Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Воротников В. И.

Рассматривается задача об устойчивости и асимптотической устойчивости движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях, когда некоторые из них могут не быть достаточно малыми. Доказываются теоремы об устойчивости такого рода. Единообразным приемом, основанным на нелинейной замене переменных и дифференциальных неравенствах, приводятся условия устойчивости движения твердого тела с одной неподвижной точкой при постоянно действующих возмущениях.

Известно, что задача об устойчивости движения относительно части переменных (y-устойчивости) для линейных систем эквивалентна задаче об устойчивости движения по Ляпунову для некоторой вспомогательной линейной системы, размерность которой может быть меньше размерности исходной системы. В данной статье установлена связь между коэффициентами характеристического уравнения вспомогательной системы и коэффициентами исходной линейной системы. Это позволяет сформулировать алгебраический критерий асимптотической y-устойчивости линейных станционарых систем алгебраические условия полной управляемости по части переменных линейной стационарной управляемой системы, а также аналог критерия В. М. Попова, дающий условия абсолютной y-устойчивости движения нелинейных регулируемых систем.

1. Пусть имеем линейную стационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$x^{\cdot} = Ax; \quad x = (y_1, \ldots, y_m, \; z_1, \ldots, z_p) = (y, \; z), \quad m > 0,$$
$$p > 0, \quad n = m + p$$

или в переменных y, z

$$y^{\cdot} = Ay + Bz, \quad z^{\cdot} = Cy + Dz \tag{1.1}$$

где A, B, C, D — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим «возмущенную» систему

$$y^{\cdot} = Ay + Bz + R_y(t, \; y, \; z), \qquad z^{\cdot} = Cy + Dz + R_z(t, \; y, \; z) \tag{1.2}$$

где вектор-функции R_y, R_z — постоянно действующие возмущения, причем такие, что система (1.2) имеет решение, отвечающее каждому набору начальных данных x_0, t_0.

Компоненты, составляющие вектор z и вектор-функцию R_z, разобьем на две группы и представим z и R_z в виде $z = (z^+, \; z^-)$, $R_z = (R_z^+, \; R_z^-)$.

Определение 1. Движение $x = 0$ системы (1.1) называется y (z^-)-устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ могут быть указаны положительные числа $\delta_i(\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$, такие, что неравенство

$$t \geqslant 0, \; \| y(t; \; t_0, \; x_0) \| < \varepsilon, \; 0 \leqslant \| z(t; \; t_0, \; x_0) \| < +\infty \tag{1.3}$$

выполняется на всех движениях системы (1.2), начинающихся в области

$$\| y_0 \| < \delta_1(\varepsilon), \quad \| z_0^+ \| < \delta_1(\varepsilon), \; 0 \leqslant \| z_0^- \| < +\infty \tag{1.4}$$

при любых значениях $R(t, \; y, \; z)$, удовлетворяющих условиям

$$\| R_y(t, \; y, \; z) \| < \delta_2(\varepsilon), \qquad \| R_z^+(t, \; y, \; z) \| < \delta_2(\varepsilon),$$
$$0 \leqslant \| R_z^-(t, y, z) \| < +\infty \tag{1.5}$$

в области (1.3).

Если, кроме того, $\lim \| y(t;\ t_0,\ x_0) \| = 0$, $t \to \infty$, то движение $x = 0$ системы (1.1) называется асимптотически $y\,(z^-)$-устойчивым.

Замечания. 1°. Если вектор z^- в (1.4) и вектор-функция $R^-{}_z$ в (1.5) удовлетворяют соответственно условиям $\| z_0^- \| < \delta_1(\varepsilon)$ и $\| R_z^-(t,\ y,\ z) \| < \delta_2(\varepsilon)$, то будем говорить, что движение $x = 0$ системы (1.1) y (0)-устойчиво. При $m = n$ определение y (0)-устойчивости переходит в известное определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях [1], а при $R_y \equiv 0$, $R_z \equiv 0$ — в определение y-устойчивости [2].

2°. Определение $y\,(z^-)$-устойчивости имеет смысл лишь при $m < n$. Действительно, наличие у системы (1.2) произвольных по величине возмущающих факторов приводит к тому, что система (1.2) имеет произвольные по величине положения равновесия и, следовательно, задача $x\,(z^-)$-устойчивости не имеет смысла.

3°. Определение асимптотической $y\,(z^-)$-устойчивости и даже асимптотической y (0)-устойчивости имеет смысл лишь при $m < n$ согласно [1].

