УДК 531.36

К СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Красинская Э. М.

Исследуется влияние сил определенной структуры на устойчивость стационарных движений неголономных (в частности, голономных) механических систем. Предполагается [1, 2], что силы приложены не только по позиционным, но и по циклическим координатам. Кроме того, вводится предположение, что управляющие силы, прикладываемые по циклическим координатам, зависят от позиционных скоростей. При их действии в приведенной системе в общем случае появляются дополнительные потенциальные и гироскопические силы [2], а также диссипативно-ускоряющие и неконсервативные позиционные силы (такие же силы возникают из-за членов неголономности [3]). Вследствие этого становится возможной стабилизация по первому приближению неустойчивых стационарных движений при отсутствии минимума потенциальной энергии и при нечетной степени неустойчивости. При этом характеристическое уравнение первого приближения имеет нулевые корни, но с помощью методов теории критических случаев А. М. Ляпунова систему можно привести к особенному случаю [3, 4].

1. Пусть положение склерономной неголономной системы определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и связи, наложенные на систему, имеют вид

$$q_\mu^{\boldsymbol\cdot} = \beta_{\mu\rho}(q)q_\rho^{\boldsymbol\cdot} \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее

$$\begin{gathered}\mu,\ \sigma = 1, 2, \ldots, m;\ \alpha,\ \beta,\ \nu,\ \delta = m+1,\ m+2, \ldots, m+k\\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m-l;\quad \xi, \eta = m-l+1, m-l+2, \ldots, m\\ i,\ j,\ r = m+k+1,\ m+k+2, \ldots, n;\quad s,\ \rho + m+1,\\ m+2, \ldots, n\end{gathered}$$

По дважды повторяющимся индексам проводится суммирование.

Примем за переменные, характеризующие состояние системы, переменные Рауса $q_\sigma, q_\sigma^{\boldsymbol\cdot}, q_i, q_i^{\boldsymbol\cdot}, q_\alpha, p_\alpha$, где $p_\alpha = \partial T/\partial q_\alpha^{\boldsymbol\cdot}$, $T = {}^1/_2 a_{\rho s}(q)q_\rho^{\boldsymbol\cdot} q_s^{\boldsymbol\cdot}$ — кинетическая энергия системы, выраженная через независимые скорости. Введем в рассмотрение функцию Рауса [5]

$$\begin{gathered}R = L - p_\alpha q_\alpha^{\boldsymbol\cdot} = R_2 + R_1 + R_0,\ L = T - \Pi(q)\\ R_2 = {}^1/_2 a_{ij}^* q_i^{\boldsymbol\cdot} q_j^{\boldsymbol\cdot},\quad R_1 = \gamma_{\alpha i} q_i^{\boldsymbol\cdot} p_\alpha\\ R_0(q, p) = -{}^1/_2 b_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - \Pi(q)\\ \| b_{\alpha\beta} \| = \| a_{\alpha\beta} \|^{-1},\quad a_{ij}^* = a_{ij} - b_{\alpha\beta} a_{\alpha j} a_{\beta i},\quad \gamma_{\alpha i} = b_{\alpha\beta} a_{\beta i}\end{gathered}$$

($\Pi(q)$ — потенциальная энергия). Тогда уравнения движения можно записать в виде

$$q_\alpha^{\boldsymbol\cdot} = -\frac{\partial R}{\partial p_\alpha},\qquad p_\alpha^{\boldsymbol\cdot} = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} + B_{\mu\alpha}\frac{\partial R}{\partial q_\mu} + \left(\frac{\partial T_0}{\partial q_\mu^{\boldsymbol\cdot}}\right) q_\rho^{\boldsymbol\cdot}\Omega_{\mu\alpha\rho} + Q_\alpha \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_i^{\boldsymbol\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial q_i} - B_{\mu i}\frac{\partial R}{\partial q_\mu} = \left(\frac{\partial T_0}{\partial q_\mu^{\boldsymbol\cdot}}\right) q_\rho^{\boldsymbol\cdot}\Omega_{\mu i\rho} + Q_i \tag{1.3}$$

$$\Omega_{\mu s\rho} = \frac{\partial B_{\mu s}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_s} + B_{\sigma\rho}\frac{\partial B_{\mu s}}{\partial q_\sigma} - B_{\sigma s}\frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_\sigma},\qquad \left(\frac{\partial T_0}{\partial q_\mu^{\boldsymbol\cdot}}\right) = \theta_{\mu s} q_s^{\boldsymbol\cdot}$$

