Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 539.3 : 534.1

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В НЕСЖИМАЕМОМ ИЗОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ

Волков Л.Г.

Рассматривается волновое движение в несжимаемом изотропном материале, описывающееся квазилинейной гиперболической системой из четырех уравнений, для которой два характеристических поля линейно вырождены в смысле Лакса. Для остальных характеристических полей предполагается существенная нелинейность. Исследуется поведение производных решения вдоль этих двух различных типов характеристических полей. Эффект нелинейности системы проявляется в неограниченности производных при ограниченности решения вдоль существенно нелинейных полей.

Известно, что в линейной теории упругости из гладкости начальных данных вытекает устойчивость соответствующих решений. В нелинейной упругости этот факт уже не имеет места [1].

В работе [2] показано, что если описывающая движение система гиперболическая в узком смысле, истинно нелинейна [3] и, кроме того, начальные данные имеют компактный носитель и достаточно малую C^2-норму, то решение обращается в бесконечность за конечное время. В [2] построен пример классического материала с квадратичной функцией деформационной энергии, являющегося истинно нелинейным в случае, когда волновой фронт не содержит главного направления деформации. Поставлен вопрос о справедливости этих результатов в зависимости от истинной нелинейности для одномерных упругих волн. Существует широкий класс материалов, не являющихся истинно нелинейными. К ним относятся и рассмотренные ниже изотропные несжимаемые материалы.

1. Плоская задача. Плоское волновое движение в случае несжимаемых упругих материалов описывается системой уравнений [4, 5]

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial p_\alpha \partial p_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Sigma}{\partial p_\alpha \partial p_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\rho_0\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2},\quad \alpha=1,2 \tag{1.1}$$

Здесь u_α — перемещения, $p_\alpha = \partial u_\alpha/\partial x$ — градиенты деформации, ρ_0 — постоянная плотность в недеформированном состоянии. В случае изотропного материала функция энергии деформации Σ зависит только от инвариантов тензора деформации, для которых

$$I = II = 3 + p_1^2 + p_2^2 = 3 + q^2,\quad III \equiv 0$$

Будем рассматривать классические решения системы (1.1), заменив ее эквивалентной системой первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A(U)\frac{\partial U}{\partial x}=0;\quad v_1=\frac{\partial u_1}{\partial t},\quad v_2=\frac{\partial u_2}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$U=\begin{Vmatrix} v_1\\ v_2\\ p_1\\ p_2\end{Vmatrix},\quad A(U)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & A_{12} & A_{12}\\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22}\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad A_{ij}=-\rho_0^{-1}\frac{\partial\Sigma}{\partial p_i \partial p_j}$$

Исследуем решение системы (1.2), для которого $q > 0$. Примем, что существуют функции Σ', Σ'', Σ''', ($\Sigma' = d\Sigma/dI$) и $\Sigma' > 0$, $\Sigma'' > 0$ для $I \in (3, \infty)$. Если $a = 2\rho_0^{-1}\Sigma'$, $b = 2\rho_0^{-1}(\Sigma' + 2q^2\Sigma'')$, то собственные числа матрицы A

$$\lambda_1 = -\sqrt{b},\quad \lambda_2 = -\sqrt{a},\quad \lambda_3 = \sqrt{a},\quad \lambda_4 = \sqrt{b} \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что система (1.2) гиперболическая в узком смысле [3]. Через l_i, r^i, $i = 1, 2, 3, 4$ обозначим соответственно левые и правые собственные векторы, для которых

$$(1.4)\qquad l_{1,4} = \frac{p_1}{q\sqrt{1+b}}\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \pm\sqrt{b}, \pm\frac{p_2}{p_1}\sqrt{b}\right)$$

$$l_{2,3} = \frac{p_2}{q\sqrt{1+a}}\left(1, -\frac{p_1}{p_2}, \pm\sqrt{a}, \pm\frac{p_1\sqrt{a}}{p_2}\right)$$

$$(1.5)\qquad r^{1,4} = \frac{p_1}{q\sqrt{1+b}}\begin{Vmatrix}\pm\sqrt{b}\\ \pm\frac{p_2}{p_1}\sqrt{b}\\ 1\\ \frac{p_2}{p_1}\end{Vmatrix},\qquad r^{2,3} = \frac{p_2}{q\sqrt{1+a}}\begin{Vmatrix}\pm\sqrt{a}\\ \pm\frac{p_1}{p_2}\sqrt{a}\\ 1\\ -\frac{p_1}{p_2}\end{Vmatrix}$$

