(\bar{C} - \bar{A}) + 4(\rho_1 \rho_2 - a^2)]$$

$$l_3 = (\bar{A} + \bar{C} - B)(\rho_1 + \rho_2 - 2a) + ma(a\rho_1 + a\rho_2 - 2\rho_1 \rho_2)$$

Неравенство (2.6) приводится к условию  $\omega > 0$ ; следовательно, устойчивость зависит от направления вращения тела. Если же  $\omega < 0$ , то имеет место неустойчивость; если  $\omega > 0$ , то устойчивость имеет место, когда  $\omega^2$  удовлетворяет неравенствам (2.7).

Пусть выполняется условие (2.5) и величина  $a_3^\circ$  положительна. Тогда второе неравенство (2.7) выполняется только при удовлетворении следующих двух условий:

$$l_3 > 0, \quad \omega^2 > \frac{a_3^\circ}{mgl_3}$$

Первое неравенство накладывает условие на форму и распределение массы тела  $S$  и записывается в виде

$$(2.8) \quad \bar{A} + \bar{C} - B > ma \frac{2\rho_1 \rho_2 - a\rho_1 - a\rho_2}{\rho_1 + \rho_2 - 2a}$$

Второе неравенство накладывает условие на угловую скорость вращения тела  $S$ : она должна превосходить критическое значение  $\omega_0$ , определяемое равенством

$$\omega_0^2 = \frac{mg(\rho_1 - a)(\rho_2 - a)}{(\bar{A} + \bar{C} - B)(\rho_1 + \rho_2 - 2a) + ma(a\rho_1 + a\rho_2 - 2\rho_1 \rho_2)}$$

Из проведенного анализа следует, что устойчивость вращения тела  $S$  зависит от направления вращения. Существуют частные модели кельтского камня, для которых имеет место неустойчивость при любых направлениях вращения и угловых скоростях; это модели, для которых не выполняется условие (2.8). Для других моделей, таких, что неравенство (2.8) выполняется, имеет место неустойчивость при любом направлении вращения, если величина угловой скорости не очень велика.

Труднее дать интерпретацию первого неравенства (2.7) в общем случае, когда главные моменты инерции тела  $S$  произвольны. Однако в большинстве рассматриваемых моделей кельтского камня предполагается, что осью вертикального вращения, совпадающей для некоторого семейства движений с главной осью инерции, служит ось, для которой момент инерции имеет наибольшее значение; поэтому в дальнейшем предполагаем, что  $B > \bar{A} > \bar{C}$ . Тогда величина  $l_1$  всегда положительна. Можно показать, что величина  $l_2$  положительна при  $m\rho_1 \rho_2 > B$ . Это условие выполняется для модели, рассмотренной в [1]; для такого тела первое неравенство (2.7) справедливо при любой скорости вращения.

**3. Колебания вблизи положения равновесия** ( $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \psi = 0$ ).  
Прежде чем исследовать влияние нелинейностей на движение тела  $S$ ,

запишем уравнения возмущенного движения в окрестности равновесия с указанием в явной форме членов второго порядка.

Система (2.1) принимает вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{A}u'' + H_{11}u + H_{12}v - x'(\lambda_1 u' + \lambda_2 v') + U_1 &= 0 \\ \bar{C}v'' + H_{12}u + H_{22}v + x'(-\mu_1 u' + \lambda_1 v') + V_1 &= 0 \\ Bx'' - k_1 u' v' - k_2 u^2 - k_3 uv - k_4 v^2 + W_1 &= 0 \\ H_{11} = mg \left( \frac{P}{\Delta} - a \right), \quad H_{12} = mg \frac{Q}{\Delta}, \quad H_{22} = mg \left( \frac{R}{\Delta} - a \right) \\ k_1 = \bar{C} - \bar{A} + B, \quad k_2 = mg \frac{Q}{\Delta} \left[ -\frac{A}{\bar{A}} + ma \frac{P}{\Delta} \left( \frac{\bar{A} - \bar{C}}{\bar{A}\bar{C}} \right) \right] \\ k_3 = mg \left[ a \frac{B}{\bar{A}} - \frac{RA}{\Delta \bar{A}} + \frac{P}{\Delta} \left( \frac{C}{\bar{C}} - \frac{B}{\bar{A}} \right) + ma \left( \frac{PR + Q^2}{\Delta^2} \right) \left( \frac{\bar{A} - \bar{C}}{\bar{A}\bar{C}} \right) \right] \\ k_4 = mg \frac{Q}{\Delta} \left[ \frac{C}{\bar{C}} - \frac{B}{\bar{A}} + ma \frac{R}{\Delta} \left( \frac{\bar{A} - \bar{C}}{\bar{A}\bar{C}} \right) \right] \end{aligned}$$

Здесь  $U_1, V_1, W_1$  — функции от  $u', v', u, v, x'$ , разложения которых в ряды начинаются с членов не ниже третьего порядка относительно этих переменных.