Рассмотрим матрицы

(1.6) $$K_p = (B^T,\ D^T,\ B^T,\ \ldots,\ D^{Tp-1}B^T)$$

(1.7) $$L = \begin{Vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Vmatrix}, \quad L_1 = \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ & l_{11} \ldots l_{1p} \\ 0 & l_{h1} \ldots l_{hp} \end{Vmatrix}$$

где E_m — единичная матрица размера $m \times m$, $(l_{i1},\ \ldots,\ l_{ip})^T$, $i = 1,\ \ldots,\ h$ — линейно-независимые векторы-столбцы матрицы K_p, L_2 — произвольная матрица размера $(n - m - h) \times n$, такая, что матрица L невырожденная, $h = \operatorname{rank} K_p$; T — знак транспонирования.

Теорема 1. Пусть движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво. Если у матрицы K_p строки с номерами $i_1,\ \ldots,\ i_N$ нулевые, то это движение $y\,(z^-)$-устойчиво, причем в вектор z^- и вектор-функцию R_z^- входят соответственно переменные z_s и функции R_{zs} с номерами $s = i_1,\ \ldots,\ i_N$.

Доказательство. Сделаем в системе (1.1) замену переменных $\xi = Lx$, где матрица L имеет вид (1.7). В новых переменных уравнения системы (1.1), согласно [3, 4] распадаются на две группы:

$$w^{\bullet} = A_1 w,\quad v^{\bullet} = A_2 w + A_3 v,\quad \xi = (w,\ v)$$

причем $(m + h)$-мерный вектор w, описывающий состояние системы

(1.8) $$w^{\bullet} = A_1 w$$

полностью определяет поведение переменных $y = (y_1,\ \ldots,\ y_m)$ системы (1.1). Рассмотрим наряду с (1.8) систему

$$w^{\bullet} = A_1 w + L_1 R,\quad R = (R_y,\ R_z)$$

Движение $w = 0$ системы (1.8), согласно [3], асимптотически устойчиво по Ляпунову, поэтому [1] оно устойчиво по всем переменным при постоянно действующих малых возмущениях $L_1 R$. Но функция $L_1 R$ не содержит возмущений R_{zs}, $s = i_1,\ \ldots,\ i_N$, поэтому движение $x = 0$ системы (1.1) $y\,(z^-)$-устойчиво, причем в вектор z^- и вектор-функцию R_z^- входят соответственно переменные z_s и функции R_{zs} с номерами $s = i_1,\ \ldots,\ i_N$. Теорема доказана.

Следствие. Если движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво, то оно y (0)-устойчиво.

Пример 1. Пусть уравнения возмущенного движения (1.1) имеют вид

(1.9) $$y_1^{\bullet} = -y_1 + z_1 - 2z_2$$

$$z_1^{\bullet} = 4y_1 + z_1 + 2z_2,\quad z_2^{\bullet} = 8y_1 + 2z_1 + 4z_2$$

$$z_3^{\cdot} = 2y_1 + z_1 + z_2 - z_3$$

$$B = (1,\ 0,\ -2)$$

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \operatorname{rank} K_3 = 1, \quad K_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{Vmatrix}$$

Систему (1.8) в данном случае составят уравнения

$$w^{\cdot} = A_1 w, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Собственные числа матрицы A_1 имеют отрицательные вещественные части, вторая строка матрицы K_1 нулевая, поэтому, согласно теореме 1, движение $y_1 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$ системы (1.9) y_1 (z^-)-устойчиво, причем $z^- = z_2$, $R^-{}_z = R_{z_2}$. Таким образом, невозмущенное движение системы (1.9) y_1-устойчиво при любой возмущающей функции R_{z_2}, действующей на третье уравнение, и достаточно малых по величине возмущающих функциях R_{y_1}, R_{z_1}, R_{z_3}, действующих на три других уравнения этой системы.

Пример 2. Рассмотрим уравнения возмущенного движения регулируемой системы в критическом случае двух нулевых корней

$$(1.10) \qquad y_i^{\cdot} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + h_i f(\sigma), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$z_1^{\cdot} = \gamma_1 f(\sigma), \quad z_2^{\cdot} = \gamma_2 f(\sigma)$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \gamma_0$$

где a_{ik}, h_i, α_k, γ_1, γ_2, β_1, β_2, γ_0 — постоянные числа, $f(\sigma)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\sigma f(\sigma) > 0$, $\sigma \neq 0$.

Введем новую переменную [5] $\gamma\mu_1 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2$, где $\gamma < 0$ — постоянное число. Система (1.10) приводится к виду

$$(1.11) \qquad y_i^{\cdot} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + h_i f(\sigma), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\mu_1^{\cdot} = \Gamma f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k + \gamma\mu_1, \quad \Gamma = \frac{1}{\gamma}(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)$$

Известные условия устойчивости в целом невозмущенного движения системы (1.11) [6] будут, согласно [5], достаточными условиями y-устойчивости в целом невозмущенного движения системы (1.10) при любом конечном числе γ_0, ибо величину γ_0/γ можно сделать достаточно малой за счет подходящего выбора величины γ.

