Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 531.384

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Маркеев А. П.

Методом усреднения исследуется движение со скольжением близкого к шару однородного трехосного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости при наличии малого сухого трения. Уравнения первого приближения весьма сложны и их полное интегрирование не проведено. Найдены два первых интеграла усредненных уравнений, исследованы общие геометрические свойства движения, рассмотрены простейшие частные решения усредненных уравнений. Качественно и количественно исследована тенденция эллипсоида к его вращению вокруг наибольшей, вертикально расположенной оси. Формулируются также результаты анализа движения эллипсоида при наличии малого вязкого трения.

В [1] рассмотрен частный случай задачи о движении тяжелого однородного трехосного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости; предполагалось, что скольжение отсутствует, а точка касания эллипсоида и плоскости описывает на поверхности эллипсоида одно из его главных сечений. В [2, 3] изучалось движение эллипсоида, близкого к шару. При отсутствии скольжения исследованы периодические движения, рождающиеся из стационарных движений однородного шара, а также методом усреднения исследован общий случай движения. В случае идеально гладкой плоскости методами гамильтоновой механики установлен характер движения эллипсоида на бесконечном интервале времени.

1. Выпишем уравнения, необходимые для решения задачи о движении со скольжением произвольного выпуклого тяжелого твердого тела по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат с началом в некоторой точке плоскости и вертикально направленной осью OZ. Единичный вектор вертикали обозначим через $-\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела, построенный в точке P касания тела и плоскости. С твердым телом свяжем систему координат $Cxyz$ с началом в его центре тяжести C и осями, направленными по главным центральным осям инерции тела. Ориентация тела относительно неподвижной системы координат определяется при помощи матрицы $\mathbf{A}$ направляющих косинусов

$$(1.1)\qquad \begin{Vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$$

В системе координат $Cxyz$ вектор $\mathbf{CP}$ имеет компоненты x, y, z. Уравнение поверхности, ограничивающей тело, зададим в виде

$$(1.2)\qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

Тогда

$$(1.3)\qquad \mathbf{n} = \operatorname{grad}\varphi / |\operatorname{grad}\varphi|, \quad \mathbf{n}' = -(a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

Штрихом обозначена операция транспонирования.

Пусть $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_c$ — векторы скоростей точек P и C тела, а v_X, v_Y, v_Z и $X_c^{\cdot}$, $Y_c^{\cdot}$, $Z_c^{\cdot}$ — их компоненты в неподвижной системе координат. Тогда

$$(1.4)\qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости тела, задаваемый в системе координат $Cxyz$ компонентами p, q, r. Пусть R_X, R_Y, R_Z — компоненты реакции $\mathbf{R}$ плоскости в системе координат $OXYZ$. Тогда в случае сухого трения

$$(1.5)\qquad R_X = -fR_Z\cos\theta,\quad R_Y = -fR_Z\sin\theta;\quad v_X = v\cos\theta,\quad v_Y = v\sin\theta$$

где f — коэффициент трения, являющийся постоянной величиной, а θ — угол между вектором $\mathbf{v}$ скорости точки касания и осью OX неподвижной системы координат. Предполагается, что $v \neq 0$, т. е. движение происходит со скольжением.

Уравнение связи, состоящей в том, что компонента v_Z скорости точки касания равна нулю, можно с использованием равенств (1.1), (1.3) и (1.4) записать в виде следующего кинематического соотношения:

$$(1.6)\qquad Z_c^{\cdot} + a_{31}(qz - ry) + a_{32}(rx - pz) + a_{33}(py - qx) = 0$$

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента дают два векторных уравнения

$$(1.7)\qquad m\mathbf{v}_c^{\cdot} = mg\mathbf{n} + \mathbf{R},\quad \mathbf{G}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G} = \mathbf{M};\quad \mathbf{M} = \mathbf{CP}\times\mathbf{R}$$

где m — масса тела, g — ускорение свободного падения, $\mathbf{G}$ — кинетический момент тела относительно центра тяжести; в системе $Cxyz$ имеем $\mathbf{G}' = (Ap, Bq, Cr)$, где A, B, C — главные центральные моменты инерции тела. Через $\mathbf{M}$ в (1.7) обозначен момент реакции плоскости относительно центра тяжести тела. Уравнения (1.7) в скалярной форме запишутся в виде следующих уравнений:

$$(1.8)\qquad mX_c^{\cdot\cdot} = -fR_Z\cos\theta,\quad mY_c^{\cdot\cdot} = -fR_Z\sin\theta,\quad mZ_c^{\cdot\cdot} = R_Z - mg$$

$$(1.9)\qquad Ap^{\cdot} + (C - B)\,qr = M_x\quad \{pqr,\ xyz,\ ABC\}$$

$$(1.10)\qquad M_x = [(a_{33}y - a_{32}z) + f(a_{22}z - a_{23}y)\sin\theta + f(a_{12}z - a_{13}y)\cos\theta]\,R_Z$$
$$\{xyz,\ a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ (i = 1, 2, 3)\}$$

В (1.9) и (1.10) не выписаны еще два равенства, которые получаются соответственно из (1.9) и (1.10) одновременной круговой перестановкой символов, указанных в фигурных скобках.

