Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 539.3

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СИМВОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Партон В. З., Сеник Н. А.

Предлагается вариант теории пьезокерамических оболочек с различным направлением поляризации и различными способами электрического нагружения, основанный на методе символического интегрирования [1].

Для расчета тонких пьезокерамических оболочек, поляризованных по нормали к срединной поверхности, в работах [2, 3] использованы гипотезы Кирхгофа — Лява и дополнительные гипотезы относительно изменения компонент электрического поля по толщине оболочки. В [4] получены уравнения движения для оболочки с таким же направлением поляризации на основе вариационного принципа электроупругости и квадратичной аппроксимации потенциала электрического поля по толщинной координате. Оболочки вращения с меридиональной поляризацией в различных условиях электрического нагружения рассмотрены в работе [5], где внесена «электрическая» поправка в гипотезы Кирхгофа — Лява, позволяющая существенно упростить решение задачи в случае произвольной оболочки вращения.

1. Рассмотрим пьезокерамическую оболочку толщины $2h$, лицевые поверхности которой либо сплошь покрыты электродами, либо безэлектродны. Уравнения равновесия, получаемые с использованием гипотез Кирхгофа — Лява, имеют вид [6]

$$L_1\{T_1,\ T_2,\ S,\ M_1,\ M_2,\ H\} = -A_1A_2q_1,\ L_2\{\ldots\} = -A_1A_2q_2,\ L_3\{\ldots\} = q_n \tag{1.1}$$

Используя гипотезы Кирхгофа — Лява, запишем уравнения состояния для пьезокерамической оболочки с толщинной поляризацией в виде [4]

$$\sigma_{11} = c_{11}^*\varepsilon_{11} + c_{12}^*\varepsilon_{22} - e_{31}^*E_3,\quad \sigma_{12} = \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2}\varepsilon_{12} \tag{1.2}$$
$$\sigma_{22} = c_{12}^*\varepsilon_{11} + c_{11}^*\varepsilon_{22} - e_{31}^*E_3$$

$$D_3 = \varepsilon_{33}^*E_3 + e_{31}^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),\quad D_i = \varepsilon_{11}^S E_i\quad (i = 1,\ 2) \tag{1.3}$$

С учетом (1.2) связь между усилиями, моментами, деформациями и потенциалом электрического поля представим в виде

$$T_{1,2} = 2c_{11}^*h(\varepsilon_{1,2} + \nu_*\varepsilon_{2,1}) + e_{31}^*T_0,\quad S = (c_{11}^E - c_{12}^E)h\omega \tag{1.4}$$
$$M_{1,2} = \frac{2c_{11}^*h^3}{3}(\varkappa_{1,2} + \nu_*\varkappa_{2,1}) + e_{31}^*M_0,\quad H = \frac{(c_{11}^E - c_{12}^E)h^3}{3}\tau$$

Введенные в (1.4) величины T_0 и M_0 определяются соотношениями

$$T_0 = \varphi^+ - \varphi^-,\quad M_0 = h(\varphi^+ + \varphi^-) - \int_{-h}^{h}\varphi\, dz \tag{1.5}$$

где φ — потенциал электрического поля, а $\varphi^\pm$ — его значение при $z = \pm h$.

Учитывая связь ε_1, ε_2, ω и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ с перемещениями срединной поверхности оболочки и уравнения Максвелла для пьезокерамического тела [2, 3, 8]

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{1.6}$$

из уравнений (1.1), (1.3) — (1.6) получим замкнутую систему уравнений относительно потенциала и компонентов вектора перемещений срединной поверхности оболочки. Ввиду сложности решения полученной системы уравнений для ее дальнейшего упрощения используем метод символического интегрирования [1], широко применяемый в задачах термоупругости тонких оболочек [7]. Следуя этому методу, представим первое уравнение (1.6) с учетом (1.3) и второго уравнения (1.6)

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + p^2\varphi = \frac{e_{31}^*}{\varepsilon_{33}^*}(\varkappa_1 + \varkappa_2) \tag{1.7}$$

$$p^2 = \frac{\varepsilon_{11}^S}{\varepsilon_{33}^*}\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial(\ldots)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial(\ldots)}{\partial\alpha_2}\right]$$

Введем интегральные характеристики потенциала электрического поля соотношениями

$$\Phi_i = \int_{-h}^{h} z^{i-1}\varphi(\alpha_1, \alpha_2, z)\,dz \quad (i = 1, 2) \tag{1.8}$$

Записывая общее решение (1.7) в виде

$$\varphi = \cos pzC_1(\alpha_1, \alpha_2) + \sin pzC_2(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{e_{31}^*(\varkappa_1 + \varkappa_2)}{\varepsilon_{33}^* p^2}$$