Здесь T_0 — выражение кинетической энергии системы без учета неголономных связей (1.1), Q_s — непотенциальные обобщенные силы, отнесенные к независимым скоростям.

Предположим, что q_α — циклические в смысле определения [6] координаты. Пусть при $Q_s = 0$ существует многообразие стационарных движений [7], размерность которого не меньше суммы числа циклических координат и числа неголономных связей общего вида [3]. Предположим, что первые $m - l$ связей (1.1) — типа Чаплыгина, т. е. для соответствующих координат $\partial (T_0 - \Pi)/\partial q_\varkappa = 0$, $\partial \beta_{\mu\rho}/\partial q_\varkappa = 0$. Кроме того, пусть выполнены условия

$$\theta_{\varkappa\beta}\Omega_{\varkappa\alpha\nu} = 0, \quad B_{\eta\alpha} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial B_{\eta i}}{\partial q_\alpha} = 0$$

при которых указанное многообразие определяется уравнениями для позиционных координат [3].

Записанные в переменных Рауса эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial R_0}{\partial q_i} + B_{\eta i}\frac{\partial R_0}{\partial q_\eta} + \theta_{\varkappa\alpha}\Omega_{\varkappa i\nu}b_{\alpha\beta}b_{\nu\delta}p_\beta p_\delta = 0 \tag{1.4}$$

2. Рассмотрим возможность стабилизации неустойчивых стационарных движений приложением сил определенной структуры по позиционным и циклическим координатам [1, 2].

Возьмем произвольное стационарное движение многообразия

$$q_\eta = q_{\eta 0}, \quad q_i = q_{i0}, \quad q_i^\cdot = 0, \quad p_\alpha = c_\alpha = \text{const} \tag{2.1}$$

Пусть силы Q_s обращаются в нуль на стационарном движении (2.1), не зависят от q_α и выражение в переменных Рауса имеют вид

$$\begin{aligned} Q_i &= -f_{i\beta}(q, q^\cdot)p_\beta - f_{ij}(q, q^\cdot)q_j^\cdot - p_{ij}q_j + F_i \\ Q_\alpha &= f_{\alpha j}(q, q^\cdot)q_j^\cdot, \quad p_{ij} = -p_{ji} = \text{const} \end{aligned} \tag{2.2}$$

где F_i — постоянные силы, добавляемые в случае необходимости [2] для выполнения равенства $Q_{i0} = 0$ на стационарном движении.

Полагая $q_i = q_{i0} + x_i$, $p_\alpha = c_\alpha + y_\alpha$, $q_\eta = q_{\eta 0} + s_\eta$, составим уравнения возмущенного движения для уравнений связей общего вида, второй группы уравнений (1.2) и уравнений (1.3). Выделив в них линейное приближение, запишем их

$$\begin{aligned} s^\cdot &= Bx^\cdot + \Phi_1(x, s, x^\cdot) \\ y^\cdot &= Nx^\cdot + F_2x^\cdot + \Phi_2(x, s, y, x^\cdot) \\ Ax^{\cdot\cdot} &+ \Gamma y^\cdot + (D_1 + G_1)x^\cdot + (M + P)x + (H + F_1)y + \\ &+ Es = \Phi_3(x, s, y, x^\cdot) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь

$$A = \| (a_{ij}^*)_0 \|, \quad B = \| (B_{\eta i})_0 \|, \quad \Gamma = \| (\gamma_{\alpha i})_0 \|$$

