Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 539.3

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В ТЕОРИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВДОЛЬ КООРДИНАТНЫХ ЛИНИЙ

Рогачева Н. Н.

Для пьезокерамических оболочек, предварительно поляризованных вдоль одного из семейств координатных линий срединной поверхности, приближенным методом [1] из трехмерных граничных условий получены двумерные граничные условия для различных закреплений электродированных и неэлектродированных краев. Уточненные уравнения пьезокерамических оболочек с рассматриваемой поляризацией получены тем же методом в [2].

1. Будем считать, что, так же как в случае неэлектрических оболочек [1], полное электроупругое состояние можно представить в виде суммы двух электроупругих состояний, одно из которых относительно медленно меняется по координатным линиям срединной поверхности и описывается уравнениями теории пьезокерамических оболочек [2] (внутреннее электроупругое состояние), а другое электроупругое состояние — погранслой — быстро затухает в направлении, перпендикулярном к краю, и описывается трехмерными уравнениями.

На краю оболочки внутреннее электроупругое состояние взаимодействует с погранслоем при наложении граничных условий.

Все используемые ниже обозначения совпадают с принятыми в [2].

Отнесем оболочку к триортогональной системе координат α_1, α_2, γ, где α_1-, α_2-линии совпадают с линиями кривизны срединной поверхности, а γ-линии им ортогональны.

В связи с тем, что при предварительной поляризации вдоль α_2-линий направления α_1 и α_2 не равноценны, будем отдельно рассматривать края $\alpha_1 = \alpha_{10}$ и $\alpha_2 = \alpha_{20}$.

Введем в уравнения погранслоя вместо симметричного тензора напряжений $\sigma_{\mu\rho}$ ($\mu, \rho = 1, 2, 3$) несимметричный тензор, а вместо вектора электрической индукции $\mathbf{D}^*$ и вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}^*$ введем векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$

$$S_{ii} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_j}\right)\sigma_{ii}, \qquad S_{ij} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_i}\right)\sigma_{ij} \tag{1.1}$$

$$S_{i3} = S_{3i} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_j}\right)\sigma_{3i}, \qquad S_{33} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_{33}$$

$$D_i = \left(1 + \frac{\gamma}{R_j}\right)D_i^*, \qquad D_3 = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)D_3^*$$

$$E_i = \left(1 + \frac{\gamma}{R_i}\right)E_i^* \qquad (i \neq j = 1, 2)$$

Пусть край оболочки совпадает с линией $\alpha_i = \alpha_{i0}$.

Выполним в трехмерных уравнениях пьезоупругости следующую замену переменных:

$$\alpha_i - \alpha_{i0} = R\eta^1\xi_i, \quad \alpha_j = R\eta^t\xi_j, \quad \gamma = R\eta^1\zeta \quad (i \neq j = 1, 2) \tag{1.2}$$

Здесь t — показатель изменяемости внутреннего электроупругого состояния, η — отношение полутолщины оболочки h к характерному размеру R. Эта замена означает, что будет отыскиваться трехмерное электроупругое состояние, имеющее показатель изменяемости, равный единице, в направлении, перпендикулярном к краю, и вдоль нормали к срединной поверхности оболочки, и имеющее гораздо меньший показатель изменяемости вдоль края.

По аналогии с теорией погранслоя неэлектрических оболочек будем представлять погранслой в виде суммы плоского и антиплоского погранслоев (как будет видно из приведенных ниже уравнений, здесь названия «плоский» и «антиплоский» весьма условны, и их можно объяснить только по отношению к механическим величинам).