Выпишем еще кинематические уравнения Пуассона

$$(1.11)\qquad a_{i1}^{\cdot} = a_{i2}r - a_{i3}q,\quad a_{i2}^{\cdot} = a_{i3}p - a_{i1}r,\quad a_{i3}^{\cdot} = a_{i1}q - a_{i2}p\quad (i = 1, 2, 3)$$

Уравнения (1.2)—(1.6), (1.8)—(1.11) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую задачу о движении со скольжением произвольного выпуклого тяжелого твердого тела по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости при наличии сухого трения.

2. Пусть движущееся тело представляет собой однородный эллипсоид, поверхность которого в системе $Cxyz$ задается уравнением

$$(2.1)\qquad \varphi \equiv x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$$

При $a = b = c$ получаем хорошо изученную [4—6] задачу о движении с трением однородного шара по горизонтальной плоскости (бильярдный шар). Если в начальный момент вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{v}_c$ скорости центра шара, то последний движется по прямой, если нет — по параболе. Скольжение прекращается в момент времени $t = 2v_0/(7fg)$, где v_0 — начальное значение скорости точки касания; начиная с этого момента движение будет качением с верчением.

Пусть эллипсоид мало отличается от шара радиуса l, а коэффициент трения f мал. Примем величину $\max \{ |a - b|/l, |b - c|/l, |c - a|/l, f\}$ за малый параметр ε. При $\varepsilon = 0$ приходим к задаче о движении шара по гладкой горизонтальной плоскости; центр шара движется равномерно и прямолинейно, причем шар равномерно вращается вокруг неизменного в неподвижной системе координат направления. Принимая это движение за порождающее, движение эллипсоида при $0 < \varepsilon \ll 1$ исследуем асимптотическими методами. Для этого преобразуем уравнения п. 1 к форме, удобной для применения метода усреднения [7].

Из (2.1), (1.3) и (1.6) следует, что $Z_c^{\cdot\cdot}$ — величина первого порядка малости относительно ε, поэтому, согласно третьему уравнению из (1.8), нормальная реакция плоскости R_Z с погрешностью порядка ε равна весу эллипсоида. Если пренебречь членами порядка ε^2, то первые два уравнения из (1.8) запишутся в виде

(2.2) $$X_c^{\cdot\cdot} = -fg\cos\theta,\quad Y_c^{\cdot\cdot} = -fg\sin\theta$$

Делая замену переменных

(2.3) $$x = ax',\quad y = by',\quad z = cz'$$

и учитывая, что для однородного эллипсоида

(2.4) $$A = m(b^2 + c^2)/5,\quad B = m(c^2 + a^2)/5,\quad C = m(a^2 + b^2)/5$$

получаем из (2.1), (1.3), (1.10), что для записи уравнений (1.9) с точностью до членов порядка ε включительно достаточно положить в их правых частях

(2.5) $$M_x = 5g(B - C)\,y'z'/l + fmgl\,(a_{21}\cos\theta - a_{11}\sin\theta)\quad \{xyz,\ x'y'z',\ ABC,\ a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ (i = 1, 2)\}$$

Уравнение поверхности эллипсоида (2.1) в переменных x', y', z' будет уравнением сферы

(2.6) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

Из (1.11) (при $i = 3$) получаем при помощи (1.3) и (2.3) следующие уравнения для переменных x', y', z' в первом приближении по ε:

(2.7) $$x'^{\cdot} = y'r - z'q + g_1,\quad y'^{\cdot} = z'p - x'r + g_2,\quad z'^{\cdot} = x'q - y'p + g_3$$
$$g_1 = 2(c - b)\,x'y'z'p/l + (a - c)(2x'^2 - 1)\,z'q/l + (b - a)(2x'^2 - 1)\,y'r/l$$
$$\{g_1g_2g_3,\ abc,\ x'y'z',\ pqr\}$$

Эти уравнения зависимы в силу (2.6).

Из соотношений $v_X = v\cos\theta$, $v_Y = v\sin\theta$ имеем $\theta^{\cdot} = (v_Y^{\cdot}\cos\theta - v_X^{\cdot}\sin\theta)/v$, $v^{\cdot} = v_Y^{\cdot}\sin\theta + v_X^{\cdot}\cos\theta$. Подставив сюда производные $v_X^{\cdot}$, $v_Y^{\cdot}$, получаемые путем дифференцирования кинематического соотношения (1.4), использовав уравнения (1.11), (2.2), (2.3), (2.7) и равенства, связывающие направляющие косинусы a_{ij}, получим такие дифференциальные уравнения для θ и v в первом приближении по ε:

