

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ С ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПО ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ

Бернар И. И., Опанасович В. К.

Предлагается иной, по сравнению с [1], подход к исследованию влияния тонкостенного упругого включения по дуге окружности на напряженное состояние однородной изотропной пластинки. Решение задачи сводится к системе двух сингулярных интегродифференциальных уравнений типа Прандтля. Приводится численный анализ для коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Рассмотрим равновесие изотропной пластинки с тонкостенным упругим включением постоянной ширины, расположенным по дуге окружности радиуса R . Предположим, что пластинка находится под действием равномерно распределенных на бесконечности усилий σ_1 и σ_2 (фиг. 1).

Обозначим через $2h$ ширину включения, 2φ — угол его раствора, L — дугу окружности с центральным углом 2φ , a и b — нижний и верхний концы включения соответственно. Величинам, характеризующим тонкостенное включение, будем приписывать индекс нуль. Граничное значение функций на берегу включения, расположенном ближе к центру окружности, будем обозначать знаком плюс, а на другом берегу — знаком минус.

Предположим, что на берегах включения имеют место следующие граничные условия:

$$(1.1) \quad (\sigma_{rr} + i\tau_{r\theta})_0^\pm = (\sigma_{rr} + i\tau_{r\theta})^\pm, \quad (V_r + iV_\theta)_0^\pm = (V_r + iV_\theta)^\pm$$

Компоненты σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta}$ тензора напряжений и компоненты V_r и V_θ вектора перемещения в условиях плоской теории упругости выражаются через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ по следующим формулам [2]:

$$(1.2) \quad \Phi(z) + \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) [\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}] = m$$

$$\kappa \Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) [\overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)}] = 2\mu n$$

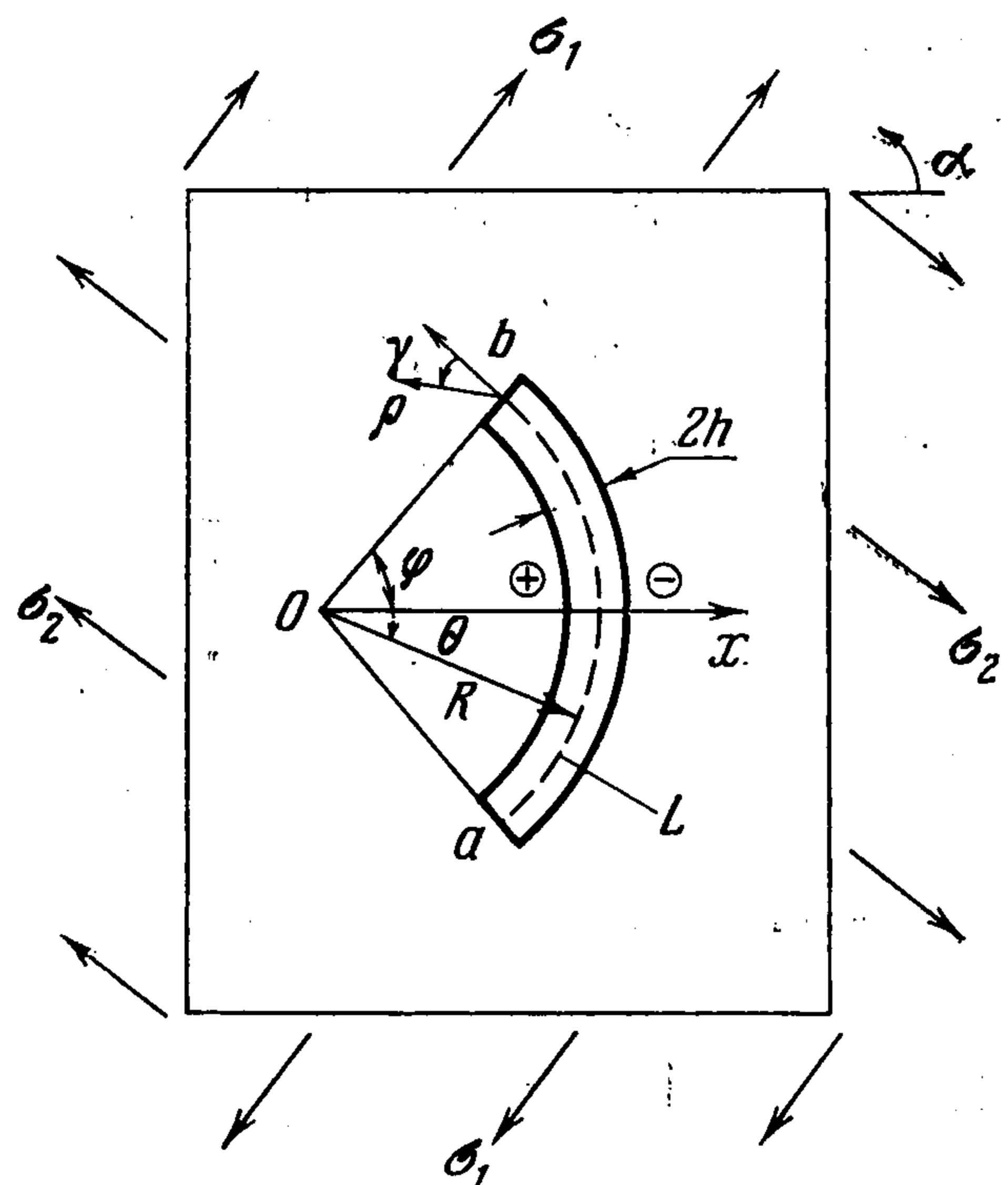
$$m = \sigma_{rr} + i\tau_{r\theta}, \quad n = \frac{e^{i\theta}}{iz} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V_r + iV_\theta) + i(V_r + V_\theta) \right]$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

