Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 539.375

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ О ПЛОСКОМ РАЗРЕЗЕ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ ЕГО ПОВЕРХНОСТЕЙ

Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.

Рассматривается общая трехмерная статическая задача о трещине произвольного разрыва, занимающей плоскую область в безграничной упругой среде. Предполагается, что развитие трещины происходит при совместном действии растягивающих, сжимающих, а также сдвиговых по отношению к плоскости трещины нагрузок и сопровождается образованием областей, где ее поверхности приходят в контакт. В неизвестных заранее зонах налегания имеется трение с коэффициентом, зависящим от нормального давления и величины относительного касательного смещения поверхностей. При этом могут реализоваться области локального сцепления и проскальзывания поверхностей. Дается эквивалентная вариационная постановка исходной краевой задачи, формулируемой в виде системы равенств и неравенств как задачи минимизации негладких неквадратичных функционалов, зависящих от скачков смещений в области разреза. Указываются условия существования и единственности решения в пространствах Соболева — Слободецкого дробного порядка. Устанавливаются некоторые свойства решений задачи, а также качественные результаты о зависимости интегральных его характеристик от формы трещины и параметров закона трения. Полученная в работе вариационная формулировка задачи позволяет строить ее численное решение методами математического программирования.

Задачи о трещинах с частично налегающими поверхностями без трения рассматривались в осесимметричном [1] и общем [2] случаях. Плоские задачи о налегании поверхностей трещины с учетом трения между ними изучались в [3—6]. Контактные задачи с условиями трения, аналогичными рассматриваемым ниже, изучались в [7]. Решение некоторых контактных задач с учетом зависимости коэффициента трения от давления строилось в [8].

1. Постановка граничной задачи. Рассматривается равновесие упругого пространства с плоским разрезом под действием антисимметричных объемных и поверхностных сил, приложенных к поверхностям разреза. Поверхности разреза на некоторой (неизвестной заранее) части области, им занимаемой, могут налегать одна на другую, а на остальной ее части не соприкасаются. Напряжения на разомкнутых частях разреза совпадают с заданными поверхностными нагрузками; напряжения на каждой из поверхностей в области налегания представляют собой сумму внешней нагрузки и воздействия другой (налегающей) поверхности. Нормальная к поверхности разреза составляющая этого воздействия (давления) знакопостоянна и связана с касательной его составляющей законом трения с условиями проскальзывания и сцепления.

В той части области налегания, где отсутствует относительный сдвиг поверхностей (имеет место их сцепление), величина касательной составляющей взаимодействия не превышает произведения коэффициента трения на давление. Коэффициент трения в области сцепления зависит от давления в рассматриваемой точке. На остальной части области налегания поверхностей разреза (в области проскальзывания), где имеет место их относительный сдвиг, касательная составляющая взаимодействия поверхностей по величине достигает произведения коэффициента трения на давление, а по направлению совпадает с относительным сдвигом. Коэффициент трения в области проскальзывания зависит от давления и величины относительного сдвига поверхностей в рассматриваемой точке. Граница между областями проскальзывания и сцепления должна определяться в ходе решения задачи.

Пусть разрез занимает область Ω с границей Γ в плоскости $Z = 0$. Обозначим через $\mathbf{Q}(x, y, z)$ и $\mathbf{R}^{\pm}(x, y)$ ($\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}^+ = r$) плотности объемных и поверхностных нагрузок. Тогда для нормальной w и касательной $\mathbf{u}_\tau$ составляющих скачка смещений (отсчитываемых от нижней поверхности), для нормальных σ_z и касательных $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ поверхностных напряжений имеют место следующие условия в плоскости $Z = 0$:

во всей области разреза Ω

$$(1.1)\qquad \sigma_z \leqslant r_z, \quad w = 0; \quad \sigma_z = r_z, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{r}_\tau, \; w < 0$$

в области налегания E, где $w = 0$,

$$(1.2)\qquad |\,\boldsymbol{\sigma}_\tau - \mathbf{r}_\tau\,| \leqslant f(p)\,p, \quad |\,\mathbf{u}_\tau\,| = 0$$

$$(1.3)\qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau - \mathbf{r}_\tau = -\,[f(p) + g(p, |\,\mathbf{u}_\tau\,|)]\,p\,\mathbf{u}_\tau/|\,\mathbf{u}_\tau\,|, \qquad |\,\mathbf{u}_\tau\,| \neq 0$$

вне области Ω

$$(1.4)\qquad w = |\,\mathbf{u}_\tau\,| = 0$$

Здесь $p = -(\sigma_z - r_z)$ — давление, $f(p)$, $g(p, |\,\mathbf{u}_\tau\,|)$ — функции, задающие зависимость коэффициента трения от давления и относительного проскальзывания поверхностей.