(2.8) $$\theta^{\cdot} = (\Phi\cos\theta + \Psi\sin\theta)/v,\quad v^{\cdot} = -{}^7/_2fg + (\Phi\sin\theta - \Psi\cos\theta)$$
$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,\quad \Psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$
$$\varphi_1 = (a - c)\,[a_{12}(pr + 5gx'z'/l) - 2x'z'q\,(a_{11}p + a_{12}q + a_{13}r) + 2a_{22}q\,(x'p - z'r) - 2q^2(a_{21}x' - a_{23}z')]$$
$$\psi_1 = (a - c)\,[a_{22}(pr + 5gx'z'/l) + 2x'z'q\,(a_{21}p + a_{22}q + a_{23}r) - 2a_{12}q\,(x'p - z'r) + 2q^2(a_{11}x' - a_{13}z')]$$
$$\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3,\ \psi_1\psi_2\psi_3,\ abc,\ pqr,\ x'y'z',\ a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ (i = 1, 2)\}$$

Как и в [2, 3], вместо переменных x', y', z' введем переменные ρ, ζ, γ по формулам

$$(2.9)\qquad \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \rho\sin\gamma \\ \rho\cos\gamma \\ \zeta \end{Vmatrix}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{p^2+q^2}/\omega,\quad \cos\alpha = r/\omega,\quad \sin\beta = q/\sqrt{p^2+q^2},$$
$$\cos\beta = p/\sqrt{p^2+q^2}$$

Переменные ρ и ζ связаны соотношением

$$(2.10)\qquad \rho^2+\zeta^2 = 1$$

При $\varepsilon = 0$ $\gamma^{\cdot} = \omega$, а величины ρ и ζ постоянны, причем ρ — расстояние от центра эллипсоида (шара) до прямой, проходящей через точку касания параллельно вектору $\boldsymbol{\omega}$, величина $|\zeta|$ — расстояние от центра эллипсоида (шара) до плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\omega}$ и проходящей через точку касания.

В уравнениях (1.11) также сделаем замену переменных по формуле (2.9) заменив только в ней x', y', z' на a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} ($i = 1, 2, 3$) соответственно, а ρ, ζ, γ — на ρ_i, ξ_i, γ_i. Величины ζ_1, ζ_2, ζ_3 — косинусы углов между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осями OX, OY, OZ неподвижной системы координат. Имеют место тождества

$$(2.11)\qquad \rho_i^2+\zeta_i^2 = 1$$

В первом приближении по ε переменные ζ, ζ_i ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют таким дифференциальным уравнениям:

$$(2.12)\qquad \zeta^{\cdot} = (x'p^{\cdot}+y'q^{\cdot}+z'r^{\cdot})/\omega - (pp^{\cdot}+qq^{\cdot}+rr^{\cdot})/\omega^2 + (pg_1+qg_2+rg_3)/\omega$$

$$(2.13)\qquad \zeta_i^{\cdot} = (a_{i1}p^{\cdot}+a_{i2}q^{\cdot}+a_{i3}r^{\cdot})/\omega - (pp^{\cdot}+qq^{\cdot}+rr^{\cdot})/\omega^2$$

Входящие сюда величины $p^{\cdot}$, $q^{\cdot}$, $r^{\cdot}$ должны быть получены из уравнений (1.9) с правыми частями (2.5). Пренебрегая членами порядка ε и выше, имеем также такие уравнения:

$$(2.14)\qquad \gamma_i^{\cdot} = \gamma^{\cdot} = \omega$$

Вместо ζ_1, ζ_2 введем переменные α_1, α_2 по формулам

$$(2.15)\qquad \alpha_1 = \zeta_1\cos\theta+\zeta_2\sin\theta,\quad \alpha_2 = -\zeta_1\sin\theta+\zeta_2\cos\theta$$

Величина α_1 — это косинус угла между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$, а α_2 — косинус угла между $\boldsymbol{\omega}$ и вектором, перпендикулярным $\mathbf{v}$ и лежащим в горизонтальной плоскости, причем кратчайший поворот от $\mathbf{v}$ к этому вектору происходит против часовой стрелки.

Для α_1, α_2 из (2.15) и (2.13) получаем уравнения

$$(2.16)\qquad \alpha_1^{\cdot} = [(a_{21}p^{\cdot}+a_{22}q^{\cdot}+a_{23}r^{\cdot})\sin\theta+(a_{11}p^{\cdot}+a_{12}q^{\cdot}+a_{13}r^{\cdot})\cos\theta]/\omega - (pp^{\cdot}+qq^{\cdot}+rr^{\cdot})\alpha_1/\omega^2+\theta^{\cdot}\alpha_2$$
$$\alpha_2^{\cdot} = [(a_{21}p^{\cdot}+a_{22}q^{\cdot}+a_{23}r^{\cdot})\cos\theta-(a_{11}p^{\cdot}+a_{12}q^{\cdot}+a_{13}r^{\cdot})\sin\theta]/\omega - (pp^{\cdot}+qq^{\cdot}+rr^{\cdot})\alpha_2/\omega^2-\theta^{\cdot}\alpha_1$$

Уравнения (1.9) (с правыми частями (2.5)), (2.2), (2.8), (2.12)—(2.14) и (2.16) представляют собой систему, записанную в форме, удобной для применения метода усреднения. В уравнениях (2.12), (2.13) (2.16) $p^{\cdot}$, $q^{\cdot}$, $r^{\cdot}$ — это функции, определенные из (1.9), x', y', z', a_{ij} предполагаются выраженными через ρ, ζ, γ, ρ_i, ζ_i, γ_i, p, q, r по формулам замены переменных (2.9);

величина $\theta^{\cdot}$ в (2.16) представляет собой правую часть первого уравнения из (2.8).