$$D_1 + G_1 = \| (g_{ri}^\alpha)_0 c_\alpha + (\theta_{\varkappa\alpha}\Omega_{\varkappa i\delta}b_{\alpha\beta}\gamma_{\delta r} + \theta_{\varkappa\alpha}\Omega_{\varkappa i\nu}b_{\nu\beta}\gamma_{\alpha r})_0 c_\beta -$$
$$- (\theta_{\varkappa r}\Omega_{\varkappa i\delta} + \theta_{\mu\delta}\Omega_{\mu ir})_0 (b_{\delta\beta})_0 c_\beta + (f_{ir})_0 \|, \quad D_1 = D_1', \quad G_1 = -G_1'$$

$$N = \| (\theta_{\varkappa r}\Omega_{\varkappa\alpha\delta} + \theta_{\varkappa\delta}\Omega_{\varkappa\alpha r})_0 (b_{\delta\beta})_0 c_\beta \|$$

$$F_2 = \| (f_{\alpha j})_0 \|, \quad F_1 = \| (f_{i\alpha})_0 \|, \quad P = \| p_{ir} \|$$

$$H = \left\| \left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial q_i} + B_{\eta i}\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial q_\eta} \right)_0 c_\beta - (\theta_{\varkappa\alpha}\Omega_{\varkappa i\nu}b_{\alpha\beta}b_{\nu\delta} + \right.$$
$$\left. + \theta_{\varkappa\alpha}\Omega_{\varkappa i\nu}b_{\delta\alpha}b_{\nu\delta})_0 c_\beta \right\|, \quad s' = \| s_1, s_2, \ldots, s_l \|$$

$$y' = \| y_1, y_2, \ldots, y_k \|, \quad x' = \| x_1, x_2, \ldots, x_{n-m-k} \|$$

$$E = \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial q_\xi} \left[\frac{\partial R_0(q,c)}{\partial q_i} + B_{\eta i} \frac{\partial R_0(q,c)}{\partial q_\eta} + \theta_{\varkappa\alpha}\Omega_{\varkappa i\nu} b_{\alpha\beta} b_{\nu\delta} c_\beta c_\delta \right] \right\}_0 \right\|$$

$$M = \left\| - \left\{ \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\frac{\partial R_0(q,c)}{\partial q_i} + B_{\eta i} \frac{\partial R_0(q,c)}{\partial q_\eta} + \theta_{\varkappa\alpha}\Omega_{\varkappa i\nu} b_{\alpha\beta} b_{\nu\delta} c_\beta c_\delta \right] \right\}_0 \right\|$$

$$R_0(q,c) = -\frac{1}{2} b_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta - \Pi(q)$$

Нулевой индекс означает, что соответствующее выражение вычисляется для стационарного движения (2.1).

Вектор-функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 содержат нелинейные члены, причем

(2.4) $$\Phi_1(x, s, 0) = \Phi_2(x, s, y, 0) \equiv 0$$

Замечание. В случае таких циклических координат, что выполняются условия [8]

$$B_{\sigma\alpha} = 0, \quad \frac{\partial B_{\sigma\rho}}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial (T_0 - \Pi)}{\partial q_\alpha} = 0$$

вторая группа уравнений (1.2) принимает вид $p_\alpha^{\cdot} = Q_\alpha$. В этом случае в уравнениях (2.3) $N = 0$, а в уравнениях для позиционных координат в консервативной системе (при $Q_s = 0$) не появляется диссипативно-ускоряющих сил из-за членов неголономности в отличие от более общего случая [3].