в соответствии с (1.8) найдем Φ_1 и Φ_2, после чего потенциал поля представляется выражением

$$\varphi = \frac{p\cos pz}{2\sin ph}\Phi_1 + \frac{p^2\sin pz}{2\sin ph\,(1 - ph\operatorname{ctg} ph)}\Phi_2 - \frac{e_{31}^* h\cos pz}{\varepsilon_{33}^* p\sin ph}(\varkappa_1 + \varkappa_2) + \frac{e_{31}^*(\varkappa_1 + \varkappa_2)}{\varepsilon_{33}^* p^2} \tag{1.9}$$

Рассмотрим два основных случая нагружения.

1°. Лицевые поверхности оболочки электродированы и на них задано значение потенциала $\varphi^{\pm} = \pm V_0$. Тогда из (1.5) имеем

$$T_0 = 2V_0, \quad M_0 = -\Phi_1$$

Из (1.9), удовлетворяя условиям $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \pm h) = V_0$, находим уравнения для определения Φ_1 и Φ_2. Удерживая в них члены до $(ph)^2$, получим соответствующие приближенные уравнения

$$\left(1 - \frac{p^2h^2}{3}\right)\Phi_1 = -\frac{2e_{31}^* h^3(\varkappa_1 + \varkappa_2)}{3\varepsilon_{33}^*}, \quad \left(1 - \frac{p^2h^2}{15}\right)\Phi_2 = \frac{2V_0h^2}{3}$$

После определения Φ_1, Φ_2 потенциал поля вычисляется по приближенной формуле

$$\varphi = \left(1 + \frac{h^2 - 3z^2}{6}p^2\right)\frac{\Phi_1}{2h} + \frac{3z}{2h^3}\left(1 + \frac{3h^2 - 5z^2}{30}p^2\right)\Phi_2 - \frac{e_{31}^*(h^2 - 3z^2)}{6\varepsilon_{33}^*}(\varkappa_1 + \varkappa_2) \tag{1.10}$$

получаемой из (1.9) в предположении, что потенциал электрического поля по толщине оболочки изменяется по кубическому закону. Если же сделать предположение о квадратичном распределении потенциала поля по толщине оболочки, то имеем

$$\varphi = \left(1 + \frac{h^3 - 3z^2}{6}p^2\right)\frac{\Phi_1}{2h} + \frac{3z\Phi_2}{2h^3} - \frac{e_{31}^*(h^2 - 3z^2)}{6\varepsilon_{33}^*}(\varkappa_1 + \varkappa_2) \tag{1.11}$$

В этом случае имеем

$$\Phi_2 = {}^2/_3 V_0h^2 \tag{1.12}$$

а уравнение для определения Φ_1 не изменится.

Граничные условия, задаваемые на контуре оболочки, состоят из обычных механических условий и условий для потенциала

$$R\varphi = -\frac{D}{\varepsilon_{11}{}^S}, \qquad R = \frac{\cos\gamma}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\sin\gamma}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2} \tag{1.13}$$

где γ — угол между нормалью к контуру срединной поверхности и координатной линией α_1, D — электрическая индукция.

В соответствии с (1.8) из (1.13) получим

$$R\Phi_i = -\Phi_i{}^*, \qquad \Phi_i{}^* = \frac{1}{\varepsilon_{11}{}^S}\int_{-h}^{h} z^{i-1} D\,dz \qquad (i=1,2)$$

В случае, если потенциал поля распределен в соответствии с (1.11), граничное условие для Φ_2 не ставится.

2°. Пусть лицевые поверхности $z = \pm h$ оболочки неэлектродированы и на них задано значение нормальной составляющей вектора электрической индукции

$$D_3(\alpha_1, \alpha_2, \pm h) = D^{\pm} \tag{1.14}$$

Используя первое соотношение (1.3) и удовлетворяя условиям (1.14), получим уравнения для Φ_1, Φ_2. Удерживая в разложениях операторов, входящих в эти уравнения, члены до $(ph)^2$, получаем приближенные уравнения

$$p^2\Phi_1 = \frac{-(D^+ - D^-)}{\varepsilon_{33}{}^*}, \qquad \left(1 - \frac{2p^2h^2}{5}\right)\Phi_2 = \tag{1.15}$$
$$= \frac{(D^+ + D^-)\,h^3}{3\varepsilon_{33}{}^*} - \frac{2e_{31}{}^*h^3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_{33}{}^*}$$

Отметим, что первое уравнение (1.15) является точным.