2. Пусть вектор-функции R_y и R_z в системе (1.2) имеют вид

$$R_y = R_{y0} + R_y^*(t,\ y,\ z), \quad R_z = R_{z0} + R_z^*(t,\ y,\ z), \quad R = (R_y,\ R_z), \quad R^* = (R_y^*,\ R_z^*).$$

где R_{y0} и R_{z0} — постоянные векторы соответствующих размеров.

Допустим, что $\operatorname{rank} K_p = h$, и обозначим l_s $(s = 1, \ldots, h)$ линейно-независимые векторы-столбцы матрицы K_p. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что все векторы-столбцы матрицы B^T линейно независимы. Рассмотрим систему алгебраических уравнений для определения λ_{ij} $(i,\ j = 1, \ldots, h)$

$$D^T l_i = \sum_{j=1}^{h} \lambda_{ij} l_j, \quad i = 1, \ldots, h$$

Предположим, что

$$(2.1) \qquad l_j^T R_{z0} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} R_{y0k} + \sum_{l=m+1}^{h} \lambda_{jl} R_{z0l}, \quad j = 1, \ldots, h$$

$$(2.2) \qquad |R_i^*(t, y, z)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} |y_{ik}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

где α_{ik} — достаточно малые положительные постоянные.

Теорема 2. Если движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво, то это движение будет асимптотически $y(0)$-устойчивым при любых удовлетворяющих условиям (2.1) достаточно малых возмущениях R_{y0}, $l^T{}_j R_{z0}$ $(j = 1, \ldots, h)$ и любых удовлетворяющих условиям (2.2) возмущениях $R^*(t, y, z)$. Если, кроме того, у матрицы K_p строки с номерами $i_1, \ldots, i_N$ нулевые, то это движение асимптотически $y(z^-)$-устойчиво, причем в вектор z^- и вектор-функцию $R_z{}^-$ входят соответственно переменные z_s и функции R_{zs} с номерами $s = i_1, \ldots, i_N$.

Доказательство. Ввиду условия (2.1) после введения новых переменных

$$\mu_i = l_i{}^T z^T + R_{y0i}, \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.3}$$

$$\mu_{m+j} = l^T_{m+j} z^T + l^T_{m+j} R_{z0}, \quad j = 1, \ldots, h$$

система

$$y^{\boldsymbol{\cdot}} = Ay + Bz + R_{y0}, \quad z^{\boldsymbol{\cdot}} = Cy + Dz + R_{z0} \tag{2.4}$$

приводится к виду

$$\eta^{\boldsymbol{\cdot}} = A_1 \eta \tag{2.5}$$

где $\eta = (y, \mu)$, а μ — h-мерный вектор, состоящий из переменных (2.3). Приведенные системы (2.4) к виду (2.5) подобно тому, как в [3, 4] при $R_0 = 0$ система (1.1) приводится к системе μ-вида (1.8). Собственные числа матрицы A_1 имеют отрицательные вещественные части и, следовательно, движение $\eta = 0$ системы (2.5) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

При выполнении (2.2), согласно [7], движение $\eta = 0$, $z = 0$ нелинейной системы

$$\eta^{\boldsymbol{\cdot}} = A_1 \eta + L_1 R^*(t, x), \quad z^{\boldsymbol{\cdot}} = Cy + Dz + R_z{}^*(t, x)$$

асимптотически η-устойчиво. Следовательно, для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ найдется $\lambda(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что из $\| \eta_0 \| < \lambda$, $\| z_0 \| < \lambda$ следует $\| \eta(t; t_0, \eta_0, z_0) \| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$ и, кроме того, $\lim \| \eta(t; t_0, \eta_0, z_0) \| = 0$ при $t \to \infty$. По λ и t_0 можно подобрать $\delta_i(\lambda, t_0) = \delta_i(\varepsilon, t_0) > 0$ $(i = 1, 2)$, такие, что из $\| x_0 \| < \delta_1$, $\| R_{y0} \| < \delta_2$, $\| l_j{}^T R_{z0} \| < \delta_2$ $(j = 1, \ldots, h)$ следует $\| \eta(t; t_0, x_0) \| < \lambda$. Тогда при всех $t \geqslant t_0$ имеем $\| y(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon$ и, кроме того, $\lim \| y(t; t_0, x_0) \| = 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть уравнения возмущенного движения (1.1) имеют вид

$$y_1{}^{\boldsymbol{\cdot}} = -y_1 + z_1 - 2z_2, \quad z_1{}^{\boldsymbol{\cdot}} = 4y_1 + z_1, \quad z_2{}^{\boldsymbol{\cdot}} = 2y_1 + z_1 - z_2 \tag{2.6}$$

$$l_1 = (1, -2)^T, \quad D^T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