2. На краю $\alpha_1 = \alpha_{10}$ для величин антиплоского и плоского погранслоев имеет место следующая асимптотика:

$$(S_{12}{}^k, S_{21}{}^k, S_{23}{}^k, v_2{}^k/h, \psi^k/h, E_1{}^k, E_3{}^k, D_1{}^k, D_3{}^k) = \tag{2.1}$$
$$= \eta^r (S^k_{12*}, S^k_{21*}, S^k_{23*}, V^k_{2*}, \psi_*{}^k, E^k_{1*}, E^k_{3*}, D^k_{1*}, D^k_{3*})$$
$$E_2{}^k = \eta^{1-t+r} E^k_{2*}$$
$$(S_{11}{}^k, S_{22}{}^k, S_{33}{}^k, v_1{}^k/h, v_3{}^k/h, D_2{}^k) = \tag{2.2}$$
$$= \eta^{1-t-r} (S^k_{11*}, S^k_{22*}, S^k_{33*}, S^k_{13*}, V^k_{1*}, V^k_{3*}, D^k_{2*})$$

Справедливость принятой асимптотики подтверждается тем, что в исходном приближении с ее помощью получены непротиворечивые системы уравнений плоского и антиплоского погранслоев.

Формулы (2.1), (2.2) означают, что вместо каждой искомой величины введена соответствующая величина со звездочкой, умноженная на η в некоторой степени, например

$$S_{12}{}^k = \eta^r S^k_{12*}$$

Степени η подобраны таким образом, чтобы величины со звездочками были одного порядка.

В (2.1), (2.2) и ниже индекс k следует заменить на a или b для величин антиплоского (положим $r = 0$) и плоского ($r = 1 - t$) погранслоев соответственно.

Подставив асимптотику антиплоского погранслоя в трехмерные уравнения пьезоупругости, выполнив замену переменных (1.2) ($i = 1$, $j = 2$), получим систему уравнений, которую можно разбить на две подсистемы — главную и вспомогательную. Эти подсистемы следует интегрировать последовательно: сначала из главной подсистемы найдем величины (2.1), а затем из уравнений вспомогательной подсистемы определим искомые величины (2.2), считая известными величины (2.1). Точно так же для плоского погранслоя получим главную подсистему для величин (2.2) и вспомогательную подсистему относительно величин (2.1).

Выпишем уравнения главных подсистем антиплоского и плоского погранслоев в исходном приближении

$$\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial S^a_{21*}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S^a_{23*}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial V^a_{2*}}{\partial \xi_1} - d_{15} E^a_{1*} = s_{44}{}^E S^a_{12*} = s_{44}{}^E S^a_{21*} \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial V^a_{2*}}{\partial \zeta} - d_{15} E^a_{3*} = s_{66}{}^E S^a_{23*}, \quad D^a_{1*} = \varepsilon_{11}{}^T E^a_{1*} + d_{15} S^a_{12*}$$
$$D^a_{3*} = \varepsilon_{11}{}^T E^a_{3*} + d_{15} S^a_{23*}, \quad \frac{\partial D^a_{3*}}{\partial \zeta} + \frac{1}{A_{10}} \frac{\partial D^a_{1*}}{\partial \xi_1} = 0$$
$$E^a_{3*} = -\frac{\partial \psi_*{}^a}{\partial \zeta}, \quad E^a_{1*} = -\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \psi_*{}^a}{\partial \xi_1}, \quad E^a_{2*} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_*{}^a}{\partial \xi_2}$$

$$(2.4)\qquad S^a_{23*}=0,\quad \zeta=\pm1$$

$$(2.5)\qquad \psi_*{}^a=0,\quad \zeta=\pm1$$

$$(2.6)\qquad D^a_{3*}=0,\quad \zeta=\pm1$$

$$(2.7)\qquad \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial S^b_{11*}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial S^b_{13*}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial S^b_{31*}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial S^b_{33*}}{\partial\zeta}=0$$

$$s_{13}{}^ES^b_{11*}+s_{33}{}^ES^b_{22*}+s_{13}{}^ES^b_{33*}=0$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial V^b_{1*}}{\partial\xi_1}=s_{11}{}^ES^b_{11*}+s_{13}{}^ES^b_{22*}+s_{12}{}^ES^b_{33*}$$