Сделаем в уравнениях (2.3) линейную подстановку [9, 10]

(2.5) $$z = s - Bx, \quad w = y - F_2 x - Nx$$

Тогда уравнения возмущенного движения примут вид

(2.6) $$z^{\cdot} = \Phi_1(x, z + Bx, x^{\cdot}), \quad w^{\cdot} = \Phi_2(x, z + Bx, w + (F_2 + N)x, x^{\cdot})$$

(2.7) $$Ax^{\cdot\cdot} + \Gamma w^{\cdot} + \Sigma_1 x^{\cdot} + (H + F_1) w + \Sigma x + Ez = \Phi_3(x, z + Bx, w + (F_2 + N)x, x^{\cdot})$$

$$\Sigma_1 = \Gamma(F_2 + N) + G_1 + D_1, \quad \Sigma = (H + F_1)(F_2 + N) + M + P + EB$$

Характеристическое уравнение первого приближения этой системы имеет вид

(2.8) $$\lambda^{k+l} \det \{A\lambda^2 + \Sigma_1\lambda + \Sigma\} = 0$$

При $Q_s = 0$ характеристическое уравнение перейдет в

(2.9) $$\lambda^{k+l} \det \{A\lambda^2 + (G_1 + D_1 + \Gamma N)\lambda + M + EB + HN\} = 0$$

Если хотя бы один корень уравнений (2.8) или (2.9) лежит в правой полуплоскости, то стационарное движение (2.1) неустойчиво.

3. Приведем некоторые результаты по стабилизации стационарных движений, аналогичные теоремам Томсона — Тэта — Четаева.

Теорема 1. Если матрица $C = M + EB + HN$ симметрична, не является определенно-положительной в $\det C \neq 0$, то стационарное движение (2.1) при действии сил с полной диссипацией по позиционным скоростям останется неустойчивым при добавлении по позиционным координатам произвольных гироскопических сил, зависящих от позиционных скоростей.

Доказательство. При действии указанных сил характеристическое уравнение приведенной системы (2.7) будет иметь вид

$$\det \{A\lambda^2 + (G_2 + D_2)\lambda + C\} = 0$$

где матрица D_2 определенно-положительная, $G_2 = -G_2'$. При условиях теоремы все собственные значения матрицы C отличны от нуля и среди них есть отрицательные. Тогда утверждение теоремы следует из четвертой теоремы Томсона — Тэта — Четаева [12].

Утверждение. Если симметричная часть матрицы $M + Eb$ определенно-отрицательная, то при $N = 0$ и при нечетном числе позиционных координат стационарное движение нельзя стабилизировать никакими обобщенными гироскопическими, диссипативно-ускоряющими и неконсервативными позиционными силами Q_i вида (2.2), прикладываемыми по позиционным координатам.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 9 Д. Р. Меркина [11].

Заметим теперь, что силы Q_α вида (2.2), прикладываемые по циклическим координатам, и члены неголономности в уравнениях для циклических импульсов имеют одинаковый характер. При их действии в приведенной системе (2.7) в общем случае возникают дополнительные потенциальные, неконсервативные позиционные, гироскопические и диссипативно-ускоряющие силы, так как матрицы $\Gamma\,(F_2 + N)$, $H\,(F_2 + N)$ разлагаются на симметричные и кососимметричные.

При действии сил $Q_i = -F_1 y$, зависящих от циклических импульсов и прикладываемых по позиционным координатам, для приведенной системы могут также возникать дополнительные потенциальные и неконсервативные силы вида $F_1 N x$ или $F_1 F_2 x$ при одновременном действии этих обобщенных сил и сил $Q_\alpha = F_2 x^\cdot$. Причем силы Q_i, зависящие от циклических импульсов, не дают диссипативно-ускоряющих и гироскопических сил для системы (2.7). Таких сил не будет возникать и при действии сил $Q_\alpha = F_2 x^\cdot$, если $\Gamma = 0$ (или $R_1 = 0$).

Таким образом, приложением силы по циклическим координатам можно в некоторых случаях стабилизировать неустойчивые стационарные движения при условиях теоремы 1 и утверждения, так как при действии этих сил можно изменять потенциальную энергию приведенной системы. Для стабилизации следует подбирать коэффициенты сил Q_s так, чтобы корни характеристического уравнения приведенной системы лежали слева от мнимой оси, потому что в таком случае для стационарных движений, определяемых многообразием (1.4), справедлива (доказанная [3] при $Q_\alpha = 0$)

Теорема 2. Если все корни характеристического уравнения (2.8), кроме $k + l$ нулевых, будут иметь отрицательные действительные части, то имеет место особенный случай $k + l$ нулевых корней и стационарное движение будет асимптотически устойчиво относительно скоростей $q_i^\cdot$ и устойчиво относительно координат q_i, q_η и импульсов p_α.