Поскольку $D^T l_1 = -l_1$, то условие (2.1) в данном случае имеет вид

$$R_{z_1 0} - 2R_{z_2 0} = -R_{y_1 0} \tag{2.7}$$

После введения новой переменной $\mu_1 = z_1 - 2z_2 + R_{y_1 0}$ система

$$y_1{}^{\boldsymbol{\cdot}} = -y_1 + z_1 - 2z_2 + R_{y_1 0}, \quad z_1{}^{\boldsymbol{\cdot}} = 4y_1 + z_1 + R_{z_1 0}$$

$$z_2{}^{\boldsymbol{\cdot}} = 2y_1 + z_1 - z_2 + R_{z_2 0}$$

приводится к виду

$$y_1{}^{\boldsymbol{\cdot}} = -y_1 + \mu_1, \quad \mu_1{}^{\boldsymbol{\cdot}} = -\mu_1$$

Поэтому при выполнении условий (2.2) невозмущенное движение системы (2.6) асимптотически $y_1(0)$-устойчиво согласно теореме 2.1.

3. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, вызванное начальными и постоянно действующими возмущениями. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$(3.1)\qquad Ax_1^\cdot = (B - C)\, x_2x_3 + mg\,(x_{30}\gamma_2 - x_{20}\gamma_3) + A\Phi_1\,(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$$
$$\gamma_1^\cdot = x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3\ (123,\ ABC)$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела, $x_i\,(i = 1, 2, 3)$ — проекции угловой скорости тела на главные оси инерции, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции на главные оси инерции единичного вектора, направленного вдоль неподвижной вертикальной оси, $x_{i0}\,(i = 1, 2, 3)$ — координаты центра инерции тела в главных осях инерции, $\Phi_1\,(t, x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ — непрерывные постоянно действующие возмущения, $\Phi_i\,(t,\ 0, 0, 0) \equiv 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Будем изучать устойчивость невозмущенного движения системы (3.1) при ряде предположений относительно вида функций Φ_i $(i = 1, 2, 3)$.

1°. $\Phi_i\,(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = \alpha_i x_i$, $\alpha_i = \mathrm{const}$, $x_{i0}\,(i = 1,2, 3)$,
т. е. система (3.1) имеет вид

$$(3.2)\qquad Ax_1^\cdot = \alpha_1x_1 + (B - C)x_2x_3\,(123,\ ABC)$$

Введем новую переменную $\mu_1 = (B - C)x_2x_3/A$. При условии $C < A < B$ или $C > A > B$ имеем следующие оценки для системы (3.2):

а) $x_1^\cdot = \alpha_1x_1 + \mu_1$

$$\mu_1^\cdot = (\alpha_2 + \alpha_3)\,\mu_1 + x_1\frac{B-C}{A}\left[\frac{C-A}{B}\,x_3^2 + \frac{A-B}{C}\,x_2^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha_2 + \alpha_3)\,\mu_1$$

в области

$$(3.3)\qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant H,\quad 0 < |\,x_i\,| < +\infty\quad (i = 2, 3)$$

б) $x_1^\cdot = \alpha_1x_1 + \mu_1$, $\mu_1^\cdot \geqslant (\alpha_2 + \alpha_3)\mu_1$
в области

$$(3.4)\qquad -H \leqslant x_1 \leqslant 0,\quad 0 \leqslant |\,x_i\,| < +\infty\quad (i = 2, 3)$$

Из оценок а), б) следует, что переменная $x_1\,(t)$ системы (3.2) будет описываться уравнением

$$x_1^\cdot = \alpha_1x_1 + \varphi\,(t),\qquad |\,\varphi\,(t)\,| \leqslant x_2\,(t_0)\,x_3\,(t_0)\,\exp\,(\alpha_2 + \alpha_3)\,t$$

поэтому при условии $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$ движение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.2) асимптотически x_1-устойчиво в целом.

Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$ или $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, то из оценок а), б) вытекает x_1-устойчивость движения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Теорема 3. Пусть выполняется одно из трех условий

$$(3.5)\qquad C < A < B,\quad B < A < C,\quad A = B \neq C$$

Если $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$, то движение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.2) асимптотически x_1-устойчиво в целом. Если $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ или $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$, то это движение x_1-устойчиво (неасимптотически).

2°. $\Phi_i\,(t, x_1, x_2, x_3) = \alpha_i\,(t)x_i^\cdot$, $\alpha_i\,(t)$ — кусочно-непрерывные функции t, $x_{i0} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Система (3.1) имеет вид

$$(3.6)\qquad Ax_1^\cdot = \alpha_1\,(t)x_1 + (B - C)\,x_2x_3\quad (123,\ ABC)$$

При условии $C < A < B$ или $C > B > B$ имеем оценки для системы (3.6)

$$x_1^\cdot = \alpha_1\,(t)x_1 + \mu_1,\quad \mu_1^\cdot \leqslant [\alpha_2\,(t) + \alpha_3\,(t)]\mu_1\ \text{ в области (3.3)}$$
$$x_1^\cdot = \alpha_1\,(t)x_1 + \mu_1,\ \mu_1^\cdot \geqslant [\alpha_2\,(t) + \alpha_3\,(t)]\,\mu_1\ \text{ в области (3.4)}$$