$$\frac{\partial V^b_{3*}}{\partial\zeta}=s_{12}{}^ES^b_{11*}+s_{13}{}^ES^b_{22*}+s_{11}{}^ES^b_{33*}$$

$$\frac{\partial V^b_{1*}}{\partial\zeta}+\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial V^b_{3*}}{\partial\xi_1}=s_{66}{}^ES^b_{13*}$$

$$D^b_{2*}=d_{31}S^b_{11*}+d_{33}S^b_{22*}+d_{31}S^b_{33*}$$

$$(2.8)\qquad S_{13*}{}^b=0,\quad S^b_{33*}=0,\quad \zeta_1=\pm1$$

$$A_{10}=A_1,\quad A_{20}=A_2,\quad \xi_1=0$$

Здесь v_1, v_2, v_3 — трехмерные перемещения, ψ — электрический потенциал, $s_{11}{}^E$, $s_{12}{}^E$, $s_{13}{}^E$, $s_{33}{}^E$, $s_{44}{}^E$, $s_{66}{}^E$, d_{31}, d_{33}, d_{15}, $\varepsilon_{11}{}^T$, $\varepsilon_{33}{}^T$ — упругие и электрические постоянные.

Считается, что механическая и электрическая поверхностные нагрузки учитываются при интегрировании уравнений внутреннего электроупругого состояния, поэтому для погранслоя имеют место однородные условия (2.4) — (2.6), (2.8). Условия (2.5) соответствуют электродированным лицевым поверхностям, а условия (2.6) должны выполняться на лицевых поверхностях, не имеющих электродов.

3. На краю $\alpha_2=\alpha_{20}$ для вывода уравнений погранслоя выполним в трехмерных уравнениях пьезоупругости замену (1.2) ($i=2$, $j=1$) и примем для искомых величин такую асимптотику:

$$(3.1)\qquad (S_{12}{}^k, S_{21}{}^k, S_{13}{}^k, v_1{}^k/h, D_1{}^k)=\eta^r(S^k_{12*}, S^k_{21*}, S^k_{13*}, V^k_{1*}, D^k_{1*})$$

$$(3.2)\qquad (S_{11}{}^k, S_{22}{}^k, S_{33}{}^k, S_{23}{}^k, v_2{}^k/h, v_3{}^k/h, \psi^k/h, E_2{}^k, E_3{}^k, D_2{}^k, D_3{}^k)=$$

$$=\eta^{1-t-r}(S^k_{11*}, S^k_{22*}, S^k_{33*}, S^k_{23*}, V^k_{2*}, V^k_{3*}, \psi_*{}^k, E^k_{2*}, E^k_{3*}, D^k_{2*}, D^k_{3*}),$$

$$E_1{}^k=\eta^{2-2t-r}E^k_{1*}$$

Для антиплоского и плоского погранслоев положим число r равным 0 или $1-t$ соответственно. Выпишем в исходном приближении главные подсистемы антиплоского и плоского погранслоев у края $\alpha_2=\alpha_{20}$:

$$(3.3)\qquad \frac{1}{A_{20}}\frac{\partial S^a_{12*}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial S^a_{13*}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{1}{A_{20}}\frac{\partial V^a_{1*}}{\partial\xi_2}=s_{44}{}^ES^a_{12*}=s_{44}{}^ES^a_{21*}$$

$$\frac{\partial V^a_{1*}}{\partial\zeta}=s_{66}{}^ES^a_{13*},\qquad D^a_{1*}=d_{15}S^a_{12*}$$

$$(3.4)\qquad S^a_{13*}=0,\quad \zeta=\pm1$$

$$(3.5)\qquad \frac{1}{A_{20}}\frac{\partial S^b_{22*}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial S^b_{23*}}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{1}{A_{20}}\frac{\partial S^b_{32*}}{\partial\xi_2}+\frac{\partial S^b_{33*}}{\partial\zeta}=0$$