Доказательство этой теоремы в переменных Рауса проводится проще, чем в [3]. Запишем уравнения возмущенного движения (2.7) в форме

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & x^\cdot = x_1, \quad x_1^\cdot = -A^{-1}\{\Gamma y^\cdot + \Sigma_1 x_1 + (H + F_1)\, w + \\
& + \Sigma x + Ez\} + \Phi_4\,(x, z, w, x^\cdot)
\end{aligned}
$$

Так как при условиях теоремы $\det \Sigma \neq 0$, то существует решение $u\,(z, w)$ уравнения

$$
A^{-1}\Sigma u\,(z, w) + A^{-1}\,(H + F_1)\, w + A^{-1} E z - \Phi_4^*\,(u, z, w, 0) = 0
$$

где Φ_4^* — часть нелинейных членов Φ_4, содержащая свободно входящие критические переменные z, w.

Сделаем в уравнениях (2.5), (3.1) замену переменных [4, 12] $x = u\,(z, w) + \zeta$. В силу того что нелинейные члены Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют условию (2.4), эти уравнения переходят в такую систему, где все нелинейные члены обращаются в нуль при $\zeta = x_1 = 0$, т. е. имеет место особенный случай [3, 4, 12]. В таком случае стационарное движение (2.1) будет асимптотически устойчиво относительно переменных ζ, x_1 и устойчиво относительно z, w, а в первоначальных переменных асимптотически устойчиво относительно позиционных скоростей и устойчиво относительно координат q_i, q_η и импульсов p_α.

Замечание. Если уравнения (2.7) не содержат свободно входящих критических переменных z, w, то стационарное движение будет асимптотически устойчивым относительно позиционных скоростей и координат и устойчивым относительно q_η, p_α.

Пример. Рассмотрим диск на горизонтальной шероховатой плоскости [7]. Положение диска будем определять координатами x и y соприкосновения диска с плоскостью и углами Эйлера θ, ψ, φ. Функция Лагранжа L_0, составленная без учета связей, и уравнения неголономных связей имеют вид

$$L_0 = {}^1/_2 m (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + ma [y^{\cdot} (\theta^{\cdot} \cos\theta \cos\psi - \psi^{\cdot} \sin\theta \sin\psi) - x^{\cdot} (\theta^{\cdot} \cos\theta \sin\psi + \psi^{\cdot} \sin\theta\cos\psi)] + {}^1/_2 (A + m/a^2)\, \theta^{\cdot 2} + {}^1/_2 (A \cos^2\theta + ma^2 \sin^2\theta)\, \psi^{\cdot 2} + {}^1/_2 C (\varphi^{\cdot} - \psi^{\cdot}\sin\theta)^2 - mga\cos\theta \tag{3.2}$$

$$x^{\cdot} = a\varphi^{\cdot}\cos\psi, \quad y^{\cdot} = a\varphi^{\cdot}\sin\varphi \tag{3.3}$$

Здесь m — масса диска, a — радиус, A — экваториальный момент инерции, C — полярный момент инерции.

Рассматриваемая система представляет собой систему Чаплыгина; при этом выражение L, составленное с учетом связей (3.3), не зависит от координат φ, ψ

$$L = {}^1/_2 [(A + ma^2)\, \theta^{\cdot 2} + (C + ma^2)(\varphi^{\cdot} - \psi^{\cdot}\sin\theta)^2 + A\psi^{\cdot 2}\cos^2\theta] - mga\cos\theta$$