При формулировке задачи с учетом процесса нагружения пространства с разрезом следует аналогично тому, как это сделано в [9], для контактных задач, заменить функцию $\mathbf{u}_\tau$ на ее приращение, соответствующее приращению параметра нагружения, от которого зависят внешние нагрузки $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{r}$.

Искомые поля напряжений и смещений можно представить в виде суммы двух полей, первое из которых отвечает состоянию бесконечного пространства без разреза под действием объемных сил $\mathbf{Q}$, а второе — состоянию пространства с разрезом Ω при антисимметричных поверхностных нагрузках ($\mathbf{R}^{\pm} \pm \boldsymbol{\sigma}_0$). Здесь $\boldsymbol{\sigma}_0$ (σ_z°, $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\circ$) — напряжения в точках плоскости $Z = 0$ сплошного пространства под действием сил $\mathbf{Q}$. В дальнейшем будем определять поля, отвечающие второму состоянию, считая напряжения $\boldsymbol{\sigma}_0$ известными. Для искомых полей сохраним те же обозначения σ_z, $\boldsymbol{\sigma}_\tau$, w, $\mathbf{u}_\tau$.

Проекции скачка смещений в точках плоского разреза в безграничной среде (при отсутствии объемных нагрузок) и напряжения, при которых этот скачок реализуется, связаны известными зависимостями [10]

$$(1.5)\qquad \sigma_z = \frac{G}{2(1-\nu)} F^{-1}[|\xi|\,F(w)], \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \frac{G}{2(1-\nu)} F^{-1}[A(\xi)\,F(\mathbf{u}_\tau)]$$

$$A(\xi) = |\xi| \begin{Vmatrix} 1-\nu\eta_2^2 & \nu\eta_1\eta_2 \\ \nu\eta_1\eta_2 & 1-\nu\eta_1^2 \end{Vmatrix}, \quad \eta_i = \frac{\xi_i}{|\xi|}$$

Здесь F и F^{-1} — операторы прямого и обратного преобразований Фурье с параметром ξ (ξ_1, ξ_2), G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона среды.

Как видно из первого равенства (1.5), нормальные напряжения в точках области Ω не зависят от скачка касательных смещений. Это позволяет разбить исходную задачу (1.1) — (1.4) на две, решаемые последовательно.

В первой определяются область налегания поверхностей E и нормальные напряжения в точках Ω из условий

(1.6) $$\sigma_\tau = 0; \quad \sigma_z(w) \leqslant r_z - \sigma_z^\circ, \quad w = 0; \quad \sigma_z = r_z - \sigma_z^\circ, \quad w < 0$$

Во второй задаче при известном давлении и области E находятся $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ и $\mathbf{u}_\tau$ (а также области проскальзывания и сцепления в пределах E) по условиям

(1.7) $$|\boldsymbol{\sigma}_\tau - \mathbf{r}_\tau + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\circ| \leqslant f(p)\,p, \quad |\mathbf{u}_\tau| = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau - \mathbf{r}_\tau + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\circ = -[f(p) + g(p, |\mathbf{u}_\tau|)]\,p\mathbf{u}_\tau/|\mathbf{u}_\tau|, \quad |\mathbf{u}_\tau| > 0 \quad \text{в} \quad E$$

(1.8) $$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{r}_\tau - \boldsymbol{\sigma}_\tau^\circ \quad \text{в} \quad \Omega/E$$

Используемое представление искомых полей в виде суммы двух имеет место, несмотря на нелинейность исходных граничных условий (1.1) — (1.3). Найдя σ_z, $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ из решения задачи (1.6), (1.7) и прибавляя к ним σ_z°, $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\circ$, получим функции, удовлетворяющие (1.1) — (1.3), так как переход к вспомогательной задаче (1.6), (1.7) не меняет скачков смещений (в сплошном пространстве под действием сил $\mathbf{Q}$ они отсутствуют) и давлений (они представляют собой разности между истинными и внешними нормальными напряжениями; во вспомогательной задаче оба эти поля изменены по сравнению с исходной задачей на величину — σ_z°).

2. Вариационная задача определения давления и области налегания. Рассмотрим задачу (1.6). Покажем, что она приводится к эквивалентной вариационной задаче минимизации функционала потенциальной энергии на множестве кинематически допустимых нормальных составляющих скачка смещений.

Теорема 2.1. Задача (1.6) при $(r_z - \sigma_z^\circ) \in H_{-1/2}(\Omega)$ эквивалентна вариационной задаче

(2.1) $$\min_{w\in V}\left\{F_1(w) = \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}\sigma_z(w)\,w - (r_z - \sigma_z^\circ)\,w\right] dx\,dy\right\}$$

$$V: w \leqslant 0, \quad w \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Omega)$$

Здесь $\sigma_z(w)$ — оператор, задаваемый первой формулой (1.5), H_s, H_s° — пространства Соболева — Слободецкого [11].