Пусть в начальный момент времени возмущения  $u_0', v_0', u_0, v_0, x_0'$  малы и имеют порядок  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  — малый параметр). Поскольку неравенства (2.5) выполняются, то равновесие устойчиво; в возмущенном движении  $u', v', u, v, x'$  — малые порядка  $\varepsilon$ .

Используя метод усреднения, будем искать приближенное решение системы (3.1) в виде асимптотического по  $\varepsilon$  разложения.

Следуя методу [10], произведем последовательно замену переменных для приведения системы (3.1) к стандартной форме. Положим

$$(3.2) \quad y = u\sqrt{\bar{A}}, \quad z = v/\sqrt{\bar{C}}$$

Тогда линеаризованная система уравнений, получаемая из (3.1), записывается в виде

$$\begin{aligned} y'' + E_1 y + E_3 z = 0, \quad z'' + E_3 y + E_2 z = 0, \quad Bx'' = 0 \\ E_1 = \frac{H_{11}}{\bar{A}}, \quad E_2 = \frac{H_{22}}{\bar{C}}, \quad E_3 = \frac{H_{12}}{\sqrt{\bar{A}\bar{C}}} \end{aligned}$$

Кроме нулевого корня соответствующее характеристическое уравнение имеет корни, определяемые из биквадратного уравнения

$$D(s) \equiv (s^2 + E_1)(s^2 + E_2) - E_3^2 = 0$$

Исследуемое равновесие устойчиво, поэтому корни  $D(s) = 0$  чисто мнимые:  $\pm ib$  и  $\pm id$  ( $b$  и  $d$  — вещественные и положительные). Будем считать, например, что  $b > d$ .

Введем следующую симметричную матрицу:

$$E = \begin{vmatrix} E_1 & E_3 \\ E_3 & E_2 \end{vmatrix}$$

( $E$  — положительно-определенная) матрица, собственные значения которой  $b^2$  и  $d^2$ ). Пусть  $T(\gamma)$  — матрица вращения, такая, что

$$T(-\gamma)ET(\gamma) = \begin{vmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{vmatrix}, \quad T(\gamma) = \begin{vmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix}$$

Определяя новые переменные  $Y$  и  $Z$  соотношением

$$\begin{vmatrix} Y \\ Z \end{vmatrix} = T(-\gamma) \begin{vmatrix} y \\ z \end{vmatrix}$$

с учетом (3.2) систему (3.1) преобразуем в систему

$$(3.3) \quad Y'' + b^2 Y = x' (N_1 Y' + N_2 Z') + U_2, \quad Z'' + d^2 Z = \\ = x' (N_3 Y' + N_4 Z') + V_2$$

$$Bx'' = h_1 (Y'^2 - Z'^2) + h_2 Y' Z' + K_2 Y^2 + K_3 Y Z + K_4 Z^2 + W_2$$

Величины  $U_2, V_2, W_2$  — функции от  $Y', Z', Y, Z, x'$ , разложения которых в ряды содержат члены не ниже третьего порядка. Постоянные  $N_1, \dots, \dots, K_4$  даются равенствами

$$N_1 = \bar{\lambda}_{1a} \cos^2 \gamma + (\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_1) \sin \gamma \cos \gamma - \bar{\lambda}_{1b} \sin^2 \gamma$$

$$N_2 = \bar{\lambda}_2 \cos^2 \gamma (\bar{\lambda}_{1a} + \bar{\lambda}_{1c}) \sin \gamma \cos \gamma - \bar{\mu}_1 \sin^2 \gamma$$