Введем переменные $p_1 = \partial L/\partial\varphi^{\cdot}$, $p_2 = \partial L/\partial\psi^{\cdot}$, тогда функция Рауса будет иметь вид

$$R = {}^1/_2 [(A + ma^2)\,\theta^{\cdot 2} - p_1^2 (C + ma^2)^{-1} - p_2^2 (A\cos^2\theta)^{-1} - 2p_1p_2 \sin\theta\, (A\cos^2\theta)^{-1} - p_1^2 \operatorname{tg}^2\theta\, (A)^{-1}] - mga\cos\theta$$

Многообразие стационарных движений определяется уравнением $\partial R_0/\partial\theta = 0$, так как члены неголономности в уравнении для координаты θ обращаются в нуль [7], и допускает решение

$$\theta = \theta_0, \quad p_1 = c_1 = \text{const}, \quad p_2 = c_2 = \text{const}$$

Пусть функция рассеяния имеет вид [7] $F = {}^1/_2 h\theta^{\cdot 2}$.

Полагая $\theta = \theta_0 + \eta$, $p_1 = c_1 + y_1$, $p_2 = c_2 + y_2$, запишем уравнения возмущенного движения

$$y_1^{\cdot} = \eta^{\cdot}\frac{ma^2}{A}\left[(c_1 + y_1)\operatorname{tg}(\theta_0 + \eta) + (c_2 + y_2)\frac{1}{\cos(\theta_0 + \eta)}\right] \tag{3.4}$$

$$y_2^{\cdot} = -\eta^{\cdot} ma^2 \cos(\theta_0 + \eta)\left[(c_1 + y_1)\left(\frac{1}{C + ma^2} + \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_0 + \eta)}{A}\right) + (y_2 + c_2)\frac{\sin(\theta_0 + \eta)}{A\cos^2(\theta_0 + \eta)}\right]$$

$$(A + ma^2)\,\eta^{\cdot\cdot} + h\eta^{\cdot} + \frac{2}{A}(y_1c_1 + y_2c_2)\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\cos^2\theta_0} + (c_1y_2 + c_2y_1)\frac{1 + \sin^2\theta_0}{A\cos^3\theta_0} - mga\eta\cos\theta_0 + \frac{1}{A}(c_1^2 + c_2^2)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}\right)\right]_{\theta_0}\eta + \frac{c_1c_2}{A}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1 + \sin^2\theta}{A\cos^3\theta}\right)\right]_{\theta_0}\eta + \ldots$$

Исследуем устойчивость верчения диска вокруг вертикального диаметра $\theta = 0$, $p_1 = c_1 = 0$, $p_2 = c_2 = \text{const}$, $c_2 = \Omega A$, $\Omega = \psi_0^{\cdot}$ относительно переменных θ, p_1, p_2.

Составив уравнения первого приближения и сделав замену переменных вида (2.5), получим характеристическое уравнение

$$(A + ma^2)\,\lambda^2 + h\lambda + (-mga + A\Omega^2 + ma^2\Omega^2) = 0$$

причем член $ma^2\Omega^2$ возникает из-за членов неголономности в первом уравнении (3.4).

Условие устойчивости

$$\Omega^2 > \frac{mga}{A + ma^2} \tag{3.5}$$

совпадает с условием, полученным в [7].

Если теперь по координате φ добавить силу $Q_\varphi = f\theta^{\cdot}$, то после замены вида (2.5) в приведенном уравнении для θ появится дополнительная потенциальная сила $f\Omega\eta$ и условие устойчивости станет

$$-mga + \Omega^2 (A + ma^2) + \Omega f > 0 \tag{3.6}$$

Следовательно, выбрав $f > 0$, при $\Omega > 0$ и $f < 0$ при $\Omega < 0$ так, чтобы выполнилось условие (3.6), можно стабилизировать неустойчивое верчение при нарушении условия (3.5).

Заметим, что для диска $R_1 = 0$, поэтому в приведенной системе не появляется дополнительных диссипативно-ускоряющих сил и из-за членов неголономности в первых двух уравнениях (3.4) и при действии силы Q_φ.