Доказательство строится по схеме, приводимой ниже для более сложного случая определения скачков касательных смещений $\mathbf{u}_\tau$.

Высокую эффективность [1] при численном решении вариационной задачи (2.1) показал метод, использующий при переходе от непрерывной задачи к дискретной билинейные сплайны и затем минимизацию методом проекций градиента с автоматическим выбором шага [12].

3. Вариационная задача определения касательных напряжений и смещений. Рассмотрим теперь задачу (1.7), (1.8) нахождения $\mathbf{u}_\tau(u_x, u_y)$. Покажем, что она эквивалентна вариационной задаче минимизации функционала потенциальной энергии (с учетом работы сил трения) на касательных составляющих скачка смещений $\mathbf{u}_\tau$.

Теорема 3.1. Пусть

$$[pg(p, |\mathbf{u}_\tau|) + pf(p)] \geqslant 0 \in H_{-1/2}(\Omega), \quad (\boldsymbol{\sigma}_\tau^\circ - \mathbf{r}_\tau) \in H_{-1/2}(\Omega)$$

$$G(p, |\mathbf{u}_\tau|) = \int\limits_0^{|\mathbf{u}_\tau|} g(p, \xi)\,d\xi \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Omega)$$

[1] *Гольдштейн Р. В., Зазовский А. Ф.* Численный метод решения пространственных задач теории упругости для тел с плоскими разрезами с учетом налегания их поверхностей. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1982, препринт № 192, 45 с.

$g(x, y)$ — непрерывная функция аргумента y и $g_y'(x, y) \geqslant 0$. Тогда задача (1.7), (1.8) при p, известном из решения (2.1), эквивалентна следующей вариационной задаче:

$$\min_{\mathbf{u}_\tau \in \overset{\circ}{H}_{1/2}(\Omega)} \Big\{F_2(\mathbf{u}_\tau) = \int\limits_\Omega \Big[\frac{1}{2}\sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau)\mathbf{u}_\tau - \mathbf{r}_\tau\mathbf{u}_\tau + \sigma_\tau^\circ\mathbf{u}_\tau + p\,(f(p)\,|\mathbf{u}_\tau| + G(p, |\mathbf{u}_\tau|))\Big]\,dx\,dy\Big\} \tag{3.1}$$

Доказательство состоит из перехода к вариационному неравенству, которое представляет собой некоторую форму условий минимума $F_2(\mathbf{u}_\tau)$, и далее из установления эквивалентности этого неравенства исходной граничной задаче.

Покажем сначала, что функция $\mathbf{u}_\tau^\circ$ тогда и только тогда минимизирует функционал $F_2(\mathbf{u}_\tau)$, когда она $\forall \mathbf{u}_\tau \in H_{1/2}^\circ(\Omega)$ удовлетворяет вариационному неравенству ($\sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau^\circ)$ определяется вторым равенством (1.5))

$$\int\limits_\Omega \{\mathbf{a}(\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_\tau^\circ) + p\,[f(p) + g(p, |\mathbf{u}_\tau^\circ|)](|\mathbf{u}_\tau| - |\mathbf{u}_\tau^\circ|)\}\,dx\,dy = l(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau^\circ) \geqslant 0 \tag{3.2}$$

$$\mathbf{a} = \sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau^\circ) - \mathbf{r}_\tau + \sigma_\tau^\circ$$

Рассмотрим предварительно форму

$$W(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) = \int\limits_\Omega \sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau)\,\mathbf{u}_\tau\,dx\,dy$$

определяющую квадратичную часть функционала F_2.

В силу равенства Парсеваля и второй формулы (1.5) будем иметь

$$W = \int\limits_{R^2} F(\mathbf{u}_\tau)\,A(\xi)\,\bar F(\mathbf{u}_\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2 \geqslant \frac{G(1 - |\nu|)}{4\pi^2(1 - \nu)} \int\limits_{R^2} |\xi|\,[|F(u_x)|^2 + |F(u_y)|^2]\,d\xi_1\,d\xi_2 \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Приращение функционала F_2 в точке $\mathbf{u}_\tau^\circ$ представляется в виде

$$\Delta F_2(\mathbf{u}_\tau^\circ) = l(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau^\circ) + \frac{1}{2} W(\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_\tau^\circ, \mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_\tau^\circ) + \int\limits_\Omega \{G(p, |\mathbf{u}_\tau|) - G(p, |\mathbf{u}_\tau^\circ|) - g(p, |\mathbf{u}_\tau^\circ|)\,[|\mathbf{u}_\tau| - |\mathbf{u}_\tau^\circ|]\}\,dx\,dy \tag{3.4}$$

Пусть теперь выполнено неравенство (3.2), что гарантирует неотрицательность первого слагаемого в (3.4). Второе слагаемое также неотрицательно в силу (3.3). Непрерывность функции g по y обеспечивает наличие производной $G_y'(x, y)$, причем $G_y'(x, y) \equiv g(x, y)$; условие $g_y'(x, y) \geqslant 0$ обеспечивает выпуклость вниз по y функции $G(x, y)$. Отсюда вытекает неотрицательность $\forall \mathbf{u}_\tau$ суммы последних членов в правой части (3.4). Следовательно, при условиях теоремы выполнение (3.2) обеспечивает неравенство $\Delta F_2(\mathbf{u}_\tau^\circ) \geqslant 0$, т. е. условие минимума F_2 при $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}_\tau^\circ$.