Поэтому переменная $x_1(t)$ системы (3.6) описывается уравнением

$$x_1^{\bullet} = \Gamma_1(t)\,x_1 + \varphi_1(t), \quad |\varphi_1(t)| \leqslant x_2(t_0)\,x_3(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\Gamma_2(\tau)\,d\tau$$

$$\Gamma_1(t) = \alpha_1(t),\ \Gamma_2(\tau) = \alpha_2(\tau) + \alpha_3(\tau)$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$|x_1(t)| \leqslant |x_1(t_0)|\left\{\exp\int_{t_0}^{t}\Gamma_1(s)\,ds\right\} + \int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}\Gamma_1(\tau)\,d\tau\right\}\left\{x_2(t_0)\,x_3(t_0)\int_{t_0}^{s}\Gamma_2(\theta)\,d\theta\right\}ds \tag{3.7}$$

Теорема 4. Пусть выполняется одно из трех условий (3.5). Если

$$\int_{t_0}^{t}\Gamma_i(\tau)\,d\tau < A_i, \quad A_i = \mathrm{const} \quad (i = 1, 2)$$

$$\int_{t_0}^{t}\Gamma_i(\tau)\,d\tau \to -\infty, \quad t \to \infty$$

то движение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.6) асимптотически x_1-устойчиво в целом.

Доказательство вытекает из неравенства (3.7).

3°. $\Phi_1(t, x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1)$, где $f_1(x_1)$ — непрерывная функция в области $|x_1| \leqslant H$; $\Phi_i(t, x_1, x_2, x_3) = \alpha_i x_i$, $\alpha_i = \mathrm{const}$ $(i = 2, 3)$; $x_{i0} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Система (3.1) примет вид

$$x_1^{\bullet} = f_1(x_1) + \frac{B-C}{A}x_2x_3, \quad x_2^{\bullet} = \alpha_2x_2 + \frac{C-A}{B}x_1x_3, \quad x_3^{\bullet} = \alpha_3x_3 + \frac{A-B}{C}x_1x_2 \tag{3.8}$$

При условии $C < A < B$ или $C > A > B$ имеем оценки для системы (3.8)

$$\begin{aligned} &x_1^{\bullet} = f_1(x_1) + \mu_1, \quad \mu_1^{\bullet} = (\alpha_2 + \alpha_3)\,\mu_1 \text{ в области (3.3)} \\ &x_1^{\bullet} = f_1(x_1) + \mu_1, \quad \mu_1^{\bullet} = (\alpha_2 + \alpha_3)\,\mu_1 \text{ в области (3.4)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Рассмотрим систему

$$\xi_1^{\bullet} = f_1(\xi_1) + \xi_2, \quad \xi_2^{\bullet} = (\alpha_2 + \alpha_3)\,\xi_2 \tag{3.10}$$

являющуюся системой сравнения для (3.9).

Теорема 5. Пусть выполняется одно из двух условий: $C < A < B$ или $C > A > B$. Если $(\alpha_2 + \alpha_3)\,f_1(\xi_1)\xi_1 > 0$, $f_1(\xi_1)/\xi_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) < 0$ $(\xi_1 \neq 0)$

$$\int_{0}^{\xi_1}(\alpha_2 + \alpha_3)\,f_1(\xi_1)\,d\xi_1 \to \infty, \quad |\xi_1| \to \infty$$

то движение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.8) асимптотически x_1-устойчиво в целом.

Доказательство. При выполнении условий теоремы движение $\xi_1 = \xi_2 = 0$ системы (3.10) асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом [8], поэтому, согласно [9, 10], движение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.8) асимптотически x_1-устойчиво в целом. Теорема доказана.

Рассмотрим случай $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Тогда поведение переменной $x_1(t)$ системы (3.8) определяется, ввиду оценок (3.9), уравнением

$$x_1^{\bullet} = f_1(x_1) + \varphi_2(t), \quad |\varphi_2(t)| \leqslant x_2(t_0)\,x_3(t_0)$$

Согласно теореме об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях [1], вопрос об x_1-устойчивости движения $x_1=x_2=x_3=0$ системы (3.8) сводится к вопросу об асимптотической устойчивости по Ляпунову движения $\xi=0$ системы $\xi^{\cdot}=f_1(\xi)$.