4. Очевидно, аналогичные результаты будут справедливы и для стационарных движений голономных систем, если уравнения возмущенного движения составлять с учетом возмущений циклических импульсов [2, 5]. При этом для применения методов теории критических случаев в уравнениях для позиционных координат необходимо выписать более подробно, чем в [5], все члены, содержащие критические переменные — возмущения циклических импульсов

$$a_{ij}^* x_j^{\cdot\cdot} + \gamma_{\alpha i} y_\alpha^\cdot + g_{ri}^\alpha (c_\alpha + y_\alpha) x_r^\cdot + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial q_i} c_\alpha y_\beta - \frac{\partial R_0(q, c)}{\partial q_i} +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_{ij}^*}{\partial q_r} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{rj}^*}{\partial q_j}\right) x_r^\cdot x_j^\cdot + \frac{1}{2}\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial q_i} y_\alpha y_\beta = Q_i - Q_{i0}$$
$$\left(g_{ri}^\alpha = \frac{\partial \gamma_{\alpha i}}{\partial q_r} - \frac{\partial \gamma_{\alpha r}}{\partial q_i}\right)$$

При действии сил Q_α вида (2.2) после замены $w = y - F_2 x$ получим характеристическое уравнение приведенной системы

$$\lambda^k \det \{A\lambda^2 + (G_1 + D_1 + \Gamma F_2)\lambda + C_1 + P + (H + F_1)F_2\} = 0 \tag{4.1}$$
$$C_1 = \left\| -\left(\frac{\partial^2 R_0(q, c)}{\partial q_i \partial q_r}\right)_0 \right\|, \quad G_1 + D_1 = \| (g_{ri}^\alpha c_\alpha + f_{ri})_0 \|$$
$$H = \left\| \left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial q_i}\right)_0 c_\beta \right\|$$

Теорема, аналогичная теореме 2, при $Q_\alpha = 0$ переходит в результат, установленный в [5]. Возможность стабилизации стационарных движений голономных систем силами, прикладываемыми по циклическим координатам, доказана методом функций Ляпунова [2], причем в приведенной системе выделены дополнительные потенциальные и гироскопические силы.

В общем случае при действии сил Q_α вида (2.2) кроме указанных сил, как видно из уравнения (4.1), могут возникать и дополнительные диссипативно-ускоряющие и неконсервативные позиционные силы.

Пример. Рассмотрим тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой в случае Ковалевской, т. е. главные моменты инерции связаны соотношением $A = B = 2C$, а центр тяжести находится на главной оси инерции x. В этом случае функция Лагранжа имеет вид [2]

$$L = {}^1/_2 [2C(\psi^{\cdot} \sin^2\theta + \theta^{\cdot 2}) + C(\varphi^\cdot + \psi^\cdot \cos\theta)^2] - Px_0 \sin\theta \sin\varphi$$

где P — вес тела, x_0 — координата центра тяжести.

При $Q_s = 0$ имеем интеграл $p = \partial L/\partial\psi^\cdot = \mathrm{const}$.

Рассмотрим стационарное движение, для которого

$$p = c_1, \quad \varphi = \pi/2, \quad \theta = \theta_0 \tag{4.2}$$

где θ_0 находится из уравнения

$$Px_0 - \frac{c_1^2}{C}\frac{\sin\theta_0}{(\sin^2\theta_0 + 1)^2} = 0$$

Для этого движения коэффициенты приведенной потенциальной энергии $W = -R_0(q, c)$ таковы:

$$c_\varphi = -Px_0 \sin\theta_0, \quad c_\theta = -\frac{c_1^2}{C}\frac{\cos^2\theta_0(1 - 3\sin^2\theta_0)}{(\sin^2\theta_0 + 1)^3}$$

Рассмотрим случай $c_\varphi > 0$; движение (4.2) будет устойчивым для значений $\sin^2\theta_0 > 1/3$, а при $\sin^2\theta_0 < 1/3$ неустойчивым.