Пусть, наоборот, известно, что при $\mathbf{u}_\tau^\circ$ реализуется минимум $F_2(\mathbf{u}_\tau)$. Предположим, что при этом для некоторого $\mathbf{u}_\tau^*$ выполняется обратное к (3.2) неравенство. Рассмотрим $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}_\tau^\circ + \lambda(\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau^\circ)$, $\lambda \geqslant 0$. Первое слагаемое в (3.4), совпадающее с левой частью (3.2), пропорционально λ, второе пропорционально λ^2, а оставшаяся группа слагаемых в (3.4) $o(\lambda)$ в силу дифференцируемости функции $G(p, |\mathbf{u}_\tau|)$ по $|\mathbf{u}_\tau|$. Таким образом, знак ΔF_2 определяется линейным по λ слагаемым, и невыполнение (3.2) приводит к нарушению условия минимума при $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}_\tau^\circ$. Эквивалентность (3.1) и (3.2) установлена.

Покажем теперь эквивалентность решения вариационного неравенства решению исходной граничной задачи. Пусть сначала для функции $\mathbf{u}_\tau^\circ$ выполнены условия (1.7), (1.8). Тогда левая часть неравенства (3.2) приобретает вид

$$\int_\Omega \{\mathbf{a}\mathbf{u}_\tau + p[f(p) + g(p, |\mathbf{u}_\tau^\circ|)] |\mathbf{u}_\tau|\} \, dx\, dy = K(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau^\circ) \tag{3.5}$$

Вне области налегания подынтегральное выражение в (3.5) равно нулю в силу условия (1.8) и равенства $p \equiv 0$. В области налегания в силу условий (1.7) это выражение неотрицательно. Таким образом, для функции $\mathbf{u}_\tau^\circ$, удовлетворяющей условиям (1.7), (1.8), выполняется вариационное неравенство (3.2).

Пусть теперь выполняется неравенство (3.2). Выведем для функции $\mathbf{u}_\tau^\circ$ граничные условия (1.7), (1.8). Приведем (3.2) к виду

$$K(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau^\circ) \geqslant K(\mathbf{u}_\tau^\circ, \mathbf{u}_\tau^\circ) \tag{3.6}$$

Как известно [13], для любых $\mathbf{m} \in H_{1/2}^\circ(\Omega)$, $n \geqslant 0 \in H_{-1/2}(\Omega)$ справедливо представление

$$\int_\Omega n |\mathbf{m}| \, dx\, dy = \sup_{\alpha \in H_{-1/2}(\Omega),\ |\alpha| \leqslant n} \left[\int_\Omega \alpha \mathbf{m} \, dx\, dy\right]$$

Тогда (3.6) можно привести к виду

$$K(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) = \int_\Omega \beta_0 \mathbf{u}_\tau \, dx\, dy = \sup_{\beta \in B} \int_\Omega \beta \mathbf{u}_\tau \, dx\, dy \geqslant K(\mathbf{u}_\tau^\circ, \mathbf{u}_\tau^\circ) \tag{3.7}$$

$$\beta_0 \in B, \quad B\colon \beta \in H_{-1/2}(\Omega), \quad |\beta - \mathbf{a}| \leqslant p\,[f + g]$$

Функционал $K(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau)$ — линейный по $\mathbf{u}_\tau$ и задан во всем пространстве $H_{1/2}^\circ(\Omega)$. Неравенство (3.7) означает его ограниченность снизу, что возможно лишь при

$$|\beta| = 0, \quad |\mathbf{a}| \leqslant p\,(f + g) \tag{3.8}$$

Рассмотрим вновь вариационное неравенство (3.6) и положим в нем $|\mathbf{u}_\tau| \equiv 0$. Тогда будем иметь

$$\int_\Omega [\mathbf{a}\mathbf{u}_\tau^\circ + p\,(f + g)\, |\mathbf{u}_\tau^\circ|] \, dx\, dy \leqslant 0 \tag{3.9}$$

что с учетом (3.8) возможно лишь при равенстве нулю подынтегрального выражения в (3.9).

Совокупность этого условия и (3.8) эквивалентна исходным граничным условиям (1.7), (1.8). Теорема 3.1 доказана.