$$N_3 = -\bar{\lambda}_2 \sin^2 \gamma - (\bar{\lambda}_{1a} + \bar{\lambda}_{1c}) \sin \gamma \cos \gamma + \bar{\mu}_1 \cos^2 \gamma$$

$$N_4 = \bar{\lambda}_{1a} \sin^2 \gamma - (\bar{\lambda}_2 + \bar{\mu}_1) \sin \gamma \cos \gamma - \bar{\lambda}_{1c} \cos^2 \gamma$$

$$h_1 = \bar{k}_1 \sin \gamma \cos \gamma, \quad h_2 = \bar{k}_1 \cos 2\gamma, \quad K_2 = \bar{k}_2 \cos^2 \gamma + \\ + \bar{k}_3 \sin \gamma \cos \gamma + \bar{k}_4 \sin^2 \gamma$$

$$K_3 = (\bar{k}_4 - \bar{k}_2) \sin 2\gamma + \bar{k}_3 \cos 2\gamma, \quad K_4 = \bar{k}_2 \sin^2 \gamma - \\ - \bar{k}_3 \sin \gamma \cos \gamma + \bar{k}_4 \cos^2 \gamma$$

$$\bar{\lambda}_{1a} = \frac{\lambda_1}{A}, \quad \bar{\lambda}_{1c} = \frac{\lambda_1}{C}, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{AC}}, \quad \bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{AC}}$$

$$\bar{k}_1 = \frac{k_1}{\sqrt{AC}}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2}{A}, \quad \bar{k}_3 = \frac{k_3}{\sqrt{AC}}, \quad \bar{k}_4 = \frac{k_4}{C}$$

Переменные  $Y', Z', Y, Z, x'$  — бесконечно малые порядка  $\varepsilon$ , т. е. имеют порядок величины начальных возмущений. Поэтому решение системы (3.3) ищем в виде

$$Y = \varepsilon \bar{Y}, \quad Z = \varepsilon \bar{Z}, \quad x' = \varepsilon \bar{x}'$$

где  $\bar{Y}, \bar{Z}$  и  $\bar{x}'$  определяются из системы

$$\bar{Y}'' + b^2 \bar{Y} = \varepsilon F_1, \quad \bar{Z}'' + d^2 \bar{Z} = \varepsilon F_2, \quad B\bar{x}'' = \varepsilon F_3$$

$$F_1 = \bar{x}' (N_1 \bar{Y}' + N_2 \bar{Z}') + o(\varepsilon), \quad F_2 = \bar{x}' (N_3 \bar{Y}' + N_4 \bar{Z}') + o(\varepsilon)$$

$$F_3 = h_1 (\bar{Y}'^2 - \bar{Z}'^2) + h_2 \bar{Y}' \bar{Z}' + K_2 \bar{Y}^2 + K_3 \bar{Y} \bar{Z} + K_4 \bar{Z}^2 + o(\varepsilon)$$

Вводя новые переменные  $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ , определяемые соотношениями

$$\bar{Y} = A_1 \cos(bt + \theta_1), \quad \bar{Z} = A_2 \cos(dt + \theta_2)$$

$$\bar{Y}' = -A_1 b \sin(bt + \theta_1), \quad \bar{Z}' = -A_2 d \sin(dt + \theta_2)$$

систему (3.3) можно записать в следующем матричном виде:

$$(3.4) \quad X' = \varepsilon f(X, t, \varepsilon)$$

где (индекс  $T$  означает транспонирование)

$$X^T = [A_1, \theta_1, A_2, \theta_2, \bar{x}'], \quad f^T = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$$

$$f_1 = -\frac{1}{b} F_1 \sin(bt + \theta_1), \quad f_2 = -\frac{1}{A_1 b} F_1 \cos(bt + \theta_1)$$

$$f_3 = -\frac{1}{d} F_2 \sin(dt + \theta_2), \quad f_4 = -\frac{1}{A_2 d} F_2 \cos(dt + \theta_2), \quad f_5 = \frac{F_3}{B}$$

Метод усреднения [13] позволяет получить приближенное решение системы (3.3) для малых  $\varepsilon$ . Действительно, функция  $f$  — почти-периодическая по  $t$ . Поэтому можно определить функцию

$$\langle f(x) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} \int_0^t f(x, u, 0) du \right]$$

Решения усредненной системы

$$(3.5) \quad \dot{x} = \varepsilon \langle f(x) \rangle$$

позволяют получить приближенные решения системы (3.4).

