Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 539.375

О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА РАСКРЫТИЕ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ

Филиппова Л. М.

В рамках теории малых деформаций, наложенных на конечную деформацию рассматривается задача о нагружении равномерным давлением поверхности плоской круговой трещины в предварительно растянутом или сжатом вдоль трещины упругом пространстве. Используется модель несжимаемого изотропного материала общего вида. Задача решается приведением к парному интегральному уравнению. Установлено, что начальное напряжение не меняет порядка особенности поля напряжений около ребра трещины, но влияет на характер распределения напряжений вокруг края трещины и перемещения берегов трещины.

Плоские задачи о трещинах в телах с начальными напряжениями изучались в [1]. Пространственная осесимметричная задача о круглой трещине для материала частного вида решена в [2].

1. Уравнения равновесия, линеаризованные около состояния однородной конечной деформации, для изотропного несжимаемого упругого тела можно записать в виде [3—5]

$$\frac{\partial \theta_{nk}}{\partial x_n}=0,\qquad \frac{\partial u_m}{\partial x_m}=0 \tag{1.1}$$

$$\theta_{nk}=s_{nk}-\varepsilon_{nm}t_{mk}-t_{nm}\omega_{mk}$$

$$\varepsilon_{nm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right),\qquad \omega_{mk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right)$$

Здесь x_n — декартовы координаты в деформированном теле, u_m — компоненты вектора перемещения, t_{mk} — компоненты напряжения в начальном деформированном состоянии. Если координатные оси направлены по главным осям тензора напряжений начального состояния, то для величин s_{nk} справедливы представления [4, 5] (невыписанные соотношения получаются круговой перестановкой индексов)

$$s_{11}=(\lambda_1^2\Pi_{11}+\lambda_1\Pi_1)\,\varepsilon_{11}+\lambda_1\lambda_2\Pi_{12}\varepsilon_{22}+\lambda_1\lambda_3\Pi_{13}\varepsilon_{33}+p \tag{1.2}$$

$$s_{12}=s_{21}=\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}(\lambda_1\Pi_1-\lambda_2\Pi_2)\,\varepsilon_{12} \qquad (123)$$

$$\Pi_i=\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda_i},\qquad \Pi_{ij}=\frac{\partial^2\Pi}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j},\qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$$

Здесь λ_i — главные растяжения в начальном состоянии, Π — удельная потенциальная энергия материала, представленная как симметричная функция главных растяжений, p — функция добавочного давления.

Рассмотрим неограниченное пространство из несжимаемого упругого материала, ослабленное бесконечно тонкой плоской круглой трещиной (щелью), расположенной в горизонтальной плоскости $x_3=0$.

Допустим, что пространство подвергается конечной деформации, обусловленной равномерной нагрузкой, приложенной на бесконечности и действующей в плоскости трещины. Очевидно, что при таком нагружении наличие трещины не сказывается, т. е. решению поставленной задачи соответствуют однородная деформация и однородное поле напряжений

(1.3) $$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \lambda_3^{-1/2}, \quad t_{11} = t_{22} = t = \lambda \Pi_1 - \lambda_3 \Pi_3$$
$$t_{33} = t_{13} = t_{12} = t_{23} = 0$$

На описанную конечную деформацию накладывается малая деформация, вызванная нагружением поверхности трещины равномерным давлением интенсивности τ. В силу предположения о малости добавочной деформации последнюю задачу будем рассматривать в линеаризованной постановке.

Заметим, что суперпозиция решений сформулированной задачи и задачи об однородной малой деформации в предварительно напряженном пространстве без трещины, возникающей при действии равномерно растягивающей вертикальной нагрузки τ, дает решение задачи о раскрытии трещины с незагруженной поверхностью силами, приложенными на бесконечности.