Теоремы 2.1 и 3.1 позволяют свести исследование существования и единственности решения граничных задач (1.6), (1.7), (1.8) к нахождению условий существования и единственности минимума функционалов F_1 и F_2. При этом функции, минимизирующие F_1 и F_2, должны принадлежать тем классам, в которых устанавливалась эквивалентность граничных и вариационных задач.

Для наличия единственного минимума в $H_{1/2}^\circ(\Omega)$ у функционалов F_1, F_2 достаточно [13] их непрерывности, строгой выпуклости, выпуклости множеств допустимых функций, а также выполнения условий

$$F_1 \to \infty, \quad \|w\| \to \infty; \quad F_2 \to \infty, \quad |\mathbf{u}_\tau| \to \infty \tag{3.10}$$

Теорема 3.2. Пусть $(r_z - \sigma_z^\circ) \in H_{-1/2}(\Omega)$, тогда функционал F_1 имеет единственный минимум $w \in H_{1/2}^\circ(\Omega)$.

Теорема 3.3. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1 об эквивалентности граничной и вариационной задач определения $\mathbf{u}_\tau$. Пусть, кроме того, $f(p) \geqslant 0$, $g(p, |\mathbf{u}_\tau|)$ — ограниченная функция. Тогда функционал F_2 имеет единственный минимум $\mathbf{u}_\tau \in H_{1/2}^\circ(\Omega)$.

Доказательства теорем сводятся к проверке указанных выше свойств функционалов F_1, F_2. Они выполняются, так как F_1 — сумма ограниченного коэрцитивного квадратичного и ограниченного линейного функционалов, а функционал F_2 может быть представлен в виде такой же суммы с добавлением непрерывного выпуклого функционала. Непрерывность соответствующих функционалов основывается на ограниченности операторов $\sigma_z(w)$ и $\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}_\tau)$ как операторов из $H_{1/2}^\circ(E^*)$ в $H_{-1/2}(E^*)$. Коэрцитивность квадратичной части F установлена в [14], для F_2 она доказывается аналогично.

4. Качественное поведение решения и его интегральных характеристик. Для анализа рассматриваемых задач в силу независимости определения в них нормальных составляющих искомых функций могут быть использованы некоторые результаты, установленные [2] для задачи о разрезе с частично налегающими поверхностями без трения.

Так, справедливо утверждение о том, что если вдоль некоторой части Γ_1 границы разреза Γ расширить область разреза Ω, а внешние нормальные нагрузки $-r_z - \sigma_z^\circ$ не уменьшить, то область налегания при этом не сузится, а коэффициент интенсивности напряжений K_I вдоль оставшейся части контура $\Gamma \setminus \Gamma_1$ не уменьшится.

Перейдем к установлению ряда новых свойств интегральных характеристик решения.

4.1. Рассмотрим энергетические характеристики решения, зависящие от смещений и напряжений на поверхностях разреза. Ограничимся здесь случаем зависимости коэффициента трения от давления ($g \not\equiv 0$). Сумма квадратичных частей F_1 и F_2

$$W = \frac{1}{2}\int [\sigma_z(w)\,w + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\,\mathbf{u}_\tau]\,dx\,dy$$

представляет собой упругую энергию деформированного объема с разрезом. Сумма линейных частей F_1 и F_2

$$-A = \int_\Omega [(\sigma_z^\circ - r_z)\,w + (\boldsymbol{\sigma}_\tau^\circ - \mathbf{r}_\tau)\,\mathbf{u}_\tau]\,dx\,dy$$

представляет собой с обратным знаком работу внешних сил. Неквадратичная часть в F_2 есть взятая с обратным знаком работа сил трения поверхностей разреза

$$L = \int_\Omega [\boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{u}_\tau) - \mathbf{r}_\tau + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\circ]\,\mathbf{u}_\tau\,dx\,dy = -\int_\Omega pf(p)\,|\mathbf{u}_\tau|\,dx\,dy$$

Для введенных энергетических характеристик справедлива

Теорема 4.1. Пусть коэффициент трения $f(p)$ меняется пропорционально параметру $\gamma > 0$. Тогда упругая энергия W и сумма работ внешних сил и сил трения $L + A$ — монотонно убывающие функции γ (коэффициента трения при кулоновском законе трения).

Доказательство. Рассмотрим сначала поведение функции $W(\gamma)$. Из-за расщепления исходной задачи на две достаточно установить убывание функции

$$W^*(\gamma) = W(w = 0) = \int_\Omega \frac{1}{2} \sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau) \mathbf{u}_\tau \, dx\, dy$$

Это свойство $W^*(\gamma)$ непосредственно вытекает из более общего результата [15] об убывании квадратичной части функционала

$$I(\mathbf{v}(\gamma)) = \min_{\mathbf{u} \in U} \left[I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \gamma j(\mathbf{u}) - M(\mathbf{u}) \right]$$

как функции параметра γ. При этом в [15] U — гильбертово пространство, $a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ — билинейная непрерывная симметричная форма, удовлетворяющая условию $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mid \geqslant c \| \mathbf{u} \|^2$, $M(\mathbf{u})$ — непрерывный линейный функционал, $j(\mathbf{u})$ — выпуклый непрерывный функционал, удовлетворяющий условию $j(t\mathbf{u}) = |t| j(\mathbf{u})$.