Система (3.5) имеет вид

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{\varepsilon}{2} N_1 A_1 \dot{x}, & \dot{\theta}_1 &= 0, & \dot{A}_2 &= \frac{\varepsilon}{2} N_4 A_2 \dot{x}, & \dot{\theta}_2 &= 0 \\ B\dot{x} &= \frac{\varepsilon}{2} [A_1^2 \Delta_1 + A_2^2 \Delta_2], & \Delta_1 &= K_2 + h_1 b^2, & \Delta_2 &= K_4 - h_1 d^2 \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение  $\dot{\psi} = \dot{x} = \varepsilon \dot{x}$ , систему (3.6) можно проинтегрировать; получаем ( $A_1^\circ$ ,  $A_2^\circ$ ,  $\theta_1^\circ$  и  $\theta_2^\circ$  — постоянные)

$$A_1 = A_1^\circ \exp \frac{N_1 \psi}{2}, \quad \theta_1 = \theta_1^\circ, \quad A_2 = A_2^\circ \exp \frac{N_4 \psi}{2}, \quad \theta_2 = \theta_2^\circ$$

Пусть в начальный момент времени  $\psi = 0$ . Зависимость  $\psi$  от времени определяется с точностью до квадратуры из уравнения

$$(3.7) \quad \begin{aligned} B\psi'^2 &= B\psi_0'^2 + \varepsilon^2 \left\{ A_1^{\circ 2} \frac{\Delta_1}{N_1} [\exp(N_1 \psi) - 1] + \right. \\ &\left. + A_2^{\circ 2} \frac{\Delta_2}{N_4} [\exp(N_4 \psi) - 1] \right\} \end{aligned}$$

где  $\psi_0'$  — значение  $\dot{\psi}$  в начальный момент времени. Далее будем считать, что  $\theta_1^\circ = \theta_2^\circ = 0$ . Отсюда получаем приближенное решение системы дифференциальных уравнений (3.4) в форме

$$(3.8) \quad Y = \varepsilon A_1^\circ \left[ \exp \frac{N_1 \psi}{2} \right] \cos bt, \quad Z = \varepsilon A_2^\circ \left[ \exp \frac{N_4 \psi}{2} \right] \cos dt$$

где  $\psi$  определяется из уравнения (3.7).

Уравнениями (3.8) определяются трансверсальные колебания тела  $S$ . Прежде чем анализировать процесс движения тела  $S$ , представим постоянные  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $N_1$ ,  $N_4$  как функции от  $b^2$ ,  $d^2$  и  $\gamma$ . Матричное соотношение

$$E = T(\gamma) \begin{vmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{vmatrix} T(-\gamma)$$

позволяет выразить  $P/\Delta$ ,  $Q/\Delta$  и  $R/\Delta$  через  $b^2$ ,  $d^2$  и  $\gamma$ . Получаем

$$\frac{P}{\Delta} = a + \frac{\bar{A}}{mg} (b^2 \cos^2 \gamma + d^2 \sin^2 \gamma),$$

$$\frac{Q}{\Delta} = \frac{\sqrt{\bar{A}\bar{C}}}{mg} (b^2 - d^2) \sin \gamma \cos \gamma$$

$$\frac{R}{\Delta} = a + \frac{\bar{C}}{mg} (b^2 \sin^2 \gamma + d^2 \cos^2 \gamma)$$

В силу предположения о том, что  $\rho_2 > \rho_1$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $b > d$ , можно выбрать  $0 < \gamma < \pi/2$ . Тогда будем иметь

$$N_1 = \frac{a}{g} \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{\bar{A}\bar{C}}} b^2 (\bar{C} - \bar{A}), \quad \Delta_1 = -b^2 N_1$$

$$N_4 = \frac{a}{g} \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{\bar{A}\bar{C}}} d^2 (\bar{A} - \bar{C}), \quad \Delta_2 = -d^2 N_4$$

Из предположения о том, что  $\bar{A} > \bar{C}$ , следует, что  $N_1 < 0$ , а  $N_4 > 0$ . Уравнение (3.7), служащее для определения  $\psi$ , запишем в виде

$$(3.9) \quad \begin{aligned} B\psi'^2 &= H(\psi), \quad H(\psi) = B\psi_0'^2 + b^2 B_1^2 [1 - \exp(N_1 \psi)] + \\ &+ d^2 B_2^2 [1 - \exp(N_4 \psi)] \end{aligned}$$

Величины  $B_1 = \varepsilon A_1^\circ$  и  $B_2 = \varepsilon A_2^\circ$  характеризуют начальную амплитуду двух форм трансверсальных колебаний тела  $S$ .