(ν — коэффициент Пуассона). Для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ справедливы следующие разложения:

$$(1.3) \quad \Phi(z) = \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad |z| > 1; \quad \Omega(z) = B_0 - \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + O(z), \quad |z| < 1$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\alpha}, \quad B_0 = \overline{\Phi(0)}$$



Фиг. 1

Используя формулы (1.2) и пренебрегая величинами высших порядков малости по сравнению с h , для тонкостенного включения можем записать

$$(1.4) \quad \begin{aligned} m_0^+ - m_0^- &= 2i \frac{h}{R} A(t), \quad t \in L \\ m_0^+ + m_0^- &= 2 \left[\Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{R^2}{t^2} \Gamma_0(t) \right], \quad t \in L \\ n_0^+ - n_0^- &= \frac{ih}{R\mu_0} B(t), \quad t \in L \\ n_0^+ + n_0^- &= \frac{1}{\mu_0} \left[\kappa_0 \Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} - \frac{R^2}{t^2} \Gamma_0(t) \right] + 2i\varepsilon, \quad t \in L \\ A(t) &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_0(t) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \overline{\Phi_0(t)} - \frac{R^2}{t^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_0(t) \\ B(t) &= \kappa_0 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_0(t) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \overline{\Phi_0(t)} + \frac{R^2}{t^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_0(t) \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_0(t)$ и $\Gamma_0(t)$ — неизвестные функции, подлежащие определению, ε — угол поворота включения как жесткого целого.

Для пластинки граничные условия с берегов включения снесем на линию L . Используя соотношения (1.1), (1.2) и (1.4), приходим к следующим краевым задачам для определения кусочно-голоморфных функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ с линией скачков L :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 2i \frac{h}{R} A(t), \quad t \in L \\ [\kappa\Phi(t) + \Omega(t)]^+ - [\kappa\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2i \frac{h}{R} \frac{\mu}{\mu_0} B(t), \quad t \in L \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= \\ = 2 \left[\Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{R^2}{t^2} \Gamma_0(t) \right], \quad t \in L \\ \kappa[\Phi^+(t) + \Phi^-(t)] - [\Omega^+(t) + \Omega^-(t)] &= \\ = 2 \frac{\mu}{\mu_0} \left[\kappa_0 \Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} - \frac{R^2}{t^2} \Gamma_0(t) \right] + 4i\mu\varepsilon, \quad t \in L \end{aligned}$$