$$s_{11}{}^ES^b_{11*}+s_{13}{}^ES^b_{22*}+s_{12}{}^ES^b_{33*}+d_{31}E^b_{2*}=0$$

$$\frac{1}{A_{20}}\frac{\partial V^b_{2*}}{\partial\xi_2}=s_{13}{}^ES^b_{11*}+s_{33}{}^ES^b_{22*}+s_{13}{}^ES^b_{33*}+d_{33}E^b_{2*}$$

$$\frac{\partial V^b_{3*}}{\partial \zeta} = s_{12}{}^E S^b_{11*} + s_{13}{}^E S^b_{22*} + s_{11}{}^E S^b_{33*} + d_{31} E^b_{2*}$$

$$\frac{1}{A_{20}} \frac{\partial V^b_{3*}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial V^b_{2*}}{\partial \zeta} = s_{66}{}^E S^b_{23*} + d_{15} E^b_{3*}$$

$$D^b_{3*} = \varepsilon_{11}{}^T E^b_{3*} + d_{15} S^b_{23*}$$

$$D^b_{2*} = \varepsilon_{33}{}^T E^b_{2*} + d_{31} S^b_{11*} + d_{33} S^b_{22*} + d_{31} S^b_{33*}$$

$$\frac{\partial D^b_{3*}}{\partial \zeta} + \frac{1}{A_{20}} \frac{\partial D^b_{2*}}{\partial \xi_2} = 0$$

$$E^b_{3*} = -\frac{\partial \psi_*{}^b}{\partial \zeta}, \quad E^b_{2*} = -\frac{1}{A_{20}} \frac{\partial \psi_*{}^b}{\partial \xi_2}, \quad E^b_{1*} = -\frac{1}{A_{10}} \frac{\partial \psi_*{}^b}{\partial \xi_1}$$

(3.6) $\qquad S_{23*}{}^b = 0, \quad S_{33}{}^b = 0, \quad \zeta = \pm 1$

(3.7) $\qquad \psi_*{}^b = 0, \quad \zeta = \pm 1$

(3.8) $\qquad D_{3*}{}^b = 0, \quad \zeta = \pm 1$

$$A_{10} = A_1, \quad A_{20} = A_2, \quad \xi_2 = 0$$

4. Рассмотрим оболочку, лицевые поверхности которой не имеют электродов. Соотношения электроупругости получены в [2] с точностью до величин порядка

(4.1) $\qquad \varepsilon = O(\eta^{2-2t})$

Условимся с такой же точностью выводить граничные условия теории пьезокерамических оболочек.

Пусть электродированный край оболочки $\alpha_2 = \alpha_{20}$ жестко заделан. На поверхности края электрический потенциал равен величине V, зависящей только от времени. Трехмерные граничные условия записываются следующим способом:

(4.2) $\qquad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad \psi = V$

Представим каждую из величин (4.2) в виде суммы трех слагаемых, первое из которых определяется по двумерным уравнениям теории пьезокерамических оболочек, а второе и третье находятся из уравнений антиплоского и плоского погранслоев соответственно. Для величин внутреннего электроупругого состояния воспользуемся асимптотикой и разложениями искомых величин по координате γ, приведенными в [2], для величин погранслоя учтем асимптотические представления (3.1), (3.2), в результате условия (4.2) можно представить в следующем виде:

(4.3) $\qquad \eta^t (v_{1,0} + \eta^{1-2t+c} \zeta v_{1,1}) + \eta^{1+\alpha} R V^a_{1*} + \eta^{2-t+\beta} R V^b_{1*} = 0$

$$\eta^t (v_{2,0} + \eta^{1-2t+c} \zeta v_{2,1}) + \eta^{2-t+\alpha} R V^a_{2*} + \eta^{1+\beta} R V^b_{2*} = 0$$

$$\eta^c (v_{3,0} + \eta^{1-c} \zeta v_{3,1}) + \eta^{2-t+\alpha} R V^a_{3*} + \eta^{1+\beta} R V^b_{3*} = 0$$

$$\eta^t \psi_{,0} + \eta^{2-t+\alpha} R \psi_*{}^a + \eta^{1+\beta} R \psi_*{}^b = \eta^t V$$