4°. $\Phi_1(t, x_1, x_2, x_3)=f_1(x_1)$; $\Phi_i(t, x_1, x_2, x_3)=f_i(x_2, x_3)$ $(i=2, 3)$; $x_{i0}=0$; f_i $(i=1, 2, 3)$ — непрерывные по совокупности переменных функции в области $|x_i|\leqslant H$ $(i=1, 2, 3)$. Система (3.1) имеет вид

$$Ax_1^{\cdot}=f_1(x_1)+(B-C)x_2x_3 \quad (123\ ABC) \tag{3.11}$$

При условии $C<A<B$ или $C>A>B$ имеем оценки для системы (3.11)

$$\begin{gathered} x_1^{\cdot}=f_1(x_1)+\mu_1, \quad \mu_1^{\cdot}\leqslant x_2f_3+x_3f_2 \text{ в области (3.3)} \\ x_1^{\cdot}=f_1(x_1)+\mu_1, \quad \mu_1^{\cdot}\geqslant x_2f_3+x_3f_2 \text{ в области (3.4)} \end{gathered} \tag{3.12}$$

Допустим, что

$$x_2f_3+x_3f_2=\psi(\mu_1) \tag{3.13}$$

где $\psi(\mu_1)$ — непрерывная функция в области $|\mu_1|\leqslant H$.

Теорема 6. Если движение $\xi_1=\xi_2=0$ системы

$$\xi_1^{\cdot}=f_1(\xi_1)+\xi_2, \quad \xi_2^{\cdot}=\psi(\xi_2)$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом, то движение $x_1=x_2=x_3=0$ системы (3.11) асимптотически x_1-устойчиво в целом.

Доказательство вытекает из (3.12), (3.13) и результата [9, 10].

5°. $\Phi_i(t, x_1, x_2, x_3)=\alpha_ix_i$, $\alpha_i=\text{const}$ $(i=1, 2, 3)$; $x_{10}=x_{20}=0$, $x_{30}\neq 0$, $A=B\neq C$.

Теорема 7. При выполнении условий $\alpha_1<0$, $\alpha_3<0$, $\alpha_2+\alpha_3<0$ движение $x_1=x_2=x_3=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$ системы (3.1) $(x_1, x_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$-устойчиво.

Доказательство. При сделанных допущениях для системы (3.1) справедливы оценки

$$\begin{gathered} x_1^{\cdot}=\alpha_1x_1+\mu_1+\varphi_3(t) \\ \mu_1^{\cdot}\leqslant(\alpha_2+\alpha_3)\mu_1-\varphi_4(t) \text{ в области (3.3)} \\ \mu_1^{\cdot}\geqslant(\alpha_2+\alpha_3)\mu_1-\varphi_4(t) \text{ в области (3.4)} \\ \left(\varphi_3(t)=\frac{1}{A}mgx_{30}\gamma_2, \quad \varphi_4(t)=-\frac{A-C}{A^2}mgx_{30}\gamma_1x_3\right) \end{gathered}$$

Ввиду наличия первого интеграла $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$ у системы (3.1) ее невозмущенное движение $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$-устойчиво. Поскольку $\alpha_3<0$, то для любых $\varepsilon>0$, $t_0\geqslant 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0)>0$, такое, что из $|x_i(t_0)|<\delta$, $|\gamma_i(t_0)|<\delta$ $(i=1, 2, 3)$ следует $|\varphi_i(t)|<\varepsilon$ $(i=3, 4)$ при всех $t\geqslant t_0$. Следовательно, движение $\xi_1=\xi_2=0$ системы

$$\xi_1^{\cdot}=\alpha_1\xi_1+\xi_2, \quad \xi_2^{\cdot}=(\alpha_2+\alpha_3)\xi_2$$

устойчиво при малых постоянных возмущениях $\varphi_i(t)$ $(i=3, 4)$ и, согласно [9, 10], движение $x_1=x_2=x_3=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$ системы (3.1) $(x_1, x_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$-устойчиво. Теорема доказана.

Покажем в заключение, что доказанная в пп. 1°—5° x_1-устойчивость невозмущенного движения системы 3.1 — более общее понятие, чем определение x_1-устойчивости в смысле В. В. Румянцева [2]. Действительно, в пп. 1°—5° показано, что для любого числа $\varepsilon>0$ найдется положительное число $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что из

$$\begin{gathered} |x_1(t_0)|<\delta, \quad |x_2(t_0)x_3(t_0)|<\delta \\ x_0=(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)) \end{gathered} \tag{3.14}$$

следует $|x_1(t;\ t_0,\ x_0)| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Второе из неравенств (3.14) возможно при

$$|x_2(t_0)| < \delta_1, \quad |x_3(t_0)| < \Delta$$

или при

$$|x_2(t_0)| < \Delta, \quad |x_3(t_0)| < \delta_1$$

где δ_1 — достаточно малое, а Δ — некоторое конечное (не малое) число. Следовательно, начальные возмущения в определении x_1-устойчивости невозмущенного движения системы (3.1) могут не быть достаточно малыми, как это предполагалось в [2].