В полученной системе уравнений переменные $X_c^{\cdot}$, $Y_c^{\cdot}$, p, q, r, ζ, ζ_i, θ, v — медленные, а γ, γ_i — быстрые. Усредним правые части уравнений для медленных переменных по быстрым переменным. Учитывая при этом (2.10), (2.11), а также соотношения $\rho\rho_i \cos(\gamma - \gamma_i) + \zeta\zeta_i = 0$ $(i = 1, 2)$, справедливые для невозмущенного (при $\varepsilon = 0$) движения, получаем следующую усредненную систему уравнений:

(2.17) $$X_c^{\cdot\cdot} = -fg\cos\theta,\ Y_c^{\cdot\cdot} = -fg\sin\theta$$

(2.18) $$Ap^{\cdot} + [1 + 5g(3\zeta^2 - 1)/(2\omega^2 l)](C - B)qr = f\,mgl\,\alpha_2 p/\omega$$
$$\{ABC,\ pqr\}$$

(2.19) $$\alpha_1^{\cdot} = -\frac{5fg}{2\omega l}\alpha_1\alpha_2 + \frac{5g\zeta F}{2l\omega^2}\left(\frac{\alpha_2}{v} + \frac{1}{\omega l}\right)\alpha_2$$
$$\alpha_2^{\cdot} = \frac{5fg}{2\omega l}(1 - \alpha_2^2) - \frac{5g\zeta F}{2l\omega^2}\left(\frac{\alpha_2}{v} + \frac{1}{\omega l}\right)\alpha_1$$

(2.20) $$\theta^{\cdot} = \frac{5g\zeta F}{2vl\omega^2}\alpha_2,\quad v^{\cdot} = -\frac{7}{2}fg + \frac{5g\zeta F}{2l\omega^2}\alpha_1$$
$$\zeta^{\cdot} = -\frac{5fg\zeta}{2l\omega}\alpha_2,\quad \zeta_3^{\cdot} = -\frac{5fg\zeta_3}{2l\omega}\alpha_2$$

Усредненные уравнения для ζ_1 и ζ_2 не выписаны, так как они не понадобятся в дальнейшем. Для величины ω из (2.18) следует вспомогательное уравнение

(2.21) $$\omega^{\cdot} = \frac{5fg}{2l}\alpha_2$$

В (2.19), (2.20) введено обозначение

(2.22) $$F = (a - c)(p^2 - r^2) + (b - a)(q^2 - p^2) + (c - b)(r^2 - q^2)$$

Решения усредненной системы аппроксимируют медленные переменные с погрешностью порядка ε на интервале времени порядка ε^{-1}.

Можно убедиться, что усредненная система имеет следующие интегралы:

(2.23) $$\zeta\omega = \text{const},\ \zeta_3\omega = \text{const}$$

Второй из этих интегралов означает, что проекция вектора мгновенной угловой скорости на вертикаль в первом приближении постоянна.

Нахождение общего решения усредненной системы вряд ли возможно, поэтому в дальнейшем ограничимся нахождением частных ее решений и установлением некоторых общих свойств движения эллипсоида.

3. Установим сначала некоторые геометрические свойства движения. Сделаем в уравнениях (2.18) замену переменных по формулам

(3.1) $$p = \omega\alpha_x,\ q = \omega\alpha_y,\ r = \omega\alpha_z$$

где α_x, α_y, α_z — косинусы углов между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осями эллипсоида Cx, Cy, Cz соответственно. Из (2.18) и (2.21) получим

(3.2) $$A\alpha_x^{\cdot} + \omega[1 + 5g(3\zeta^2 - 1)/(2\omega^2 l)](C - B)\alpha_y\alpha_z = 0$$
$$\{ABC,\ xyz\}$$

Таким образом, в первом приближении величины α_x, α_y, α_z, определяющие ориентацию вектора $\boldsymbol{\omega}$ относительно эллипсоида, могут быть вычислены по тем же формулам, что и величины p, q, r в движении Эйлера —

Пуансо, в котором роль времени играет величина

$$(3.3)\qquad \tau=\int_0^t \omega\left[1+5g\,\frac{3\zeta^2-1}{2\omega^2 l}\right]dt$$

Пусть в неподвижной системе координат вектор **G** имеет компоненты G_X, G_Y, G_Z. Для них из теоремы об изменении кинетического момента следуют такие уравнения:

$$(3.4)\qquad G_X^{\cdot} = a_{11}M_x + a_{12}M_y + a_{13}M_z \ \{XYZ, a_{1i}, a_{2i}a_{3i}\ (i = 1,\ 2,\ 3)\}$$