Для осесимметричной деформации при наличии начального напряженно-деформированного состояния вида (1.3) система уравнений (1.1), (1.2) записывается следующим образом:

(1.4) $$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z}\right) + \frac{\partial q}{\partial r} = 0$$
$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial z} + \varkappa\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad q = \theta_{33} = s_{33}$$

(1.5) $$\mu = 2\lambda_3\Pi_3 + \lambda^2\Pi_{11} + \lambda_3^2\Pi_{33} - 2\lambda\lambda_3\Pi_{13}$$
$$\nu = \lambda_3^2\frac{\lambda_3\Pi_3 - \lambda\Pi_1}{\lambda_3^2 - \lambda^2}, \qquad \varkappa = \lambda^2\frac{\lambda_3\Pi_3 - \lambda\Pi_1}{\lambda_3^2 - \lambda^2}$$

Здесь r, $z = x_3$ — цилиндрические координаты в первоначально деформированном теле, u, w — компоненты перемещения соответственно в радиальном и вертикальном направлениях.

Сформулированная выше задача о трещине эквивалентна краевой задаче для системы уравнений (1.4) в полупространстве $z > 0$ при следующих граничных условиях на плоскости $z = 0$:

(1.6) $$\theta_{zr} = \nu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0, \qquad 0 \leqslant r < \infty$$
$$q = -\tau, \ 0 \leqslant r < a; \ w = 0, \ a \leqslant r < \infty$$

Здесь a — радиус круглой трещины в начальном деформированном состоянии.

2. Решение системы (1.4) будем искать в виде интегральных разложений Ханкеля

(2.1) $$u = \int_0^\infty U(z,\alpha) J_1(\alpha r)\,d\alpha, \qquad w = \int_0^\infty W(z,\alpha) J_0(\alpha r)\,d\alpha$$
$$q = \int_0^\infty Q(z,\alpha) J_0(\alpha r)\,d\alpha$$

Из уравнений (1.4) находим

(2.2) $$U = A_1(\alpha)\,\omega_1 E_1 + A_2(\alpha)\,\omega_2 E_2, \quad W = A_1(\alpha)\,E_1 + {}$$
$$+ A_2(\alpha)\,E_2$$
$$Q = \alpha A_1(\alpha)\,\omega_1(\nu - \mu + \nu\omega_1^2)\,E_1 + \alpha A_2(\alpha)\,\omega_2(\nu - \mu + {}$$
$$+ \nu\omega_2^2)\,E_2$$
$$(E_i = \exp(-\alpha\omega_i z), \ i = 1, 2)$$

где ω_1, ω_2 — корни уравнения

$$\nu\omega^4 - (\mu - 2\nu)\,\omega^2 + \varkappa = 0 \tag{2.3}$$

имеющие положительную вещественную часть.

Если учесть, что $\varkappa\nu^{-1} = \lambda^2\lambda_3^{-2} > 0$, то решение уравнения (2.3) можно представить в форме Декарта — Эйлера

$$2\omega = \pm\sqrt{\Delta_+} \pm \sqrt{\Delta_-},\quad \Delta_\pm = \mu\nu^{-1} - 2 \pm 2\sqrt{\varkappa\nu^{-1}} \tag{2.4}$$

Из (2.4) вытекает, что необходимым и достаточным условием существования двух корней с положительной действительной частью является неравенство

$$\Delta_+ > 0 \tag{2.5}$$

При нарушении условия (2.5) все корни уравнения (2.3) будут чисто мнимыми, т. е. краевая задача (1.4), (1.6) не будет иметь решений, затухающих при $z \to \infty$.