Анализ функции  $H(\psi)$  показывает, что она обращается в нуль для двух значений  $\psi_1$  и  $\psi_2$  координаты  $\psi$ , имеющих разные знаки. Поэтому движение по  $\psi$  представляет собой колебательное периодическое движение между двумя значениями  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , для которых угловая скорость вращения  $\dot{\psi}$  тела  $S$  обращается в нуль.

Пусть в начальный момент времени тело  $S$  неподвижно. Сообщим точке контакта  $I$  тела с плоскостью бесконечно малое перемещение. Координаты  $(\xi_0, \zeta_0)$  точки  $I$  по отношению к осям  $Gx_1, Gx_3$  — бесконечно малые порядка  $\varepsilon$ . Сохраняя в системе только члены до второго порядка малости относительно  $\varepsilon$ , получаем из нее значения начальных возмущений  $u_0, v_0$  для  $u, v$ , соответствующие перемещению точки

$$u_0 = Q\xi_0 + R\zeta_0, \quad v_0 = -P\xi_0 - Q\zeta_0$$

Начальные амплитуды двух форм трансверсальных колебаний тела  $S$  определяются через  $u_0$  и  $v_0$  соотношениями

$$B_1 = \sqrt{\bar{A}}u_0 \cos \gamma + \sqrt{\bar{C}}v_0 \sin \gamma, \quad B_2 = -\sqrt{\bar{A}}u_0 \sin \gamma + \sqrt{\bar{C}}v_0 \cos \gamma$$

Соотношение

$$B\psi_0'' = \frac{a}{2g} \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{\bar{A}\bar{C}}} (\bar{A} - \bar{C}) \chi, \quad \chi = b^4 B_1^2 - d^4 B_2^2$$

показывает, что если  $\chi > 0$ , то в начале движения  $\dot{\psi}$  и  $\psi$  положительны, трансверсальные колебания по  $Y$  затухают, тело вращается в положительном направлении. Наоборот, если  $\chi < 0$ , то  $\dot{\psi}$  и  $\psi$  отрицательны, трансверсальные колебания по  $Z$  затухают, тело вращается в отрицательном направлении.

**4. Приложение к частной модели кельтского камня.** Проведенное исследование применим к модели кельтского камня, использованной в [1] при следующих численных значениях параметров:  $m = 0,15$  кг,  $A = 4,5 \cdot 10^{-4}$  кг·м<sup>2</sup>,  $B = 6 \cdot 10^{-4}$  кг·м<sup>2</sup>,  $C = 2 \cdot 10^{-4}$  кг·м<sup>2</sup>,  $a = 0,01$  м,  $\rho_1 = 0,025$  м,  $\rho_2 = 0,5$  м. Угол  $\alpha$  может изменяться от 0 до  $\pi/2$ , величина  $\omega$  произвольна. Неравенства (2.5) выполняются; положение равновесия (1.1) устойчиво. Так как неравенство (2.8) и первое неравенство (2.7) выполняются, то устойчивость движений (1.1) гарантируется для  $\omega > \omega_0 \simeq 32$  рад/с. Если  $\omega < \omega_0$ , то имеет место неустойчивость.

Анализ, проведенный в п. 3, показал, что направление вращения, возникающего после сообщения бесконечно малого перемещения точке контакта, зависит от знака  $\chi$ . Если перемещение точки контакта происходит в результате удара по верхней части волчка, то можно показать, что направление возникающего при этом вращения зависит от положения точки, в которую нанесен удар. Неравенство  $\chi > 0$ , выражающее условие того, что тело  $S$  вращается в положительном направлении, можно записать в виде

$$(4.1) \quad [b_1 - kb_2 + (c_1 - kc_2) \operatorname{ctg} \Phi][b_1 + kb_2 + (c_1 + kc_2) \operatorname{ctg} \Phi] > 0$$