Предположим, что потенциал поля по толщине оболочки распределен по закону (1.10), тогда для T_0 и M_0 с учетом (1.9), (1.15) найдем соответствующие приближенные формулы

$$T_0 = \frac{3}{h^2}\left(1 - \frac{p^2h^2}{15}\right)\Phi_2, \qquad M_0 = \frac{(D^+ + D^-)\,h^2}{3\varepsilon_{33}{}^*} - \frac{2e_{31}{}^*h^3(\varkappa_1 + \varkappa_2)}{3\varepsilon_{33}{}^*} \tag{1.16}$$

В случае, когда потенциал поля по толщине оболочки распределен согласно (1.11), можно приближенно считать, что

$$\Phi_2 = \frac{(D^+ + D^-)\,h^3}{3\varepsilon_{33}{}^*} - \frac{2e_{31}{}^*h^3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{3\varepsilon_{33}{}^*}$$
$$T_0 = \frac{(D^+ + D^-)\,h}{\varepsilon_{33}{}^*} - \frac{2e_{31}{}^*h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_{33}{}^*}$$

Для M_0 и Φ_1 выражения не изменяются.

Предполагая, что на части боковой поверхности оболочки S_1 задано значение потенциала V_1, а на части $S_2 = S_0/S_1$ (S_0 — боковая поверхность оболочки) условие вида (1.13), получим

$$\Phi_1 = 2V_1h, \quad \Phi_2 = 0 \quad \text{на } S_1 \tag{1.17}$$
$$R\Phi_i = -\Phi_i{}^* \quad (i = 1, 2) \quad \text{на } S_2$$

Если диэлектрическая проницаемость внешней среды много меньше диэлектрической проницаемости керамики, например для воздуха, то можно считать, что $D^+ = D^- = 0$. В противном случае D^+, D^- являются неизвестными величинами, для определения которых необходимо рассмотреть уравнения электростатики внешней среды.

2. Рассмотрим пьезокерамическую оболочку толщины $2h$, поляризованную вдоль одной из координатных линий (для определенности, напри-

мер, вдоль α_1). Очевидно, что уравнения (1.1), (1.6) верны и для оболочки с таким направлением поляризации. Из уравнений состояния для керамики, поляризованной вдоль координатной линии α_1, с учетом гипотез Кирхгофа — Лява находим

$$\sigma_{11} = c_{33}{}^*\varepsilon_{11} + c_{13}{}^*\varepsilon_{22} - e_{33}{}^*E_1, \quad \sigma_{12} = c_{44}^E\,\varepsilon_{12} - e_{15}E_2 \tag{2.1}$$

$$\sigma_{22} = c_{13}{}^*\varepsilon_{11} + g_{11}{}^*\varepsilon_{22} - э_{31}{}^*E_1$$

$$D_3 = \varepsilon_{11}{}^S E_3, \quad D_2 = e_{15}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{11}{}^S E_2, \quad D_1 = \beta_{33}{}^*E_1 + э_{31}{}^*\varepsilon_{22} + \\ + e_{33}{}^*\varepsilon_{11}$$

В соотношениях (2.1) введены следующие обозначения:

$$c_{33}{}^* = c_{33}{}^E\left(1 - \frac{(c_{13}{}^E)^2}{c_{33}{}^E c_{11}{}^E}\right), \quad c_{13}{}^* = c_{13}{}^E(1 - \nu^E), \quad \nu^E = \frac{c_{12}{}^E}{c_{11}{}^E}$$

$$g_{11}{}^* = c_{11}^E(1 - (\nu^E)^2), \quad э_{31}{}^* = e_{31}(1 - \nu^E)$$

$$\beta_{33}{}^* = \varepsilon_{33}{}^S\left(1 + \frac{e_{31}{}^2}{c_{11}{}^E\varepsilon_{33}{}^S}\right), \quad e_{33}{}^* = e_{33}\left(1 - \frac{e_{31}c_{13}{}^E}{e_{33}c_{11}{}^E}\right)$$

Соотношения для усилий и моментов имеют вид

$$T_1 = 2h(c_{33}{}^*\varepsilon_1 + c_{13}{}^*\varepsilon_2) + e_{33}{}^*\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_1} \tag{2.2}$$

$$T_2 = 2h(c_{13}{}^*\varepsilon_1 + g_{11}{}^*\varepsilon_2) + э_{31}{}^*\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_1}$$

$$S = 2c_{44}{}^E h\omega + e_{15}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_2}$$

$$M_1 = \frac{2h^3}{3}(c_{33}{}^*\varkappa_1 + c_{13}{}^*\varkappa_2) + e_{33}{}^*\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_1}$$

$$M_2 = \frac{2h^3}{3}(c_{13}{}^*\varkappa_1 + g_{11}{}^*\varkappa_2) + э_{31}{}^*\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_1}$$

$$H = \frac{2c_{44}{}^E h^3}{3}\tau + e_{15}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_2}$$

где Φ_1, Φ_2 определены соотношениями (1.8).