Величины внутреннего электроупругого состояния определяются из неоднородных уравнений, учитывающих механическую и электрическую поверхностные нагрузки. Величины антиплоского и плоского погранслоев находятся из однородных уравнений, в связи с этим перед ними стоят множители η^α и η^β. Числа α и β будут подбираться так, чтобы получить для погранслоев из (4.3) неоднородные торцевые условия. Единственно приемлемые, не приводящие к противоречиям значения α, β определяют ся так:

(4.4) $\qquad \alpha = 1 - t, \quad \beta = 0$

С учетом (4.4) запишем формулы (4.3)

$$(4.5)\qquad v_{1,0}+\eta^{1-2t+c}\zeta v_{1,1}+\eta^{2-2t}(RV_{1*}^{a}+RV_{1*}^{b})=0$$

$$v_{2,0}+\eta^{1-2t+c}\zeta v_{2,1}+\eta^{1-t}(\eta^{2-2t}RV_{2*}^{a}+RV_{2*}^{b})=0$$

$$v_{3,0}+\eta^{1-c}\zeta v_{3,1}+\eta^{1-c}(\eta^{2-2t}RV_{3*}^{a}+RV_{3*}^{b})=0$$

$$\psi_{,0}+\eta^{1-t}(\eta^{2-2t}R\psi_{*}{}^{a}+R\psi_{*}{}^{b})=V$$

Будем рассматривать последние три условия как торцевые условия для плоского погранслоя. Так же как в [1], представим последний в виде суммы симметричного и обратно симметричного плоских погранслоев.

Для обратно симметричной части плоского погранслоя из (4.5) получим следующие торцевые условия на краю $\xi_2=0$:

$$RV_{2*}^{b}+\eta^{-1+t}v_{2,0}=0,\qquad RV_{3*}^{b}+\zeta v_{3,1}=0,$$

$$R\chi_{*}{}^{b}+\eta^{-1+t}d_{33}(\psi_{,0}-V)=0$$

Здесь вместо $\psi_*{}^b$ введена новая неизвестная функция $\chi_*{}^b=d_{33}\psi_*{}^b$, имеющая ту же размерность, что и $V_{2*}{}^b$, $V_{3*}{}^b$.

Рассмотрим вспомогательные задачи 1°—4° со следующими условиями на торце $\xi_2=0$:

$$(4.6)\qquad RV_{2*}{}^{b}+1=0,\quad RV_{3*}{}^{b}=0,\quad R\chi_{*}{}^{b}=0\quad(\text{задача } 1^\circ)$$

$$(4.7)\qquad RV_{2*}{}^{b}=0,\quad RV_{3*}{}^{b}=0,\quad R\chi_{*}{}^{b}+1=0\quad(\text{задача } 2^\circ)$$

$$(4.8)\qquad RV_{2*}{}^{b}=0,\quad RV_{3*}{}^{b}+\zeta=0,\quad R\chi_{*}{}^{b}=0\quad(\text{задача } 3^\circ)$$

$$(4.9)\qquad RV_{2*}{}^{b}=0,\quad RV_{3*}{}^{b}=0,\quad R\chi_{*}{}^{b}=0\quad(\text{задача } 4^\circ)$$

Первые три задачи заключаются в интегрировании уравнений (3.5) с учетом условий на лицевых поверхностях (3.6), (3.7) и торцевых условий (4.6) — (4.8), четвертая — в интегрировании неоднородных уравнений плоского погранслоя, в правые части которых входят свободные члены порядка η с учетом условий (3.6), (3.7) и однородных торцевых условий (4.9). При отыскании решений вспомогательных задач 1°—4° потребуем, чтобы вдали от края выполнялись следующие условия затухания:

$$RV_{2*}{}^{b}=0,\quad RV_{3*}{}^{b}=0,\quad R\chi_{*}{}^{b}=0,\quad \xi_2=-\infty$$