Все компоненты G_X, G_Y, G_z — медленные переменные. Использовав (3.4), получим дифференциальное уравнение для величины G, усреднение правой части которого дает следующее уравнение первого приближения:

$$(3.5)\qquad G^{\cdot} = fmgl\alpha_2$$

Усреднение правой части выражения для производной от кинетической энергии движения относительно центра тяжести дает такое уравнение первого приближения:

$$(3.6)\qquad T^{\cdot\cdot} = fmgl\omega\alpha_2$$

Если с рассматриваемым эллипсоидом мысленно связать его эллипсоид инерции для центра тяжести, провести через центр тяжести прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{\omega}$, и через точку пересечения этой прямой с эллипсоидом инерции провести касательную к нему плоскость, то, как и в случае Эйлера—Пуансо, эта плоскость будет перпендикулярна вектору **G** и отстоять от центра эллипсоида на расстоянии $d = \sqrt{2T}/G^2$. В случае Эйлера — Пуансо T и G постоянны, и] поэтому постоянна и величина d. В рассматриваемом же случае T и G изменяются со временем. Однако вычисления, использующие уравнения (3.5), (3.6) и близость моментов инерции (2.4), показывают, что $d^{\cdot} = 0$ с точностью до членов порядка ε включительно. Поэтому, как и в случае Эйлера — Пуансо, в рассматриваемом случае эллипсоид инерции катится (и вертится) без скольжения по построенной касательной плоскости, остающейся на неизменном в первом приближении расстоянии от центра эллипсоида. Однако в рассматриваемом случае центр эллипсоида движется согласно уравнениям (2.17) и меняется ориентация вектора **G** относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Получим уравнения, определяющие ориентацию вектора **G**. Вычисление правой части третьего уравнения из (3.4) с использованием (1.3), (2.1), (2.3) и (2.5) показывают, что она с точностью до членов порядка ε включительно равна нулю. Таким образом, в первом приближении проекция G_Z вектора кинетического момента на вертикаль постоянна.

Пусть σ — угол между осью OX и проекцией вектора **G** на горизонтальную плоскость. Видно, что

$$(3.7)\qquad \sigma^{\cdot}=\frac{G_X G_Y^{\cdot}-G_Y G_X^{\cdot}}{G^2-G_Z^2}$$

Заменив здесь $G_X^{\cdot}$ и $G_Y^{\cdot}$ на правые части соответствующих уравнений из (3.4) и произведя усреднение, получим уравнение первого приближения

$$(3.8)\qquad \sigma^{\cdot}=\frac{2m^2l^2g}{5\omega\,(G^2-G_Z^2)}\left[f\omega^2 l\alpha_1-\zeta\,(1-\zeta^2)\,F\right]$$

4. Известно, что быстро закрученный симметричный волчок, будучи поставленным на шероховатую горизонтальную плоскость, обнаруживает тенденцию к поднятию своего центра тяжести и стремится вращаться вокруг его вертикально расположенной оси симметрии.

По-видимому, первое правильное объяснение этого эффекта дано в работе [8], где рассмотрение велось почти с современных [9—11] позиций. Вопросам математической теории поднятия оси симметричного волчка посвящена глава 18 книги [12]. Но эффект поднятия оси проявляется и в случае, когда волчок не обязательно симметричен. В [13] описан опыт, проведенный Томсоном с эллипсоидальным камнем. Движение быстро закрученного на шероховатой плоскости камня эволюционировало так, что последний имел тенденцию вращаться вокруг наибольшей своей оси, которая стремилась занять вертикальное положение, если только вращение камня было достаточно быстрое.

Рассмотрим вопрос о стремлении эллипсоида вращаться вокруг его наибольшей, вертикально расположенной оси. Сначала при помощи интегралов (2.23) усредненных уравнений движения получим некоторые качественные выводы об эволюции движения эллипсоида, не обязательно быстро закрученного, а для самого общего случая его движения. Если угловая скорость ω уменьшается, то в силу неизменности величины проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на вертикаль он стремится занять вертикальное положение. Далее, из первого из интегралов (2.23) следует, что при уменьшении ω величина $|\zeta|$ должна увеличиваться. Учитывая геометрический смысл переменной ζ, приходим к выводу о том, что при уменьшении ω эллипсоид стремится подняться на его наибольшую, вертикально расположенную ось. При увеличении ω имеет место обратное: вектор $\boldsymbol{\omega}$ и наибольшая ось эллипсоида имеют тенденцию к возрастанию их отклонения от вертикали.