Запишем первое уравнение (1.6) с учетом трех последних соотношений (2.1)

$$\frac{d^2\varphi}{\partial z^2} + q^2\varphi = f_1 + zf_2 \tag{2.3}$$

$$q^2 = \left[\frac{\beta_{33}{}^*}{\varepsilon_{11}{}^S}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial(\ldots)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial(\ldots)}{\partial\alpha_2}\right]\frac{1}{A_1A_2}$$

$$f_1 = \frac{1}{\varepsilon_{11}{}^S}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2(э_{31}{}^*\varepsilon_2 + e_{33}\varepsilon_1) + e_{15}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\omega\right\}\frac{1}{A_1A_2}$$

$$f_2 = \frac{1}{\varepsilon_{11}{}^S}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2(э_{31}{}^*\varkappa_2 + e_{33}{}^*\varkappa_1) + e_{15}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau\right\}\frac{1}{A_1A_2}$$

Потенциал электрического поля выражается через интегральные характеристики Φ_1 и Φ_2

$$\varphi = \frac{q\cos qz}{2\sin qh}\Phi_1 + \frac{q^2\sin qz}{2\sin qh\,(1 - qh\operatorname{ctg} qh)}\Phi_2 - \frac{\cos qz}{q\sin qh}f_1 + \\ + \frac{f_1}{q^2} - \frac{h^3\sin qz}{3\sin qh\,(1 - qh\operatorname{ctg} qh)}f_2 + z\frac{f_2}{q^2} \tag{2.4}$$

Опуская очевидные преобразования, приведем окончательные уравнения для определения Φ_1 и Φ_2, а также укажем необходимые граничные условия, соответствующие 1° и 2°.

1°. Предполагая, что потенциал поля по толщине оболочки изменяется по кубическому закону

$$\varphi = \left(1 + \frac{h^2 - 3z^2}{6} q^2\right)\frac{\Phi_1}{2h} + \frac{3z}{2h^3}\left(1 + \frac{3h^2 - 5z^2}{30} q^2\right)\Phi_2 - \\ - \frac{h^2 - 3z^2}{6} f_1 - z\frac{3h^2 - 5z^2}{30} f_2$$

получаем приближенные уравнения для Φ_1 и Φ_2:

$$\left(1 - \frac{q^2h^2}{3}\right)\Phi_1 = \frac{2h^3 f_1}{3}, \quad \left(1 - \frac{q^2h^2}{15}\right)\Phi_2 = \frac{2V_0h^3}{3} - \frac{2h^5 f_2}{45} \tag{2.5}$$

Если потенциал поля изменяется по закону

$$\varphi = \left(1 + \frac{h^2 - 3z^2}{6} q^2\right)\frac{\Phi_1}{2h} + \frac{3z}{2h^3}\Phi_2 - \frac{h^2 - 3z^2}{6} f_1 \tag{2.6}$$

то для Φ_1 справедливо первое уравнение (2.5), а Φ_2 определяется выражением (1.12). Из условия

$$\cos\gamma\, D_1 + \sin\gamma\, D_2 = D \quad \text{на} \quad S_0$$

с учетом двух последних соотношений (2.1) получим граничные условия для Φ_1 и Φ_2, которые окончательно принимают вид

$$R_1\Phi_1 = -\Phi_1^* + 2h\{\cos\gamma\,(э_{31}^*\varepsilon_2 + e_{33}^*\varepsilon_1) + e_{15}\sin\gamma\,\omega\} \tag{2.7}$$

$$R_1\Phi_2 = -\Phi_2^* + \frac{2h^3}{3}\{\cos\gamma\,(э_{31}^*\varkappa_2 + e_{33}\varkappa_1) + e_{15}\sin\gamma\tau\}$$

$$R_1 = \beta_{33}^*\frac{\cos\gamma}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \varepsilon_{11}{}^S\frac{\sin\gamma}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}$$

Если же потенциал поля изменяется по закону (2.6), второе условие (2.7) не ставится.