Сославшись на (1.5), видно, что условие (2.5) будет выполнено при следующих ограничениях на функцию упругого потенциала П:

$$\frac{\lambda\Pi_1 - \lambda_3\Pi_3}{\lambda - \lambda_3} > 0 \tag{2.6}$$

$$\lambda^2\Pi_{11} + \lambda_3^2\Pi_{33} - 2\lambda\lambda_3\Pi_{13} + 2\lambda\lambda_3\frac{\Pi_1 + \Pi_3}{\lambda + \lambda_3} > 0$$

Соотношения (2.6) мало отличаются (знак $>$ вместо $\geqslant$) от ограничений на упругий потенциал несжимаемого материала, входящих в число найденных в [6] необходимых и достаточных условий выполнимости неравенства Адамара — критерия вещественности скоростей плоских волн в предварительно напряженном теле.

Из первого граничного условия (1.6) получим

$$A_2 = -(1 + \omega_1^2)(1 + \omega_2^2)^{-1}A_1 \tag{2.7}$$

Согласно (2.2), (2.7), имеем

$$u(r, z) = \int_0^\infty A_1(\alpha)\left(\omega_1 E_1 - \frac{1 + \omega_1^2}{1 + \omega_2^2}\omega_2 E_2\right) J_1(\alpha r)\, d\alpha \tag{2.8}$$

$$w(r, z) = \int_0^\infty A_1(\alpha)\left(E_1 - \frac{1 + \omega_1^2}{1 + \omega_2^2}E_2\right) J_0(\alpha r)\, d\alpha$$

$$q(r, z) = \int_0^\infty A_1(\alpha)\,\alpha\,[\omega_1(\nu - \mu + \nu\omega_1^2)E_1 -$$

$$- \omega_2(\nu - \mu + \nu\omega_2^2)(1 + \omega_1^2)(1 + \omega_2^2)^{-1}E_2]\, J_0(\alpha r)\, d\alpha$$

Удовлетворяя краевым условиям (1.6), придем к парному интегральному уравнению для функции $A_1(\alpha)$.

$$\int_0^\infty A_1(\alpha)\,\alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha = -\Phi(\lambda)\,\tau, \qquad 0 \leqslant r < a \tag{2.9}$$

$$\int_0^\infty A_1(\alpha)\, J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0, \qquad a < r < \infty$$

$$\Phi(\lambda) = (1 + \omega_2^2)(\omega_1 - \omega_2)^{-1}\varphi(\lambda)$$

$$\varphi(\lambda) = [(1 + \omega_1^2)(1 + \omega_2^2)\,\nu + (\omega_1\omega_2 - 1)\,\mu]^{-1}$$

3. Уравнение (2.9) относится к классу уравнений, решение которых известно [7] и имеет вид

$$A_1(\alpha) = \frac{2a^2}{\pi}\Phi(\lambda)\,\tau\left(\frac{\cos\alpha a}{\alpha a} - \frac{\sin\alpha a}{\alpha^2 a^2}\right) \tag{3.1}$$

Используя [8], из (2.8), (3.1) получаем

(3.2)
$$u(r, 0) = {}^1/_2 \tau (\omega_1\omega_2 - 1) r\varphi(\lambda) \quad (r \leqslant a)$$
$$w(r, 0+) = 2\tau\pi^{-1} (\omega_1 + \omega_2) \sqrt{a^2 - r^2}\, \varphi(\lambda) \quad (r \leqslant a)$$
$$s_{33}(r, 0) = \frac{2\tau}{\pi}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \arcsin\frac{a}{r}\right) \quad (r > a)$$

Формулы (3.2) показывают, что для любого несжимаемого изотропного материала порядок особенности напряжений вблизи края трещины такой же, как и в известной [9, 10] задаче о круглой трещине без учета начальных напряжений.