Из формул (1.4), (1.5) следует, что левые и правые собственные векторы нормированы следующим образом:

$$(1.6)\qquad l_il_i = l_ir^i = 1;\quad l_ir^k = 0,\qquad i \neq k,\ i, k = 1, 2, 3, 4$$

$$(1.7)\qquad l_1l_2 = l_1l_3 = l_4l_2 = l_4l_3 = 0;\ l_1l_4 = \frac{1-b}{1+b},\quad l_2l_3 = \frac{1-a}{1+a}$$

Характеристическое поле, порожденное i-м собственным числом гиперболической в узком смысле системы, называется истинно нелинейным в смысле Лакса [6], если производная λ_i по направлению соответствующего правого собственного вектора r^i не обращаются в нуль, т. е.

$$(1.8)\qquad D\lambda_i\,(U, r^i\,(U)) \neq 0$$

Гиперболическая в узком смысле система является истинно нелинейной, если все ее характеристические поля истинно нелинейны. Для (1.2) имеем

$$(1.9)\qquad D\lambda_{2,3}\,(U, r^{2,3}\,(U)) \equiv 0$$

Следовательно, характеристические поля, порожденные собственными числами λ_2 и λ_3, линейно вырождены в смысле Лакса [6] и при любой функции энергии деформации Σ система (1.2) не может быть истинно нелинейной. Это показывает, что метод, предложенный в [2], применим к рассматриваемому случаю. Несмотря на это, при ограничении $\Sigma''' \geqslant 0$, обеспечивающем истинную нелинейность для первого и третьего характеристических полей, и некоторые требования к начальной деформации, через конечное время решение (1.2) может стать нерегулярным (см. далее теорему 3.1). Линейная вырожденность λ_2 и λ_3 дает некоторую возможность для построения классических решений (теорема 3.2).

2. Построение эволюционной системы. При начальных данных

$$(2.1)\qquad U\,(x, 0) = \begin{Vmatrix} v_1\,(x, 0)\\ v_2\,(x, 0)\\ p_1\,(x, 0)\\ p_2\,(x, 0)\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v_{10}\,(x)\\ v_{20}\,(x)\\ p_{10}\,(x)\\ p_{20}\,(x)\end{Vmatrix}$$

принадлежащих классу c^2, решение системы (1.2) также принадлежит классу c^2 для всех x в некотором достаточном малом интервале времени $[0, T]$ [3]. Дальше ограничим рассмотрение этой полосой в пространстве (x, t).

Системы векторов $\{l_i\}_{1;4}$ и $\{r^i\}$ линейно независимы (это следует непосредственно из (1.4), (1.5)) и вместе образуют биортогональную систему

(1.6), (1.7). Это дает возможность выразить градиент U_x через базис $\{r^i\}$ следующим образом:

$$U_x = \sum_{i=1}^{4} (l_i U_x) r^i$$

Обозначая через $w_i(x, t) = l_i U_x$-ю компоненту U_x, воспользуемся представлением (1.2) в виде системы эволюционных уравнений с неизвестными функциями w_i

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i (U(x, t)) \frac{\partial w_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{4} \sum_{m=1}^{4} \gamma_{ikm}(U) w_k w_m \tag{2.2}$$

$$\gamma_{iim} = -c_{iim} - c_{imi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \frac{\lambda_i - \lambda_m}{\lambda_j - \lambda_i} c_{ijm}(l_i l_j), \quad m \neq i$$

$$2\gamma_{ikm} = -\frac{\lambda_k - \lambda_m}{\lambda_k - \lambda_i} c_{ikm} - \frac{\lambda_m - \lambda_k}{\lambda_m - \lambda_i} c_{ikm}, \quad k \neq i, \quad m \neq i$$

$$\gamma_{iii} = -c_{iii}$$

$$c_{ikm} = c_{ikm}(U) = l_i(U) DA [U, r^m(U)] r^k(U)$$

Дифференцируя равенство $l_i A = \lambda_i l_i$, получим

$$Dl_i(U, r^i) A(U) + l_i(U) DA(U, r^i) = D\lambda_i(U, r^i) l_i(U) + \lambda_i D\lambda_i(U, r^i)$$

Умножив обе стороны последнего равенства на $r^i(U)$ и учитывая последнее соотношение (2.2), найдем

$$D\lambda_i(U, r^i) \equiv c_{iii}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4$$