Теория погранслоя линейна, поэтому обратно симметричную часть плоского погранслоя можно представить как линейную комбинацию четырех вспомогательных задач с множителями

$$\eta^{-1+t}v_{2,0},\quad v_{3,1},\quad \eta^{-1+t}d_{33}(\psi_{,0}-V),\quad 1$$

В построенном таким образом решении перемещения и электрический потенциал при $\xi_2=-\infty$ обращаются в нуль. Потребуем, чтобы вдали от края исчезали напряжения и электрические величины. Из физических соображений и принципа Сен-Венана следует, что необходимо потребовать, чтобы на краю $\xi_2=0$ равнодействующая горизонтальных сил и нормальной к краю компоненты вектора электрической индукции D_2 обращались в нуль:

$$F_1\eta^{-1+t}v_{2,0}+F_2\eta^{-1+t}d_{33}(\psi_{,0}-V)+F_3v_{3,1}+F_4\eta^1=0$$

$$B_1\eta^{-1+t}v_{2,0}+B_2\eta^{-1+t}d_{33}(\psi_{,0}-V)+B_3v_{3,1}+B_4\eta^1=0$$

Здесь через F_1, F_2, F_3, F_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 обозначены горизонтальные составляющие сил и нормальные к краю составляющие вектора электрической индукции на краю $\xi_2=0$ задач 1°—4°. Решая эти уравнения относительно $v_{2,0}$ и $(\psi_{,0} - V)$, получим с точностью (4.1) следующие формулы:

$$v_{2,0} + \eta^{1-t} m_1 v_{3,1} = 0, \quad d_{33}(\psi_{,0} - V) + \eta^{1-t} m_2 v_{3,1} = 0 \tag{4.10}$$

$$m_1 = \frac{F_2 B_3 - F_3 B_2}{F_1 B_2 - F_2 B_1}, \qquad m_2 = \frac{F_3 B_1 - F_1 B_3}{F_1 B_2 - F_2 B_1}$$

Аналогично, рассматривая симметричную часть плоского погранслоя, получим

$$v_{1,0} = 0, \quad v_{3,0} = 0, \quad v_{2,1} = 0 \tag{4.11}$$

Трехмерные перемещения связаны с перемещениями срединной поверхности оболочек u_1, u_2, w формулами

$$v_{1,0} = u_1, \quad v_{2,0} = u_2, \quad v_{3,0} = -w$$

Переходя в формулах (4.10), (4.11) к обозначениям, принятым в теории оболочек, раскрывая $v_{3,1}$ по формуле, приведенной в [2], получим следующие граничные условия ($\alpha_2 = \alpha_{20}$):

$$u_1 = 0, \qquad u_2 + hm_1 \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(au_2 - b\psi^{(0)}) = 0$$

$$w = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \psi^{(0)} - V + hm_2 \frac{1}{d_{33}} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(au_2 - b\psi^{(0)}) = 0$$

$$a = s_{12}{}^E n_{12} + s_{13}{}^E n_{22}, \qquad b = d_{31} - s_{12}{}^E c_1 - s_{13}{}^E c_2$$

Члены с множителями m_1 и m_2 вносят в граничные условия поправки порядка η^{1-t} по сравнению с единицей.

Остальные граничные условия приведем без вывода.