4. Сформулируем алгебраический критерий асимптотической y-устойчивости движения $x = 0$ системы (1.1). Допустим, что $\operatorname{rank} K_p = h$, и рассмотрим матрицы Q_i $(i = 1, \ldots, 5)$ следующего вида:

а) строки матрицы Q_1 размера $h \times p$ — линейно-независимые векторы-столбцы матрицы K_p;

б) столбцы матрицы Q_2 размера $h \times h$ — линейно-независимые векторы-столбцы матрицы Q_1 (пусть эти столбцы матрицы Q_1 имеют номера $i_1, \ldots, i_h$);

в) строка с номером i_s $(s = 1, \ldots, h)$ матрицы Q_3 размера $(n - m) \times h$ является строкой с номером s матрицы Q_2^{-1}, а остальные строки матрицы Q_3 нулевые;

г) $Q_4 = \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & Q_1 \end{Vmatrix}, \quad Q_5 = \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & Q_3 \end{Vmatrix}$

Q_2^{-1} — матрица, обратная к матрице Q_2; E_m — единичная матрица размера $m \times m$.

Теорема 4.1. Для асимптотической y-устойчивости движения $x = 0$ системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$|Q_4 A^* Q_5 - \lambda E_{m+h}| = 0 \tag{4.1}$$

имели отрицательные вещественные части.

Доказательство. Согласно [3], задача об y-устойчивости движения для (1.1) эквивалентна задача об устойчивости по Ляпунову для некоторой вспомогательной линейной стационарной системы $\zeta^{\cdot} = G\zeta$ (назовем ее системой μ-вида) размерности $m + h$. При этом элементы g_{ij} матрицы G являются элементами с номерами $i, j = 1, \ldots, m + h$ матрицы LA^*L^{-1}, в которой L имеет вид (1.7). Обозначим $\{l_{ij}^{-}\}$ $(i,\ j = 1, \ldots, n)$ элементы матрицы L^{-1}. Поскольку столбцы с номерами $i_1, \ldots, i_h$ матрицы Q_1, а следовательно, и столбцы с номерами $m + i_s$ $(s = 1, \ldots, h)$ матрицы L_1 линейно независимы матрицу L можно представить в виде

$$L = \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & Q_1 \\ 0 & L_3 \end{Vmatrix}, \quad L_1 = \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & Q_1 \end{Vmatrix}, \quad L_2 = \|0\ L_3\|$$

причем столбцы с номерами $i_1, \ldots, i_h$ в матрице L_3 можно взять нулевыми, а остальные элементы матрицы L_3 выбрать так, чтобы $|L| \neq 0$.

Учтем, что

$$l_{ij}^{-} = [(-1)^{i+j} L_{ji}]/|L| \quad (i,\ j = 1, \ldots, n)$$

где L_{ji} — минор определителя $|L|$ матрицы L, получающийся из $|L|$ вычеркиванием j-й строки и i-го столбца. Кроме того, от перестановки столбцов в квадратной матрице может измениться только знак ее определителя, т. е.

$$|L|=\begin{vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & Q_1 \\ 0 & L_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & L_4 \\ 0 & 0 & L_5 \end{vmatrix}(-1)^k$$

где k — число сделанных перестановок векторов-столбцов в матрице L, а в матрицы L_4, L_5 входят соответственно те столбцы матрицы Q_1, которые не содержатся в Q_2 и ненулевые матрицы L_3. Будем иметь

$$l_{ij}^{-}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j; \quad i,j=1,\dots,m \end{cases}$$

$$l_{ij}^{-}=0 \qquad (i=1,\dots,m;\ j=m+1,\dots,m+h)$$

$$(i=m+i_s,\ s=1,\dots,h;\ j=1,\dots,m)$$

$$(i=m+i_s,\ s\neq 1,\dots,h;\ j=1,\dots,m+h)$$

$$l_{m+i_s,\,m+k}=[(-1)^{s+k}Q_{2ks}]/|Q_2| \qquad (k,s=1,\dots,h)$$

(Q_{2ks} — минор определителя $|Q_2|$, получающийся из $|Q_2|$ вычеркиванием k-й строки и s-го столбца).

Поэтому

$$Q_5=\|l_{ij}^{-}\| \quad (i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m+h)$$

и, следовательно

$$Q_4A^*Q_5=\|g_{ij}\| \quad (i,\ j=1,\dots,m+h)$$

Теорема доказана.

Замечание. Уравнение (4.1) является характеристическим уравнением введенной в [3] системы уравнений μ-вида. Поэтому в теореме 4.1 в отличие от результата [3] установлена прямая алгоритмическая связь между видом коэффициентов в системе (1.1) и условиями ее y-устойчивости.