Тогда из четвертого соотношения (2.2) и (1.9) следует $\gamma_{222} = \gamma_{333} = 0$. Для нахождения остальных γ_{ikm} необходимо предварительно определить коэффициент c_{ikm} по формулам (2.2). После соответствующих вычислений получаем

$$DA(U, r^{1,4}) = \left\| \begin{array}{c|cc} 0 & S(p_2) & Q \\ & Q & S(p_3) \\ \hline 0 & & \end{array} \right\|$$

$$S(p) = \frac{2\Sigma''}{p}(q + 4p + 2p^2 q), \quad Q = 4p_3 \Sigma''(2 + q)$$

Для коэффициентов, соответствующих первому и четвертому характеристическому полю, имеем

$$c_{111} = c_{444} = c_{114} = c_{441} = c_{141} = c_{414} = c_{411} = 2c$$

$$c = (\Sigma'' + 4q\Sigma'' + 2q^2\Sigma''')(1 + b)^{-3/2}$$

Все остальные c_{1ij}, c_{4ij} равны нулю.

Для другой группы

$$DA(U, r^{2,3}) = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & PR \\ & RP \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad P = 8p_2\Sigma'', \quad R = \frac{4\Sigma''}{p_3}(p_3^2 - p_2^2)$$

$$c_{221} = c_{331} = c_{224} = c_{334} = c_{231} = c_{321} = c_{234} = c_{324} = 2d$$

$$c_{212} = c_{313} = c_{213} = c_{312} = c_{242} = c_{343} = c_{243} = c_{342} = 2qd$$

$$d = \frac{\Sigma''}{(1 + a)\sqrt{1 + b}}$$

Остальные c_{2ij}, c_{3ij} равны нулю.

Из четвертого соотношения (2.2) следует

$$\gamma_{111} = \gamma_{444} = 2c \tag{2.3}$$

Тогда система (2.2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1(q(x,t))\frac{\partial w_1}{\partial x} = -2c\left(w_1^2 - \frac{1}{1+b}w_1w_4\right) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2(q(x,t))\frac{\partial w_2}{\partial x} = (\gamma_{212}w_1 + \gamma_{224}w_4)w_2 + \gamma_{213}w_1w_3$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + \lambda_3(q(x,t))\frac{\partial w_3}{\partial x} = (\gamma_{313}w_1 + \gamma_{334}w_4)w_3 + \gamma_{324}w_2w_4$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial t} + \lambda_4(q(x,t))\frac{\partial w_4}{\partial x} = -2c\left(w_4^2 - \frac{1}{1+b}w_1w_4\right)$$

$$\gamma_{212} = \gamma_{313} = -d\left(1 + q - \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\,\frac{1-a}{1+a}\right)$$

$$\gamma_{224} = \gamma_{334} = -d\left(1 + q + \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\,\frac{1-a}{1+a}\right)$$

$$\gamma_{213} = \gamma_{324} = -d\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\,q\right)$$

Начальные условия эволюционной системы запишем в виде

$$w_{i0}(x) = w_i(x,0) = l_i(U_0(x))\,U_0'(x),\ i = 1, 2, 3, 4$$

3. Поведение производных решения задачи (1.2) — (2.1). Положим $k = 4$ при $i = 1$ и $k = 1$ при $i = 4$. Рассмотрим (2.4) как систему для w_1 и w_4. После интегрирования ее характеристических уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad \frac{dw_i}{dt} = 2c\left(w_i^2 - \frac{1}{1+b}w_iw_k\right), \quad i = 1, 4$$

получим

$$x_i(\alpha_i,t) = \alpha_i + \int_0^t \lambda_i(U(x(s,\alpha_i)s))\,ds \tag{3.1}$$

$$w_i(\alpha_i,t) \equiv w_i(x(\alpha_i,s),t) = w_k(\alpha_i,t)\left\{\frac{1}{w_{i0}(\alpha_i)} + \int_0^t w_k^{-1}(\alpha_i s)\, \times\right.$$

$$\left.\times\, \frac{2c}{1+b}[q(x_i(\alpha_i s),s)]\,ds\right\}^{-1}$$

$$w_k(\alpha_i,t) \equiv w_k(x_i(\alpha_i,t),t) =$$

$$= \exp\left\{\int_0^t 2c\,[q(x_i(\alpha_i,s)s)]\,w_k[x_i(\alpha_i,s),s]\,ds\right\}, \quad \alpha_i \in R$$