Шарнирно-опертый электродированный край ($\alpha_2 = \alpha_{20}$)

$$u_1 = 0, \quad w = 0, \quad G_2 = 0$$

$$T_2 - \left\{ hk_{10} \frac{n}{c} \left(\frac{s_{12}{}^E}{d_{31}} T_1 - \frac{2h}{A_2} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \alpha_2} \right) \right\} = 0$$

$$\psi^{(0)} - V + n \left(\frac{s_{12}{}^E}{2d_{31}} T_1 - \frac{h}{A_2} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \alpha_2} \right) = 0$$

$$\left(c = \frac{d_{31}(s_{12}{}^E - s_{11}{}^E)}{d_{31}{}^2 - s_{12}{}^E \varepsilon_{33}{}^T} \right)$$

Для определения числа n надо найти решение однородных уравнений плоской задачи (3.5), (3.6), (3.7) с торцевыми условиями

$$1^\circ.\ S^b_{22*} = 0, \quad RV^b_{3*} = 0, \quad R\chi_*{}^b + 1 = 0$$

$$2^\circ.\ S^*_{22*} = 0, \quad RV^b_{3*} + \zeta = 0, \quad R\chi_*{}^b = 0, \quad (\chi_*{}^b = d_{31}\psi_*{}^b)$$

затем найти равнодействующие нормальных к поверхности края составляющих вектора электрической индукции A_1 и A_2 для 1° и 2° задач соответственно и вычислить n по формуле $n = A_2/A_1$.

Всюду в фигурные скобки условимся заключать члены, вносящие в граничные условия поправки порядка η^1 по сравнению с единицей.

Свободный электродированный край $\alpha_2 = \alpha_{20}$

$$T_2 = 0, \qquad S_{12} = 0, \qquad G_2 + 3l \frac{h}{A_1} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} = 0 \tag{4.12}$$

$$N_2 - \frac{1}{A_1} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} = 0, \qquad \psi^{(0)} = V$$

$$\left(l = \int_{-1}^{+1} \zeta\, d\zeta \int_{-\infty}^{0} S^a_{12*} A_{20}\, d\xi_2 \right)$$

Для вычисления l надо построить решение уравнений антиплоской задачи (3.3), (3.4) с торцевыми условиями на краю $\xi_2 = 0$

$$S_{12}^a + \zeta = 0$$

Для свободного неэлектродированного края $\alpha_2 = \alpha_{20}$ сохраняются механические условия (4.12), а электрическое условие надо заменить условием

$$D_2^{(0)} = 0$$

Жестко заделанный электродированный край $\alpha_1 = \alpha_{10}$

$$u_1 + m\frac{h}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} = 0, \quad u_2 = 0, \quad w = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \psi^{(0)} = V$$

$$m = \frac{P_2}{P_1}(s_{12}{}^E n_{11} + s_{13}{}^E n_{21})$$

Здесь P_1, P_2 — горизонтальные составляющие сил, действующих на край $\alpha_1 = \alpha_{10}$ и найденные в результате интегрирования однородных уравнений плоской задачи (2.7) с условиями на лицевых поверхностях (2.8) и торцевыми условиями ($\xi_1 = 0$):

$$1°. \; RV_{1*}^b + 1 = 0, \quad RV_{3*}^b = 0$$

$$2°. \; RV_{1*}^b = 0, \quad RV_{3*}^b + \zeta = 0$$

Шарнирно-опертый электродированный край $\alpha_1 = \alpha_{10}$

$$T_1 - \left\{hk_{20}\frac{(s_{13}{}^E)^2}{2s_{33}{}^E}pT_2\right\} = 0, \quad G_1 = 0, \quad u_2 = 0$$

$$w = 0, \quad \psi^{(0)} = V$$

$$\left(p = \int_{-1}^{+1} S_{13*}^b|_{\xi_1=0}\, d\zeta\right)$$

где p определяется из решения уравнений (2.7) с условиями (2.8) и торцевыми условиями при $\xi_1 = 0$

$$S_{11*}^b = 0, \quad RV_{3*}^b + \zeta = 0$$

Свободный электродированный край $\alpha_1 = \alpha_{10}$

$$T_1 = 0, \quad S_{21} = 0, \quad N_1 - \frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} = 0 \tag{4.13}$$

$$G_1 + 3l_1\frac{h}{A_2}\frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \psi^{(0)} = V$$

$$\left(l_1 = \int_{-1}^{+1} \zeta\, d\zeta \int_{-\infty}^{0} S_{12}{}^a A_{10}\, d\xi_1\right)$$