$$b_1 = \sqrt{\bar{A}}Q \cos \gamma - \sqrt{\bar{C}}P \sin \gamma, \quad c_1 = \sqrt{\bar{A}}R \cos \gamma - \sqrt{\bar{C}}Q \sin \gamma$$

$$b_2 = -\sqrt{\bar{A}}Q \sin \gamma - \sqrt{\bar{C}}P \cos \gamma, \quad c_2 = -\sqrt{\bar{A}}R \sin \gamma - \sqrt{\bar{C}}Q \cos \gamma$$

$$k = d^2/b^2$$

Угол  $\Phi$  определяет начальное положение точки контакта  $I$  тела с плоскостью относительно осей  $Gx_1$  и  $Gx_3$  посредством соотношений

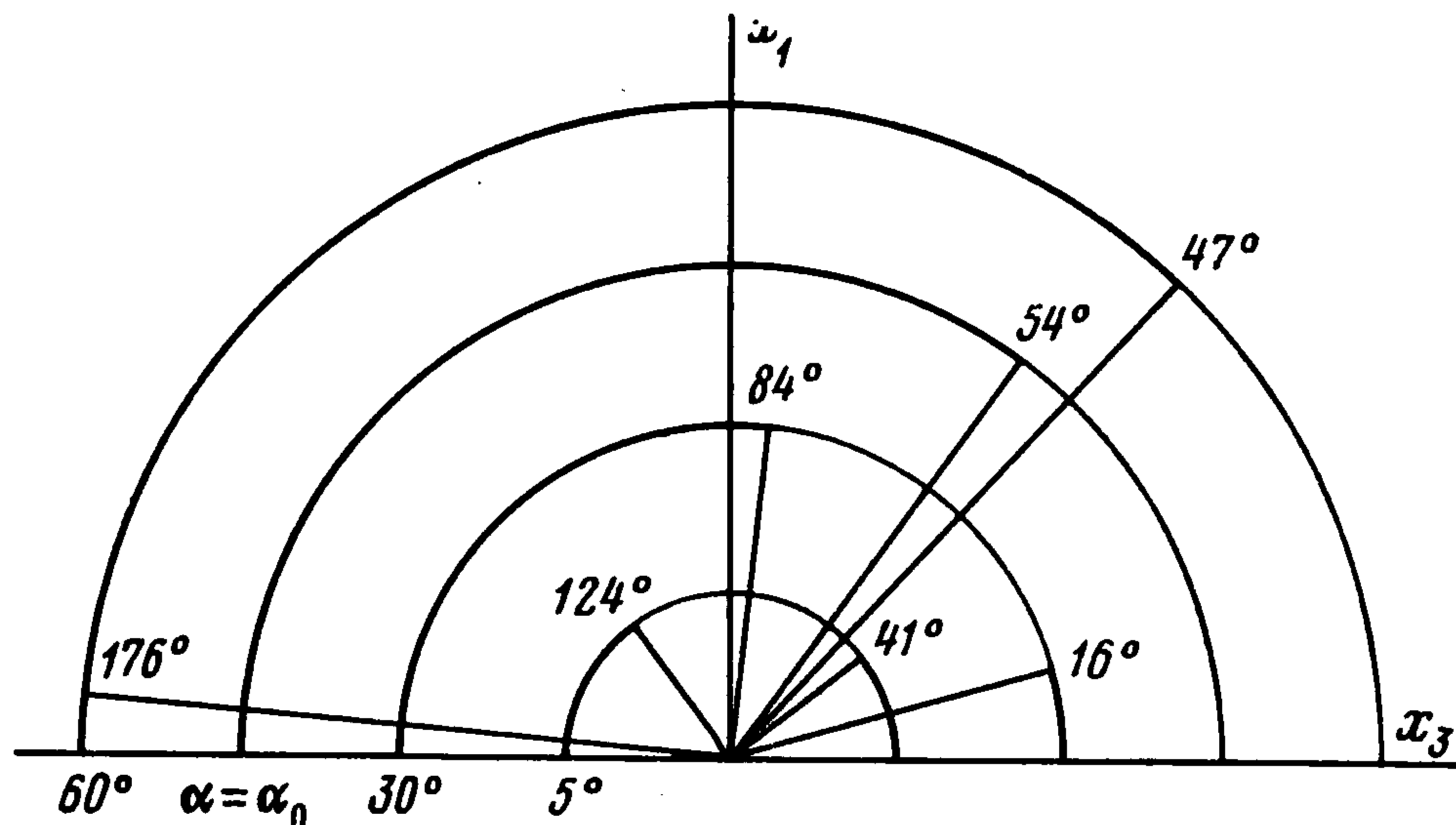
$$\xi_0 = \rho_0 \sin \Phi, \quad \zeta_0 = \rho_0 \cos \Phi, \quad \rho_0 = (\xi_0^2 + \zeta_0^2)^{1/2}, \quad 0 < \Phi < \pi$$