Пример 4. Пусть система (1.1) имеет вид (2.6). В данном случае $m=1$ и $p=2$, а

$$\operatorname{rank}(B^T,\ D^TB^T)=\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix}=1$$

Составим матрицы Q_i $(i=1,\dots,5)$

$$Q_1=\|1\ -2\|,\quad Q_2=\|1\|,\quad Q_3=\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$Q_4=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix},\quad Q_5=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\quad Q_4A^*Q_5=\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Уравнение (4.1) имеет вид

$$|Q_4A^*Q_5-\lambda E_2|=(\lambda+1)^2=0. \tag{4.2}$$

Корни уравнения (4.2) отрицательны, поэтому движение $y_1=z_1=z_2=0$ системы (2.6) асимптотически y_1-устойчиво.

5. Получим достаточные условия полной управляемости по части переменных (полной y-управляемости [4, 11]) для линейной управляемой системы

$$x^{\cdot}=A^*x+B^*u;\quad x=(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_p)= \\ =(y,z),\quad m>0,\ p>0,\ n=m+p \tag{5.1}$$

в которой x — n-мерный вектор состояния системы; $u=(u_1,\dots,u_r)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий; A^*, B^* — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Теорема 5.1. Если

$$\operatorname{rank}(Q_4B^*,\ Q_4A^*Q_5Q_4B^*,\dots,(Q_4A^*Q_5)^{m+h-1}Q_4B^*)=m+h \tag{5.2}$$

то система (5.1) вполне y-управляема.

Доказательство. Сделаем в системе (5.1) замену переменных $\zeta = L_1 x$, $x = (y, z)$. Согласно теореме 4.1, поведение переменных, входящих в вектор ζ, будет описываться уравнениями

$$\zeta^{\cdot} = Q_4 A^* Q_5 \zeta + Q_4 B^* u \tag{5.3}$$

При выполнении (5.2) система (5.3) вполне управляема [11] и, следовательно, система (5.1) вполне y-управляема. Теорема доказана.

6. Получим достаточные условия абсолютной y-устойчивости [5] для нелинейных регулируемых систем [6]

$$x^{\cdot} = A^* x + bf(\sigma), \quad \sigma = ex$$
$$x = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = (y, z), \ m > 0$$
$$p > 0, \ n = m + p$$

или, в переменных y, z

$$y^{\cdot} = Ay + Bz + b_1 f(\sigma), \quad z^{\cdot} = Cy + Dz + b_2 f(\sigma) \tag{6.1}$$
$$\delta = e_1 y + e_2 z$$

где $f(\sigma)$ — произвольная непрерывная удовлетворяющая условию $0 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant k\delta^2$ функция, A, B, C, D, b_1, b_2, e_1, e_2 — постоянные матрицы и векторы соответствующих размеров.

Допустим, что

$$\operatorname{rank}(B^*, D^T B^*, \ldots, D^{Tp-1} B^*) = \operatorname{rank} K_p^* = h$$

где $B^* = \| B^T, e_2^T \|$, и применяя правила а) — г) из п. 4, построим матрицы Q_i^* $(i = 1, \ldots, 5)$. (Правила а) —г) из п. 4. здесь выполняются с той лишь разницей, что в а) вместо K_p надо взять матрицу K_p^*)

Теорема 6.1. Пусть существует такое вещественное число q (без ограничения общности можно предполагать, что $q \geqslant 0$), что при всех $\omega \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + qi\omega) W(i\omega) > 0$$

$$(W(i\omega) = (eQ_5^*)(Q_4^* A^* Q_5^* - i\omega E_{m+h}) Q_4^* b$$

Тогда движение $x = 0$ системы (6.1) абсолютно y-устойчиво.

Доказательство. Как и в теореме 4.1, можно показать, что уравнения

$$\zeta^{\cdot} = Q_4 A^* Q_5 \zeta + Q_4^* bf(\sigma), \quad \sigma = eQ_5^* \zeta \tag{6.2}$$

будут являться системой уравнений μ-вида [5] для (6.1), а функция $W(i\omega)$ — частотной характеристикой линейной части системы (6.2). Согласно критерию В. М. Попова [12] и результату [5], движение $x = 0$ системы (6.1) абсолютно y-устойчиво. Теорема доказана.

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4, с. 9—16.
3. *Воротников В. И., Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2, с. 268—271.

4. *Воротников В. И.* О полной управляемости и стабилизации движения относительно части переменных.— Автоматика и телемеханика, 1982, № 3, с. 15—21.
5. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 441—450.
6. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. 216 с.
7. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 659—665.
8. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
9. *Воротников В. И.* Об устойчивости и стабилизации движения относительно части переменных.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 6, с. 914—923.
10. *Матросов В. М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. IV.— Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, N 12, с. 2129—2143.
11. *Красовский Н. Н.* Теория управления движения. М. : Наука, 1968. 475 с.
12. *Попов В. М.* Абсолютная устойчивость нелинейных систем автоматического управления.— Автоматика и телемеханика, 1962, № 8, с. 961—979.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию
22.VI.1981