Приложим по циклической координате ψ силу

$$Q_\psi = f\theta^\cdot \tag{4.3}$$

Тогда для приведенной системы в уравнении для θ появится дополнительная потенциальная сила и коэффициент c_θ станет равным

$$c_\theta{}^* = c_\theta - \frac{c_1}{C}\,\frac{2\sin\theta_0\cos\theta_0}{(\sin^2\theta_0+1)^2}\,f$$

Выбором величины и знака коэффициента f можно добиться чтобы $c_\theta{}^*$ стало положительным при $\sin^2\theta_0 < 1/3$. При этом выбор знака f зависит от знака c_1.

При действии силы (4.3) для приведенной системы в уравнении для φ появится дополнительная сила

$$\frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0+1}\,f\theta^\cdot = d_3\theta^\cdot$$

Чтобы получить особенный случай, добавим еще диссипативную силу $Q_\theta = -d_1\theta^\cdot$, $d_1 > 0$. Тогда характеристическое уравнение, определяющее ненулевые корни приведенной системы, запишется так:

$$a_{11}{}^*a_{22}{}^*\lambda^4 + a_{22}{}^*d_1\lambda^3 + (a_{22}{}^*c_\theta{}^* + a_{11}{}^*c_\varphi + g^2 - gd_3)\,\lambda^2 + + c_\varphi d_1\lambda + c_\varphi\, c_\theta{}^* = 0$$

$$g = c_1\sin\theta_0\,(2+\cos^2\theta_0)(\sin^2\theta_0+1)^{-2}$$

При выбранных величине и знаке f все коэффициенты уравнения будут положительны (можно проверить, что $-gd_3 > 0$). Критерий Гурвица сводится к условию $g^2 - gd_3 > 0$, которое также выполняется.

Таким образом, неустойчивое при $\sin^2\theta_0 < 1/3$ движение можно стабилизировать приложением силы (4.3), где f выбирается из условия $c_\theta{}^* > 0$, и произвольной по величине диссипативной силой $Q_\theta = -d_1\theta^\cdot$. Если при этом будет действовать диссипативная сила $Q_\varphi = -d_2\varphi^\cdot$, $d_2 > 0$, т. е. будем иметь полную диссипацию по позиционным скоростям, достигнутая стабилизация не разрушится (возможность такой стабилизации отмечена в [2]).

Вращение волчка Ковалевской вокруг вертикали (при $\theta = \varphi = \pi/2$) в неустойчивом случае при $x_0 > 0$ [13] стабилизировано в [2] другим методом.

В этом случае матрица H в (4.1) обращается в нуль, поэтому в приведенной системе не появляется дополнительных потенциальных сил HF_2x, но можно получить силы F_1F_2x. Так, если на тело будут действовать силы $Q_\psi = f\varphi^\cdot$, $Q_\varphi = -fy$, то получим дополнительную потенциальную силу в уравнении для φ. Тогда при действии сил с полной диссипацией по позиционным скоростям можно стабилизировать неустойчивое при $x_0 > 0$ вращение вокруг вертикали при условии $f^2 > Px_0$, причем угловая скорость $\omega = \psi^\cdot$ должна удовлетворять условию $\omega^2 > Px_0/C$, полученному в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 966—976.
2. *Румянцев В. В.* О влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 6, с. 963—973.
3. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 418—426.
4. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. Т. 2. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 473 с.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
6. *Емельянова И. С., Фуфаев Н. А.* Об устойчивости стационарных движений.— В кн.: Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1974, с. 3—9.
7. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.

8. *Шульгин М. Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент: Изд-во САГУ, 1958. 183 с.
9. *Aiserman M. A., Gantmacher F. R.* Stabilität der Gebichgewichtslage in einem nichtholonomen System.— Z. angew. Math. und Mech., 1957, B. 37, H. 1/2, S. 74—75.
10. *Красинская-Тюменева Э. М., Красинский А. Я.* О влиянии структуры сил на устойчивость равновесия неголономных систем.— В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып. 45. Ташкент: АН УзССР, 1977, с. 172—186.
11. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с.
12. *Каменков Г. В.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. 214 с.
13. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской.— ПММ, 1954, т. 18, вып. 4, с. 457—458.

Ташкент

Поступила в редакцию
27.V.1982