Функционал $F_2(\mathbf{u}_\tau)$ и $H_{1/2}{}^\circ(\Omega)$ при условиях теоремы 3.1 (для $g \equiv 0$) удовлетворяет всем требованиям, наложенным в [15] на функционал $I(\mathbf{u})$. Таким образом, можно утверждать монотонное убывание $W^*(\gamma)$, а с ним и $W(\gamma)$.

Для функций w и $\mathbf{u}_\tau$, минимизирующих F_1 и F_2 и поэтому удовлетворяющих граничным условиям, выполняется равенство

$$W = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} (\mathbf{r}_\tau - \sigma_\tau{}^\circ) \mathbf{u}_\tau - \frac{1}{2} pf(p) | \mathbf{u}_\tau | + \frac{1}{2} (r_z - \sigma_z{}^\circ) w \right] dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} (L + A)$$

Таким образом, из убывания $W(\gamma)$ вытекает убывание $L(\gamma) + A(\gamma)$.

4.2. Рассмотрим теперь иные интегральные характеристики решения, определяемые полем смещений w, $\mathbf{u}_\tau$. Введем величины

$$V_z{}^{ij} = \int_\Omega w x^i y^j \, dx\, dy, \quad \mathbf{V}_\tau{}^{ij}(V_x{}^{ij}, V_y{}^{ij}) = \int_\Omega \mathbf{u}_\tau x^i y^j \, dx\, dy$$

представляющие собой «моменты распределения» смещений поверхностей разреза. Так, например, $-2V_z{}^{00}$ представляет собой величину объема полости, ограниченной деформированными поверхностями разреза. Величины $V_z{}^{ij}$, $\mathbf{V}_\tau{}^{ij}$ определяют упругое поле, создаваемое трещиной на больших расстояниях от нее [16]. Пусть внешние нагрузки — полиномы вида

$$(4.1) \qquad f_z = -\sigma_z{}^\circ + r_z = \sum_0^N K_z{}^{ij} x^i y^j$$

$$\mathbf{f}_\tau = -\sigma_\tau{}^\circ + \mathbf{r}_\tau = \sum_0^N \mathbf{K}_\tau{}^{ij}(K_x{}^{ij}, K_y{}^{ij}) x^i y^j$$

Теорема 4.2. Каждая из величин $V^{ij}_{x(y)(z)}$ — монотонно возрастающая функция коэффициента $K^{ij}_{x(y)(z)}$ (при неизменных коэффициентах с другими i, j в разложениях (4.1))

Доказательство. Пусть $w(f_z{}^1)$, $w(f_z{}^2)$, $\mathbf{u}_\tau(f_\tau{}^1)$, $\mathbf{u}_\tau(f_\tau{}^2)$ — решения вариационных задач (2.1) и (3.1) для нагрузок, отвечающих двум наборам коэффициентов $K_{1z}{}^{ij}$ и $K_{2z}{}^{ij}$, $\mathbf{K}_{1\tau}{}^{ij}$ и $\mathbf{K}_{2\tau}{}^{ij}$. Необходимые условия минимума $F_1(f_z{}^1, w)$ и $F_2(f_z{}^2, w)$ при $w = w(f_z{}^1)$ и $w = w(f_z{}^2)$ имеют с учетом (2.1) и (4.1) следующий вид:

$$(4.2) \qquad \int_\Omega (f_z{}^1 - f_z{}^2)[w(f_z{}^1) - w(f_z{}^2)]\, dxdy = \sum_0^N (K_{1z}{}^{ij} - K_{2z}{}^{ij})(V_{1z}{}^{ij} - V_{2z}{}^{ij}) =$$

$$= F_1(f_z{}^1, w(f_z{}^2)) - F_1(f_z{}^1, w(f_z{}^1)) + F_1(f_z{}^2, w(f_z{}^1)) - F_1(f_z{}^2, w(f_z{}^2)) \geqslant 0$$

Предположим теперь, что $K_{1z}{}^{mn} \geqslant K_{2z}{}^{mn}$ при некоторых $i = m$, $j = n$, а при остальных i, j имеем $K_{1z}{}^{ij} = K_{2z}{}^{ij}$. Тогда для выполнения неравенства (4.2) необходимо, чтобы $V_{1z}{}^{mn} \geqslant V_{2z}{}^{mn}$, т. е. зависимости $V_z{}^{ij}(K_z{}^{ij})$ — монотонно возрастающие.