Неравенство (4.1) позволяет определить значения  $\Phi$ , для которых тело  $S$  вращается в положительном направлении. Предельные значения  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  угла  $\Phi$ , обращающие в нуль левую часть (4.1), определяются из уравнений

$$\operatorname{ctg} \Phi_1 = \frac{kb_2 - b_1}{c_1 - kc_2}, \quad 0 < \Phi_1 < \pi; \quad \operatorname{ctg} \Phi_2 = -\frac{kb_2 + b_1}{kc_2 + c_1}, \quad 0 < \Phi_2 < \pi$$

Численный анализ показывает, что  $\Phi_2$  обращается в нуль при  $\alpha = \alpha_0 \simeq 55^\circ$ . Если  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ , то для начального положения точки контакта, для которой тело  $S$  вращается в положительном направлении, значение  $\Phi$  удовлетворяет неравенствам  $0 < \Phi < \Phi_2$  и  $\Phi_1 < \Phi < \pi$ . Если  $\alpha_0 < \alpha < \pi/2$ , то для этого начального положения  $\Phi_1 < \Phi < \Phi_2$ . Численный анализ показывает, что если, например, изменять  $\alpha$  от 0 до  $60^\circ$ , то  $\Phi_1$  уменьшается;  $\Phi_2$  уменьшается в двух интервалах:  $[0, \alpha_0]$  и  $[\alpha_0, 60^\circ]$ .

На фиг. 2 представлены для различных значений  $\alpha$  зоны, в которых должна находиться точка контакта для того, чтобы тело  $S$  вращалось в положительном направлении



Фиг. 2

В каждом из этих случаев заключение остается таким же, что и полученное в [1]: существует привилегированное направление вращения. В самом деле, зоны, соответствующие вращению в положительном направлении, более широкие, чем зоны, которые соответствуют вращению в отрицательном направлении.

В этой работе не исследовано явление изменения направления вращения в случае, когда начальная скорость отлична от нуля. Анализ уравнений возмущенного движения значительно более сложен, чем в случае равновесия. Для решения этой задачи следовало бы ввести дополнительные упрощающие предположения относительно принимаемой модели кельтского камня.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lindberg R. E., Longman R. W. On the Dynamic Behaviour of the Wobblestone. AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Lake Tahoe, Nevada, 1981.
2. Walker G. T. On a Dynamical Top. — J. Pure and Appl. Math., 1896, v. 28, p. 175—184.
3. Magnus K. Die Stabilität der Drehbewegungen eines unsymmetrischen Körpers auf horizontaler Unterlage. Aus Theorie und Praxis der Ingenieurwissenschaften. Berlin: M., 1971. S. 19—23.
4. Magnus K. Zur Theorie der Keltischen Wackelsteine. — ZAMM, 1974, B. 54, No. 4, S. T54 — T55.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 11—21.
6. Карпетян А. В. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем. — ПММ, 1980, т. 44, № 3, с. 418 — 426.
7. Карпетян А. В. О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. — ПММ, 1981, т. 45, № 5, с. 808—814.
8. Астапов И. С. Об устойчивости вращения кельтского камня. — Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., 1980, № 2, с. 97—100.
9. Walker J. The Amateur Scientist. The Mysterious rattleback. — Scient. Amer., 1979, v. 241, No. 4, p. 144—150.
10. Caughey T. K. A Mathematical Model of the «Rattleback». — Int. J. Nonlinear Mechanics, 1980, v. 15, No. 4—5, p. 293—302.
11. Карпетян А. В. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина. — ПММ, 1978, т. 42, № 5, с. 801—807.
12. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 530 с.
13. Roseau M. Equations Différentielles. Paris; Masson, 1978. 143 p.

Париж

Поступила в редакцию  
13.VII.1982.