В качестве примера рассмотрим случай неогуковского материала, для которого упругий потенциал задается выражением

(3.3)
$$\Pi = {}^1/_2 G (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)$$

где G — модуль сдвига. Из (1.5), (2.4) имеем

(3.4)
$$\nu = G\lambda^{-4}, \quad \mu = G(\lambda^2 + 3\lambda^{-4}), \quad \varkappa = G\lambda^2, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \lambda^3$$

Для перемещений верхней стороны трещины из (3.2), (3.4) получим

(3.5)
$$u = \frac{\tau(\lambda^3 - 1) N(\lambda) r}{4G(1 + \lambda^3)}, \quad w = \frac{\tau}{4G} N(\lambda) \sqrt{a^2 - r^2}$$
$$N(\lambda) = \frac{2\lambda^4 (1 + \lambda^3)}{\lambda^9 + \lambda^6 + 3\lambda^3 - 1}$$

Формулы (2.8) для случая неогуковского материала приводятся к виду

(3.6)
$$u(r, z) = \int_0^\infty A_1(\alpha)\left(e^{-\alpha z} - \frac{2\lambda^3}{1 + \lambda^6} e^{-\alpha\lambda^3 z}\right) J_1(\alpha r)\, d\alpha$$
$$w(r, z) = \int_0^\infty A_1(\alpha)\left(e^{-\alpha z} - \frac{2}{1 + \lambda^6} e^{-\alpha\lambda^3 z}\right) J_0(\alpha r)\, d\alpha$$
$$s_{33}(r, z) = G\int_0^\infty A_1(\alpha)\, \alpha \left[-\frac{1 + \lambda^6}{\lambda^4} e^{-\alpha z} + \frac{4e^{-\alpha\lambda^3 z}}{\lambda(1 + \lambda^6)}\right] J_0(\alpha r)\, d\alpha$$
$$A_1(\alpha) = \frac{a^2\tau}{\pi G}\, \frac{1 + \lambda^6}{1 - \lambda^6} N(\lambda) \left(\frac{\cos\alpha a}{\alpha a} - \frac{\sin\alpha a}{\alpha^2 a^2}\right)$$

При $\lambda \to 1$, т. е. при устранении начальных напряжений, соотношения (3.5) переходят в известное решение [9, 10] задачи о трещине в ненапряженном теле (для случая коэффициента Пуассона, равного 0,5, поскольку материал несжимаем).

Как показывают соотношения (3.5), наличие начальных напряжений в теле приводит к появлению радиальных смещений на поверхности трещины, раздвигаемой равномерным давлением. Кроме того, как видно из (3.6), начальные напряжения влияют на характер распределения напряжений и перемещений вокруг края трещины.

Участвующий в выражениях для перемещений (3.5) коэффициент $N(\lambda)$ в промежутке $\lambda^* < \lambda < \infty$, где $\lambda^* \approx 0{,}667$, монотонно убывает; $N(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \lambda^*$. Когда величина предварительного сжатия стремится к λ^*, перемещения берегов трещины неограниченно возрастают. Это означает, что при $\lambda \leqslant \lambda^*$ однородное напряженно-деформированное состояние сжатого тела с трещиной неустойчиво. Заметим, что критическая величина начального сжатия λ^* совпадает с величиной λ, при которой наступает неустойчивость сжатого полупространства [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (высокоэластичные материалы).— Прикл. механика, 1981, т. 17, № 2, с. 11—21.
2. *Филиппова Л. М.* О раскрытии круглой трещины в предварительно напряженном упругом теле.— В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. Тез. докл. 2-й Всес. науч. конф. Днепропетровск: Изд-е Днепропетровск. ун-та, 1981, с. 80.

3. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Biot M. A.* Mechanics of Incremental Deformations. New York: Wiley, 1965. 504 p.
5. *Хилл Р.* Некоторые вопросы поведения изотропных упругих твердых тел при наложении малой деформации на конечную.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970, с. 459—466.
6. *Гурвич Е. Л., Лурье А. И.* К теории распространения волн в нелинейно-упругой среде (эффективная проверка условия Адамара).— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 110—116.
7. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
9. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
10. Разрушение. Т. 2. М: Мир, 1975. 764 с.
11. *Филиппова Л. М.* Пространственная контактная задача для предварительно напряженного упругого тела.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 1080—1084.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
12.I.1982