Аналогично (4.2) получается неравенство

$$(4.3)\qquad \sum_{0}^{N}[(K_{1x}^{ij}-K_{2x}^{ij})(V_{1x}^{ij}-V_{2x}^{ij})+(K_{1y}^{ij}-K_{2y}^{ij})(V_{1y}^{ij}-V_{2y}^{ij})]=$$
$$=\int\limits_{\Omega}(f_\tau^1-f_\tau^2)[\mathbf{u}_\tau(\mathbf{f}_\tau^1)-\mathbf{u}_\tau(\mathbf{f}_\tau^2)]\,dxdy=F_2(\mathbf{f}_\tau^1,\mathbf{u}_\tau(\mathbf{f}_\tau^2))-$$
$$-F_2(\mathbf{f}_\tau^1,\mathbf{u}_\tau(\mathbf{f}_\tau^1))+F_2(\mathbf{f}_\tau^2,\mathbf{u}_\tau(\mathbf{f}_\tau^1))-F_2(\mathbf{f}_\tau^2,\mathbf{u}_\tau(\mathbf{f}_\tau^2))\geqslant 0$$

Отметим, что неравенство (4.3) справедливо, когда коэффициенты K_z^{ij} и, следовательно, функции p одинаковы для двух сравниваемых состояний. Из неравенства (4.3) вытекает монотонно возрастающий характер зависимостей $V_{x(y)}^{ij}$ $(K_{x(y)}^{ij})$.

Продолжим исследование моментов V_z^{ij}. Установим некоторое их экстремальное свойство. Рассмотрим множество смешанных задач с известными границами областей налегания E^* при условиях

$$(4.4)\qquad w(E^*)=0;\quad w(E^*)\leqslant 0,\quad \sigma_z(w(E^*))=r_z-\sigma_z^\circ$$

Как видно, решение исходной задачи (1.6) $w(E)$ принадлежит семейству $w(E^*)$ и выделяется тем, что на нем выполняется дополнительное неравенство в (1.1) для $\sigma_z(w)$ внутри E. Покажем, что на решении задачи (1.6) реализуется максимальное значение некоторой линейной комбинации V_z^{ij}.

Теорема 4.3. Исходная задача (1.6) однозначно характеризуется условием

$$(4.5)\qquad \sum_{0}^{N}K_z^{ij}V_z^{ij}(w(E))=\max_{w(E^*)}\sum_{0}^{N}K_z^{ij}V_z^{ij}(w(E^*))$$

Доказательство. Функции $w(E^*)$ являются допустимыми для вариационной задачи (2.1), поэтому

$$F_1(w(E))\leqslant F_1(w(E^*)),\quad \forall w(E^*)$$

Но с учетом (2.1) и (4.1) имеем

$$F_1(w(E^*))=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\sigma_z(w(E^*))\,w(E^*)-r_z w(E^*)+\sigma_z^\circ w(E^*)\right]dxdy=$$
$$=-\int\limits_{\Omega}\frac{1}{2}(r_z+\sigma_z^\circ)\,w(E^*)\,dxdy=-\frac{1}{2}\sum_{0}^{N}K_z^{ij}V_z^{ij}(w(E^*))$$

Аналогично

$$F(w(E))=-\sum_{0}^{N}K_z^{ij}V_z^{ij}(w(E))$$

Следовательно, для решения исходной задачи выполняется условие (4.5). Если же теперь условие (4.5) реализуется для $w(E^*)$, то ни при каком другом $w(E)$ оно не может выполняться, так как из-за строгой выпуклости функционал не может принимать одинаковых значений на различных функциях.

4.3. Решение рассматриваемой задачи, как показано выше, однозначно определяется внешними нагрузками (коэффициентами K_z^{ij}, $\mathbf{K}_\tau^{ij}$ в разложениях (4.1)). При этом однозначно определяются и моменты решения любого порядка, в частности и большего N. Можно изменить первоначальную постановку и задать некоторый набор моментов решения, тогда соответствующая нагрузка и распределение смещений находятся однозначно. Точную формулировку этого факта дает

Теорема 4.4. Задание значений моментов V_z^{ij}, $i+j=0,\ldots,N$, однозначно определяет коэффициенты K_z^{ij}, $i+j=0,\ldots,N$, в разложении нагрузки (4.1) и решение вариационной задачи (2.1) (если оно при этих значениях V_z^{ij} существует). Задание значений моментов V_τ^{ij}, $i+j=0, \ldots, N$, однозначно определяет коэффициенты $\mathbf{K}_\tau^{ij}$, $i+j=0, \ldots, N$, в разложении (4.1) и решение вариационной задачи (3.1) (если оно при этих значениях существует).

Доказательство. Предположим, что $V_{1z}^{ij} = V_{2z}^{ij}$, $\forall i, j$; $0 \leqslant i+j \leqslant N$, а при этом функции f_z^1, $w(f_z^1)$ и f_z^2, $w(f_z^2)$ различны.