Для получения количественных выводов об эволюции движения эллипсоида недостаточно анализа следствий, вытекающих из существования интегралов (2.23). Следует использовать сами усредненные уравнения движения. Пусть при $t = 0$ $|v_c| \ll |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}|$. Тогда в начальный момент времени величина α_2 отрицательна, а величина α_1 мала. Будем считать, что $|\alpha_1|$ не ниже первого порядка по ε. Тогда из (2.19) имеем в первом приближении уравнение

$$\alpha_2^{\bullet} = 5fg(1 - \alpha_2^2)/2\omega l \tag{4.1}$$

которое вместе с уравнением (2.21) образует замкнутую систему уравнений. Обозначая нулевым индексом начальные значения переменных, получаем общее решение этой системы

$$\omega = (\omega_0^2 + 2\alpha_{20}\omega_0\tau + \tau^2)^{1/2}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_{20}\omega_0 + \tau}{\omega} \left(\tau = \frac{5fg}{2l} t\right) \tag{4.2}$$

С ростом t величина ω уменьшается, а величина α_2 растет изменяясь от своего отрицательного значения α_{20}. Она остается отрицательной до момента времени $t_1 = 2\omega_0 l\,|\alpha_{20}|/(5fg)$. Из геометрических соображений следует, что $\alpha_{20} = -\rho_0$, $v_0 = \rho_0 l\omega_0$ с погрешностью порядка ε. Поэтому приближенно $t_1 = 2v_0/(5fg)$.

При малых α_1 из второго уравнения (2.20) получаем, что в первом приближении, как и в случае шара на шероховатой плоскости, скорость точки касания

$$v = v_0 - {}^7\!/_2 fgt \tag{4.3}$$

В момент времени $t_2 = 2v_0/(7fg)$ скорость v обращается в нуль и начинается движение без скольжения. Так как $t_1 > t_2$, то отсюда следует, что на всем интервале времени $0 < t < t_2$ угловая скорость ω уменьшается и подъем эллипсоида на его наибольшую ось происходит вплоть до начала движения без скольжения.

Оценим величину Δt времени, необходимого для переворота эллипсоида с наименьшей полуоси a на его наибольшую полуось c. Это значит, что $|\zeta|$ за время Δt должен измениться на величину $(c - a)/l$. Из (2.23) имеем $\zeta(t) = \zeta_0\omega_0/\omega(t)$. Если здесь положить $\zeta_0 = a/l$, $\zeta(\Delta t) = c/l$, то получим, пренебрегая членами порядка ε^2 и выше, $\omega(\Delta t) = \omega_0[1 - (c - a)/l]$. Подставив это значение ω в левую часть первого из равенств (4.2), найдем

$$\Delta t = \frac{2(c-a)}{5fg\,|\alpha_{20}|}\omega_0 \tag{4.4}$$

Отброшенные в правой части равенства (4.4) слагаемые по крайней мере на один порядок ε меньше оставленных. Чтобы переворот мог произойти до начала движения без скольжения, необходимо потребовать выполнения неравенства $\Delta t < t_2$, откуда с учетом приближенных соотношений $\alpha_{20} = -\rho_0$, $v_0 = \rho_0\omega_0 l$ следует, что должно выполняться неравенство

$$\rho_0 > \sqrt{7(c-a)/(5l)} \tag{4.5}$$

Таким образом, для осуществимости переворота эллипсоида с наименьшей полуоси на наибольшую необходимо потребовать, чтобы в начальный момент времени угол между наименьшей полуосью и вектором $\boldsymbol{\omega}$ не был слишком острым; в противном случае время Δt, необходимое для переворота эллипсоида, будет больше значения времени t_2, при котором начинается движение без скольжения. Качественно этот вывод можно усмотреть непосредственно из (2.21) и (2.23): чем меньше ρ_0, тем меньше $|\alpha_{20}|$ и, согласно (2.21), тем медленнее уменьшается ω и, следовательно, согласно (2.23), тем медленнее рост $|\zeta|$.

5. Рассмотрим случай абсолютно гладкой плоскости. Из (1.8) при $f = 0$ получаем $X_c^{\cdot} = \text{const}$, $Y_c^{\cdot} = \text{const}$. Из третьего уравнения (2.20) и (2.21) следует, что в первом приближении при $f = 0$, не уменьшая точности, в квадратных скобках уравнений (2.18) можно положить $\zeta = \zeta_5$, $\omega = \omega_0$. И в первом приближении эллипсоид относительно вектора $\mathbf{G}$ совершает движение Эйлера — Пуансо, в котором роль времени играет величина

$$\tau = [1 + 5g(3\zeta_0^2 - 1)/(2\omega_0^2 l)]\,t \tag{5.1}$$

зависящая от начальных условий.

Из постоянства величины G_Z и того, что, согласно (3.5), при $f = 0$ величина G также в первом приближении постоянна, следует, что угол между вектором $\mathbf{G}$ и вертикалью в первом приближении постоянен. Функция (2.22) с погрешностью порядка ε^4 может быть представлена в виде

$$F = 5[(A + B + C)\,\omega^2 - 6T]/(2ml)$$

При $f = 0$ из (3.6) получим, что, не изменяя точности, можно в правой части уравнения (3.8) положить не только $\omega = \omega_0 = \text{const}$, но и $F = F_0 = \text{const}$. Учитывая еще, что проекция $\mathbf{G}$ на горизонтальную плоскость с погрешностью порядка ε равна $^2/_5 ml^2\rho_0\omega_0$, получаем из (3.8), что при $f = 0$ величина $\sigma^{\cdot}$ постоянна в первом приближении и определяется по формуле

$$\sigma^{\cdot} = -5g\zeta_0 F_0/(2l^2\omega_0^3) \tag{5.2}$$

Таким образом, при $f = 0$ проекция центра тяжести эллипсоида на горизонтальную плоскость движется равномерно и прямолинейно, сам эллипсоид движется вокруг вектора кинетического момента согласно Эйлеру — Пуансо с измененным масштабом времени (5.1), вектор же кинетического момента постоянен по модулю и медленно прецессирует вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью (5.2), оставаясь на неизменном угловом расстоянии от нее. Иным путем этот результат установлен в [2].