Число l_1 находится из решения антиплоской задачи (2.3), (2.4), (2.6) с неоднородными торцевыми условиями

$$S_{12*}^a + \zeta = 0, \quad R\psi_*{}^a = 0$$

На свободном неэлектродированном крае $\alpha_1 = \alpha_{10}$ сохраняются первые три условия (4.13), остальные условия запишутся так:

$$G_1 + 3l_2\frac{h}{A_2}\frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \alpha_1} = 0 \tag{4.14}$$

$$l_2 = \int_{-1}^{+1} \zeta\, d\zeta \int_{-\infty}^{0} S_{12*}^a A_{10}\, d\xi_1$$

Для определения l_2 надо решить антиплоскую задачу (2.3), (2.4), (2.6) со следующими торцевыми условиями при $\xi_1 = 0$:

$$S_{12*}^a + \zeta = 0, \quad D_{1*}^a + d_{15}\zeta = 0 \tag{4.15}$$

5. Пусть лицевые поверхности оболочки полностью покрыты электродами, а края свободны. Сформулируем граничные условия.

Свободный неэлектродированный край $\alpha_1 = \alpha_{10}$

$$T_1 = 0, \; S_{21} + \frac{H_{21}}{R_2} = 0, \quad G_1 + 3l_3 \frac{h}{A_2} \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$N_1 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} + \left\{ 3l_3 \frac{h}{A_2} \frac{\partial (k_2 H_{21})}{\partial \alpha_2} \right\} = 0$$

Свободный неэлектродированный край $\alpha_2 = \alpha_{20}$

$$T_2 = 0, \; S_{12} + \frac{H_{12}}{R_1} = 0, \quad G_2 + 3l \frac{h}{A_1} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$N_2 - \frac{1}{A_1} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} + \left\{ 3l \frac{h}{A_1} \frac{\partial (k_1 H_{12})}{\partial \alpha_1} \right\} = 0$$

Формула для вычисления l приведена в п. 4.

Число l_3 определяется по последней формуле (4.14), в которой l_2 надо заменить на l_3, из решения уравнений (2.3) с условиями на лицевых поверхностях (2.4), (2.5) и с торцевыми условиями (4.15).

Для того чтобы найти константы l, l_1, l_2, l_3, надо методом разделения переменных проинтегрировать системы уравнений (2.3), (3.3) с соответствующими условиями на лицевых поверхностях и на краю. В результате простых вычислений получим

$$l = l_1 = l_2 = l_3 = -0{,}42\, (s_{66}^E / s_{44}^E)^{1/2}$$

Итак, получены граничные условия для пьезокерамических оболочек предварительно поляризованных вдоль одного семейства координатных линий срединной поверхности. Для оболочек с полностью электродированными лицевыми поверхностями они являются аналогом граничных условий свободных неэлектрических оболочек. Для оболочек, не имеющих на лицевых поверхностях электродов, на каждом крае получено по пять граничных условий. Влияние погранслоя на внутреннее электроупругое состояние проявилось в граничных условиях появлением ряда дополнительных членов, главным из которых является поправка Кирхгофа для перерезывающих усилий. Для определения других дополнительных членов надо вычислить постоянные $m_1, \ldots, l_3$ из решения вспомогательных задач. Члены с этими постоянными вносят в граничные условия поправки порядка η^1, η^{1-t}, η^{2-3t+c} по сравнению с единицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Рогачева Н. Н.* Уравнения состояния пьезокерамических оболочек.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 902—911.
3. *Улитко А. Ф.* К теории колебания пьезокерамических тел.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 15. К.: Наук. думка, 1975, с. 90—99.

Москва

Поступила в редакцию
20.I.1982