2°. Приближенные уравнения для определения Φ_1 и Φ_2, получаемые из условия (1.14), имеют вид

$$q^2\Phi_1 = \frac{D^+ - D^-}{\varepsilon_{11}{}^S} - hf_1, \quad \left(1 - \frac{2q^2h^2}{5}\right)\Phi_2 = \frac{(D^+ + D^-)h^3}{3\varepsilon_{11}{}^S} - \frac{4h^5 f_2}{15}$$

Граничные условия на части S_1, где задано значение потенциала V_1, записываются в виде (1.17), а на части S_2, где указано значение нормальной составляющей вектора индукции,— в виде (2.7).

3. Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях прямоугольной пьезокерамической пластинки. Пусть a, b — линейные размеры по осям x и y соответственно. Пластина поляризована по толщине $2h$, лицевые поверхности безэлектродны и на них задано постоянное значение нормальной составляющей вектора электрической индукции, изменяющейся во времени по гармоническому закону. Предположим, что пластина совершает только изгибные колебания, что $D^+ - D^- = Q\exp(i\Omega t)$, $D^+ + D^- = 0$. В соответствии с формулами (1.1), (1.4), (1.15), (1.16) при учете тождества

$$\frac{(\nu_* + k_*^2)c_{11}^* + c_{11}{}^E(1 - \nu^E)}{c_{11}^*(1 + k_*^2)} = 1$$

для определения прогиба $w^* = w/a$ и интегральных характеристик потенциала электрического поля получим

$$\nabla_*\nabla_* w^* = \varkappa^2\delta^{-2}w^*, \ \nabla_* G_1 = 1, \ \Phi_2 = 0 \tag{3.1}$$

$$\nabla_* = \frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_*^2}, \quad x_* = \frac{x}{a}, \quad y_* = \frac{y}{a}, \quad G_1 = \frac{\Phi_1}{f_3}$$

$$f_3 = \frac{Qa^2}{\varepsilon_{33}^*}, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{3a^2}, \quad \varkappa^2 = \frac{\Omega^2 a^2}{c_{11}^*(1 + k_*^2)}, \quad k_*^2 = \frac{(e_{31}^*)^2}{c_{11}^*\varepsilon_{33}^*}$$

Механические граничные условия, соответствующие шарнирно опертому краю, запишутся в виде

$$w^* = 0, \quad \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_*^2} + \frac{\nu_* + k_*^2}{1 + k_*^2}\frac{\partial^2 w^*}{\partial y_*^2} = Q^\circ, \quad x_* = \pm 1 \tag{3.2}$$

$$w^* = 0, \quad \frac{\nu_* + k_*^2}{1 + k_*^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y_*^2} = Q^\circ, \quad y_* = \pm \frac{b}{a}$$

$$Q^\circ = \frac{e_{31}{}^* aQ}{2c_{11}{}^* \varepsilon_{33}{}^* (1 + k_*^2) h}$$

Предполагая, что контур пластинки электродирован и значение потенциала на нем равно нулю, для G_1 запишем граничное условие на контуре

(3.3) $\qquad G_1 = 0$

Как следует из соотношений (3.1)—(3.3), задача о вынужденных колебаниях пьезокерамической пластины под действием разности индукций сводится к задаче о вынужденных колебаниях изотропной пластины под действием заданного на контуре изгибающего момента величины Q°. В отсутствие пьезоэффекта для приведенной частоты имеем $f^2 = \rho\Omega^2 a^2 / c_{11}{}^*$. Поэтому учет пьезоэффекта приводит к повышению резонансной частоты в $(1 + k_*^2)$ раза. Для пьезокерамики $PZT = 4$ [8] $k_*^2 = 0{,}3233$. Потенциал электрического поля после решения уравнения (3.1) и удовлетворения условию (3.3) определяется формулой (1.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
2. *Борисейко В. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения.— Прикл. механика, 1976, т.12, № 2, с. 26—33.
3. *Борисейко В. А., Мартыненко В. С., Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических оболочек.— В кн.: Математическая физика. Вып. 21. К.: Наук. думка, 1977, с. 71—76.
4. *Сеник Н. А., Кудрявцев Б. А.* Уравнения теории пьезокерамических оболочек.— В кн.: Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа. М.: Изд-е Моск. ин-та хим. машиностроения, 1980, с. 70—76.
5. *Борисейко В. А., Мартыненко В. С., Улитко А. Ф.* Соотношения электроупругости пьезокерамических оболочек вращения, поляризованных вдоль меридиональной координаты.— Прикл. механика, 1979, т. 15, № 12, с. 36—42.
6. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. 1. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962. 274 с.
7. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. К.: Наук. думка, 1978. 343 с.
8. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.— В кн.: Физическая акустика. Т. 1, ч. А. / Под. ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966, с. 204—326.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1981