6. Укажем некоторые простейшие частные решения усредненной системы (2.17)—(2.20). Рассмотрим сначала решение, в котором $\zeta = 0$. Оно соответствует такому движению эллипсоида, когда с погрешностью порядка ε можно считать, что его центр тяжести лежит в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\omega}$ и проходящей через точку касания эллипсоида и плоскости.

При $\zeta = 0$ третье уравнение (2.20) тождественно удовлетворяется, а из (2.17) и первых двух уравнений (2.20) следует, что, как и в случае движения со скольжением шара по шероховатой плоскости, $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $v = v_0 - {}^7/_2 fgt$ и проекция центра тяжести на плоскость движется по прямой или параболе в зависимости от начальных условий.

Уравнения (2.18), (2.19) при $\zeta = 0$ запишутся так:

(6.1) $\qquad Ap^{\boldsymbol{\cdot}} + (1 - 5g/(2\omega^2 l))\,(C - B)\,qr = f\,mgl\alpha_2 p/\omega \quad \{ABC,\ pqr\}$

(6.2) $\qquad \alpha_1^{\boldsymbol{\cdot}} = -5fg\alpha_1\alpha_2/(2\omega l),\ \ \alpha_2^{\boldsymbol{\cdot}} = 5fg\,(1 - \alpha_2^2)/(2\omega l)$

Из (2.21) и (6.2) получаем, что ω и α_2 меняются со временем в соответствии с (4.2), а $\alpha_1 = \alpha_{10}\omega_0/\omega$.

Ориентация вектора мгновенной угловой скорости в системе координат $OXYZ$ определяется равенствами

(6.3) $\qquad \zeta_1 = \alpha_1 \cos\theta_0 - \alpha_2 \sin\theta_0,\ \ \zeta_2 = \alpha_1 \sin\theta_0 + \alpha_2 \cos\theta_0,\ \ \zeta_3 = $
$\qquad\qquad = \zeta_{30}\omega_0/\omega$

Величины p, q, r (при известной зависимости $\omega(t)$) найдутся из равенств (3.1) и уравнений (3.2), которые введением независимой переменной

$$\tau = \int_0^t \omega\,(1 - 5g/(2\omega^2 l))\,dt$$

приводятся к интегрируемой в эллиптических функциях системе уравнений в задаче Эйлера — Пуансо.

7. Можно проверить, что усредненная система уравнений допускает решение, для которого $p = 0$, $q = 0$, а величины $X_c^{\boldsymbol{\cdot}}$, $X_c^{\boldsymbol{\cdot}}$, α_1, α_2, θ, V, ζ, ζ_3, $\omega = |\,r\,|$ удовлетворяют системе уравнений (2.17), (2.19)—(2.21), в которой величину F/ω^2 надо заменить на константу $2c - a - b$. Это частное решение соответствует такому движению, при котором вектор ω во все время движения остается параллельным одной из осей эллипсоида. Если полуоси эллипсоида связаны соотношением $a + b = 2c$, то $\theta = \theta_0 = $ $= \text{const}$, проекция центра тяжести на плоскость движется по прямой или параболе, а величины α_1, α_2, v, ω изменяются со временем так же, как и в п. 6, где $\zeta = 0$.

8. Укажем еще на одно интересное частное решение усредненной системы, которое соответствует движению эллипсоида с постоянным вектором мгновенной угловой скорости ω. Получим это частное решение, а также условия его существования.

Из (2.18)—(2.21) получаем, что упомянутое решение имеет следующее аналитическое выражение:

(8.1) $\qquad p = p_0,\ q = q_0,\ r = r_0,\ \alpha_1 = fl\omega_0^2/(\zeta_0 F_0),\ \alpha_2 = 0$
$\qquad\qquad \theta = \theta_0,\ \zeta = \zeta_0,\ v = v_0 - fgt$

Проекция центра тяжести на плоскость движется по прямой или пара боле. Постоянные ζ_0, ω_0 в (8.1) связаны соотношением, обращающим в нуль выражение в квадратных скобках в (2.18)

(8.2) $\qquad \zeta_0^2 = {}^1/_3 - 2\omega_0^2 l/(15g)$

Требуя положительности правой части (8.2) и учитывая, что $|\alpha_1| \leqslant 1$, получим ограничения сверху на величину угловой скорости ω_0 и коэффициент трения f

$$(8.3) \qquad \omega_0 < \sqrt{\frac{5g}{2l}}, \quad f \leqslant \frac{|\zeta_0|}{l}\left|(a+b+c) - 3\frac{ap_0^2 + bq_0^2 + cr_0^2}{\omega_0^2}\right|$$

Неравенства (8.3) и будут условиями существования движения с постоянным вектором $\boldsymbol{\omega}$. Отметим, что в случае шара при $f \neq 0$ движения со скольжением при постоянном $\boldsymbol{\omega}$ не существует.