Функционал F_1 строго выпуклый, поэтому его приращения в левой части неравенства (4.2) строго положительны. Таким образом, предположение о различии $w(f_z^1)$ и $w(f_z^2)$ противоречит равенству моментов V_{1z}^{ij} V_{2z}^{ij}. Следовательно, набор величин V_z^{ij} однозначно определяет решение задачи (2.1) w. Аналогично доказывается однозначность определения u_τ набором векторов V_τ^{ij}.

Замечания. 1°. Для существования решения задачи при заданных моментах распределения смещений необходимо, чтобы дополнительные связи, наложенные при этом, были совместны с исходными ограничениями в форме неравенств.

2°. Решение вариационной задачи (2.1) ((3.1)), как показывает теорема 4.4, обладает определенной симметрией относительно наборов постоянных V_z^{ij}, K_τ^{ij} ($\mathbf{V}_z^{ij}, \mathbf{K}_\tau^{ij}$). Линейная по w ($\mathbf{u}_\tau$) часть функционала F_1 (F_2) представляет собой билинейную симметричную форму относительно постоянных V_z^{ij} и K_z^{ij} (V_τ^{ij}, K_τ^{ij}). Если рассматривать задачу (2.1), (3.1) с дополнительными ограничениями, определяемыми заданием моментов решений, то постоянные K_z^{ij} ($\mathbf{K}_\tau^{ij}$) совпадают с множителями Лагранжа, отвечающими этим ограничениям.

Продемонстрируем это в случае задачи (2.1), когда область налегания отсутствует. Пусть есть вариационная задача (постоянные K^{ij} здесь неизвестны)

$$\min_{w\leqslant 0} F_1(w) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\sigma_z(w)\,w - \sum_0^N K_z^{ij} V_z^{ij}(w)\right] dx\,dy$$

при условиях

$$\int_\Omega w x^i y^j dx dy = V_z^{ij}, \quad 0 \leqslant i+j \leqslant N$$

Вводя множители Лагранжа — λ^{ij} и варьируя в функционале Лагранжа функцию w с учетом отсутствия области налегания, получим на решении задачи w°

$$\sigma_z(w^\circ) = r_z - \sigma_z^\circ = \sum_0^N \lambda^{ij} x^i y^j$$

т. е. $K^{ij} = \lambda^{ij}$.

Аналогичная симметрия имеет место и при постановке задачи в напряжениях, например, в задаче о контакте двух упругих тел [17]. В них наборы величин V_z^{ij} и K_z^{ij} ($\mathbf{V}_\tau^{ij}$ и $\mathbf{K}_\tau^{ij}$) меняются местами; V^{ij} — заданные в исходной задаче коэффициенты, а K^{ij} — моменты искомого распределения напряжений.

3°. Теоремы 4.2 — 4.4 справедливы не только при полиномиальной форме внешних нагрузок, но и при их разложении по любой системе функций, принадлежащих $H_{-1/2}(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О локальном осесимметричном сжатии упругого слоя, ослабленного кольцевой или круговой щелью.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 1, с. 139—144.
2. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационные оценки решений смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 82—94.
3. *Walsh J. B.* The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks.— J. Geophys. Res., 1965, v. 70, No. 2, p. 399—411.
4. *Моссаковский В. И., Рыбка В. М.* Неосесимметричное сжатие упругого пространства, ослабленного круговой щелью.— В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Вып. 23. Днепропетровск; Изд-е ДГУ, 1976, с. 149—156.
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. *Fredriksson B.* Elastic contact problem in fracture mechanics.— In: Fracture 1977. Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials. Vol. 3A. 4th Int. Conference of Fracture. Waterloo, Canada, 1977. N. Y.: Pergamon Press, 1978, p. 427—435.
7. *Спектор А. А.* Асимптотика решений некоторых пространственных контактных задач с проскальзыванием и сцеплением около линий раздела граничных условий.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 1, с. 43—53.

8. *Александров В. М., Кудиш И. И.* Плоские контактные задачи с нелинейным трением.— В кн.: Всес. науч.-техн. конференция. Трибоника и антифрикционное материаловедение. Тез. докл. Новочеркасск: Новочеркасск. политехн. ин-т, 1980, с. 12—13.
9. *Кравчук А. С.* К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 122—129.
10. *Willis J. R.* The penny-shaped crack on the interface.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1972, v. 25, pt 3, p. 367—385.
11. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
12. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
13. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
14. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела • плоскими трещинами нормального разрыва.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 68—79.
15. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
16. *Гольдштейн Р. В.* Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 111—126.
17. *Спектор А. А.* Некоторые пространственные статические контактные задачи теории упругости с проскальзыванием и сцеплением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 12—25.

Москва

Поступила в редакцию
8.VI.1982