Решая задачи линейного сопряжения (1.5), находим

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{h}{\pi R(1+\kappa)} \left[\int_a^b \frac{A(t)}{t-z} dt + \frac{\mu}{\mu_0} \int_a^b \frac{B(t)}{t-z} dt \right] + \Gamma \\ \Omega(z) &= \frac{h}{\pi R(1+\kappa)} \left[-\kappa \int_a^b \frac{A(t)}{t-z} dt + \frac{\mu}{\mu_0} \int_a^b \frac{B(t)}{t-z} dt \right] + B_0 - \frac{\overline{\Gamma} R^2}{z^2} \end{aligned}$$

Подставляя (1.7) в соотношения (1.6), получим следующую систему двух сингулярных интегродифференциальных уравнений типа Прандтля для определения неизвестных функций $\Phi_0(t)$ и $\Gamma_0(t)$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{R^2}{t^2} \Gamma_0(t) + \frac{a_1}{\pi} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_0(u) \frac{du}{u-t} + \\ + \frac{a_2}{\pi} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \vartheta} \overline{\Phi_0(u)} \frac{du}{u-t} + \frac{a_3}{\pi} \int_a^b \frac{R^2}{u^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_0(u) \frac{du}{u-t} = \\ = \Gamma + B_0 - \frac{\overline{\Gamma} R^2}{t^2}, \quad t \in L \\ \frac{\mu}{\mu_0} \left[\kappa_0 \Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} - \frac{R^2}{t^2} \Gamma_0(t) \right] + \\ + \frac{b_1}{\pi} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_0(u) \frac{du}{u-t} + \frac{b_2}{\pi} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \vartheta} \overline{\Phi_0(u)} \frac{du}{u-t} + \\ + \frac{b_3}{\pi} \int_a^b \frac{R^2}{u^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_0(u) \frac{du}{u-t} = \kappa\Gamma - B_0 + \frac{\overline{\Gamma} R^2}{t^2} - 2i\mu\varepsilon, \quad t \in L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{h}{R(1+\kappa)} \left(2 \frac{\mu}{\mu_0} \kappa_0 + 1 - \kappa \right), \\
a_2 &= -a_3 = \frac{h}{R(1+\kappa)} \left(2 \frac{\mu}{\mu_0} - 1 + \kappa \right) \\
b_1 &= -\frac{h}{R(1+\kappa)} \left[2\kappa + \frac{\mu}{\mu_0} (\kappa - 1) \kappa_0 \right], \\
b_2 &= -b_3 = \frac{h}{R(1+\kappa)} \left[2\kappa - \frac{\mu}{\mu_0} (\kappa - 1) \right]
\end{aligned}$$

На основании (1.7) и (1.3) приходим к следующим условиям:

$$(1.9) \quad \int_a^b \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_0(t) dt = 0, \quad \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \overline{\Phi_0(t)} - \frac{R^2}{t^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_0(t) \right] dt = 0$$

выражающих равенство нулю коэффициента при $1/z$ в разложениях (1.3).

Сделав в (1.8) и (1.9) замену

$$t = \frac{x + i\beta}{-x + i\beta} R, \quad \beta = -\operatorname{ctg} \varphi/2, \quad |x| \leq 1$$