9. Было также исследовано движение эллипсоида в предположении, что он по-прежнему близок к шару, трение мало, но оно не сухое, а вязкое. Кратко сформулируем основные результаты исследования.

Реакция плоскости будет теперь в системе координат $OXYZ$ задаваться компонентами $-kmv\cos\theta$, $-kmv\sin\theta$, R_Z, где $k > 0$ — постоянный малый (порядка ε) коэффициент трения. Усредненные уравнения движения получаются из уравнений (2.17)—(2.21), если в их правых частях слагаемые, содержащие множитель fg, заменить на те же слагаемые, но уже с множителем kv.

Геометрические характеристики движения, рассмотренные в п. 3, имеют место и в случае вязкого трения. Только в правых частях уравнений (3.5), (3.8) коэффициент fg должен быть заменен на kv.

Для усредненных уравнений, как и в случае сухого трения, справедливы интегралы (2.23) и по-прежнему имеет место тенденция эллипсоида вращаться вокруг его наибольшей, вертикально расположенной оси. Только в случае вязкого трения в (4.2) величина τ должна быть определена равенством

$$(9.1) \qquad \tau = \frac{5v_0}{7l}(1 - e^{-7kt/2})$$

а формула (4.3), описывающая при малых $|\alpha_1|$ уменьшение скорости точки касания, становится такой:

$$(9.2) \qquad v = v_0 e^{-7kt/2}$$

Так как v не обращается в нуль ни при каких t, то движения без скольжения не будет. Оценка «времени» $\Delta\tau$, необходимого для переворота эллипсоида с наименьшей оси на наибольшую, в случае вязкого трения будет такой:

$$(9.3) \qquad \Delta\tau = (c - a)\,\omega_0/(\rho_0 l)$$

Эта величина не должна превосходить наибольшего возможного значения τ, равного $5v_0/(7l)$. Отсюда, как и при сухом трении, следует условие (4.5).

Усредненное уравнение допускает рассмотренное в п. 6 частное решение, в котором $\zeta = 0$. В этом решении переменные α_1, α_2, ω определены теми же формулами, что и при сухом трении, только τ должна быть задана равенством (9.1). Скорость точки касания дается формулой (9.2), угол $\theta = \theta_0 = \text{const}$, а траектория проекции центра тяжести на плоскость задается уравнениями

$$(9.4) \qquad \begin{aligned} X_c(t) &= \frac{4}{49k} v_0 \cos\theta_0 (1 - e^{-7kt/2}) + \left(X_{c0}^{\cdot} - \frac{2}{7} v_0 \cos\theta_0\right) t + X_{c0} \\ Y_c(t) &= \frac{4}{49k} v_0 \sin\theta_0 (1 - e^{-7kt/2}) + \left(Y_{c0}^{\cdot} - \frac{2}{7} v_0 \sin\theta_0\right) t + Y_{c0} \end{aligned}$$

Существует также частное решение, для которого вектор ω параллелен одной из осей эллипсоида. Рассмотренного же в п. 8 движения с постоянным вектором ω в случае вязкого трения нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронец П. В.* Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости. К.: Тип. Ун-та Св. Владимира, 1903. 152 с.
2. *Маркеев А. П.* О движении тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 553—567.
3. *Маркеев А. П.* О катании тяжелого эллипсоида по неподвижной горизонтальной плоскости.— В кн.: Третье республ. совещ. по пробл. динамики твердого тела. Тез. докл. Донецк: Ин-т прикл. матем. и механ. АН УССР, 1981, с. 38.
4. *Coriolis G.* Theorie mathematique des effets du jeu de billard. Paris: Carilian-Goenry, 1835. 174 p.— Рус. перев.: М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
5. *Appell P.* Traité de Mécanique rationnelle. V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1953. 575 p.— Рус. перев.: М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
6. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di meccanica razionale. V. 2, pt 2. Bologna: Zanichelli, 1927. 671 p.— Рус. перев.: М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
7. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
8. *Smith A.* Note on the theory of a spinning-top.— Cambr. Math. J., 1846, v. 1, p. 47—48.
9. *Webster A. G.* The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies. Leipzig: Teubner, 1925. 588 p.— Рус. перев.: Л.— М.: Гостехиздат, 1933. 634 с.
10. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1974. 519 с.
11. *Самсонов В. А.* Качественный анализ задачи о движении волчка по плоскости с трением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 29—35.
12. *Gray A.* A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Application. L.: Macmillan, 1918, 530 p.
13. *Перри Дж.* Вращающийся волчок. М.— Л.: Гл. ред. науч.-популярной и юношеской лит., 1935. 92 с.

Москва

Поступила в редакцию 7.IV.1982