Из анализа этих формул вытекает следующая

Теорема 3.1. Предположим, что решение $U(x, t)$ задачи (1.2) — (2.1) ограничено при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in R$, $q > 0$; $\Sigma'''(I) \geqslant 0$, $I \in (3, \infty)$, т. е. первое и четвертое характеристические поля истинно нелинейные. Если функция $w_k(t) = w_k(x_i(\alpha_i, t), t)$ ограничена при $0 \leqslant t \leqslant T$, $\alpha_i \in R$, то:

а) при $w_i(\alpha_i) > 0$ функция $w_i(\alpha_i, t)$ ограничена;

б) при $w_i(\alpha_i) < 0$

$$|w_i(\alpha_i)|^{-1} < \int_0^T w_k(\alpha_i,s)\frac{2c}{1+b}\{q[x_i(\alpha_i,s),s]\}\,ds$$

Существует конечное время t_*, такое, что

$$\lim_{t\to t_*}|w_i(\alpha_i,t)| = \infty, \quad t_* < T$$

В случае б) возникает градиентная катастрофа в гладком решении задачи (1.2), (2.1) [3].

Исследуем теперь при тех же предположениях поведение w_2 и w_3.

Теорема 3.2. Предположим, что функции $w_{i2}(t) \equiv w_{i2}(x_2(\alpha_2, t), t)$, $w_{i3}(t) = w_{i3}(x_3(\alpha_3, t), t)$, $i = 1, 4$ ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда $w_2(x, t)$ и $w_3(x, t)$ ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T$, если они ограничены при $t = 0$.

Доказательство. Из второго и третьего уравнений (2.4) аналогично (3.1) имеем

(3.2)
$$x_i(\alpha_i, t) = \alpha_i + \int_0^t \lambda_i(q(x_i(x_i, s))\, ds$$

$$w_i(\alpha_i, t) \equiv w_i(x_i(\alpha_i, t), t) = w_i^{-1}(\alpha_i, t)(w_{i0}(\alpha_i) +$$
$$+ \int_0^t w_i(\alpha_i s)\, \gamma_{i, i-1, i+1}\{q[x_i(x_i, s), s]\, w_{i-1}[x_i(\alpha_i, s) s]\, w_{i+1}[x_i(\alpha_i, s) s]\, ds\}$$

$$w_i(\alpha_i, t) \equiv w_i[x_i(\alpha_i, t), t] = \exp\Bigl(\int_0^t (\gamma_{i1i}(q(x_i(\alpha_i, s), s)) \times$$
$$\times w_1(x_i(\alpha_i, s), s) + \gamma_{ii4}(q(x_i(\alpha_i, s), s)\, w_4(x_i(\alpha_i, s), s))\, ds)$$

Обозначая

$$z_i(t) = \sup_x |w_i(x, t)|, \quad z_{i0} = \sup_x |w_{i0}(x)|$$
$$x \in R, \quad i = 2, 3$$

получим (3.3) неравенства

(3.4)
$$z_i(t) \leqslant z_{i0} + M \int_0^t z_i(s)\, ds, \quad i = 2, 3$$

Здесь M — постоянная, зависящая от Σ и ее производных до третьего порядка, а также от оценок для $U(x, t)$, $w_{i2}(t)$, $w_{i3}(t)$ на интервале $[0, T]$.

Из (3.4) получим неравенство

$$z_2(t) + z_3(t) \leqslant (z_{20} + z_{30}) \exp(Mt) \leqslant (z_{20} + z_{30}) \exp(MT)$$

Эта теорема показывает, что волны, соответствующие второму и третьему характеристическим полям, ведут себя почти как линейные и не порождают нерегулярности.

Автор благодарит Б. Л. Рождественского и В. А. Тупчиева за ценные замечания, сделанные при обсуждении работы на Всесоюзном семинаре по системам квазилинейных уравнений и их применениям в механике сплошной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W. T.* A basic open problem in the theory of elastic stability.— In: Lect. Notes in Math. B.: Springer, 1976, v. 503, p. 366—373.
2. *John F.* Formation of singularities in one—dimensional nonlinear wave propagation.— Communs Pure and Appl. Math., 1974, v. 27, No. 3, p. 377—405.
3. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
4. *Eringen A., Suhubi E.* Elastodynamics. V. 1. N. Y.— L.: Acad. Press, 1974. 341 p.
5. *Гольденблат И. И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
6. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws. II.— Communs Pure and Appl. Math., 1957, v. 10, No. 4, p. 537—566.

Болгария

Поступила в редакцию
23.II.1981