получим

$$\begin{aligned}
(1.10) \quad & \frac{a_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_0'(v)}{v-x} dv + \frac{a_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\overline{\Phi_0'(v)}}{v-x} dv + \frac{a_3}{\pi} \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_0'(v)}{v-x} dv - \\
& - \frac{2\beta}{x^2 + \beta^2} \left[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \Gamma_0(x) \right] + \\
& + \frac{1}{\pi} \frac{x-i\beta}{x+i\beta} \{ a_1 [\Phi_0(1) - \Phi_0(-1)] + a_2 [\overline{\Phi_0(1)} - \overline{\Phi_0(-1)}] \} + \\
& + \frac{a_3}{\pi} \frac{(x-i\beta)^3}{(x^2 + \beta^2)^2} [\Gamma_0(1) - \Gamma_0(-1)] + \\
& + \frac{2ia_3\beta}{\pi} \left(\frac{x-i\beta}{x^2 + \beta^2} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{t-i\beta}{t+i\beta} \Gamma_0'(t) dt = \\
& = -\frac{2\beta}{x^2 + \beta^2} \left[\Gamma + B_0 - \overline{\Gamma'} \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \right], \quad |x| \leq 1 \\
& \frac{b_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_0'(v)}{v-x} dv + \frac{b_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\overline{\Phi_0'(v)}}{v-x} dv + \frac{b_3}{\pi} \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_0'(v)}{v-x} dv - \\
& - \frac{2\beta}{x^2 + \beta^2} \frac{\mu}{\mu_0} \left[\kappa_0 \Phi_0(x) - \overline{\Phi_0(x)} - \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \Gamma_0(x) \right] + \\
& + \frac{1}{\pi} \frac{x-i\beta}{x+i\beta} \{ b_1 [\Phi_0(1) - \Phi_0(-1)] + b_2 [\overline{\Phi_0(1)} - \overline{\Phi_0(-1)}] \} + \\
& + \frac{b_3}{\pi} \frac{(x-i\beta)^3}{(x^2 + \beta^2)^2} [\Gamma_0(1) - \Gamma_0(-1)] + \frac{2ib_3\beta}{\pi} \left(\frac{x-i\beta}{x^2 + \beta^2} \right)^2 \times \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{t-i\beta}{t+i\beta} \Gamma_0'(t) dt = \\
& = -\frac{2\beta}{x^2 + \beta^2} \left[\kappa \Gamma - B_0 + \overline{\Gamma'} \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 - 2i\mu\epsilon \right], \quad |x| \leq 1 \\
(1.11) \quad & \int_{-1}^1 \frac{x+i\beta}{x-i\beta} \Phi_0'(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \left[\frac{x+i\beta}{x-i\beta} \overline{\Phi_0'(x)} - \frac{x-i\beta}{x+i\beta} \Gamma_0'(x) \right] dx = 0
\end{aligned}$$

2. Следуя [3], решение системы уравнений (1.10), (1.11) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
(2.1) \quad \Phi_0(x) &= K_0 + x_0 \operatorname{arc} \sin x - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m U_{m-1}(x)}{m} \\
\Gamma_0(x) &= M_0 + y_0 \operatorname{arc} \sin x - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m U_{m-1}(x)}{m}
\end{aligned}$$

где $U_m(x)$ — полиномы Чебышева второго рода, x_m, y_m ($m = 0, 1, \dots$), K_0, M_0 — неизвестные комплексные коэффициенты.

Подставляя (2.1) в (1.7), находим

$$(2.2) \quad \Phi(z) = -\frac{2ih \cos(\varphi/2) z}{(z+R)(1+\kappa) X_0(z)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[N_m(z) + \frac{\mu}{\mu_0} R_m(z) \right] \times \\ \times T_m\left(i\beta \frac{z-R}{z+R}\right) + \Phi_1(z) \\ \Omega(z) = -\frac{2ih \cos(\varphi/2) z}{(z+R)(1+\kappa) X_0(z)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[-\kappa N_m(z) + \frac{\mu}{\mu_0} R_m(z) \right] \times \\ \times T_m\left(i\beta \frac{z-R}{z+R}\right) + \Omega_1(z) \\ N_m(z) = x_m + \bar{x}_m - \frac{R^2}{z^2} y_m, \\ R_m(z) = \kappa_0 x_m - \bar{x}_m + \frac{R^2}{z^2} y_m, \quad X_0(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

($T_m(z)$ — полиномы Чебышева первого рода, $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ — функции, ограниченные в окрестности концов включения).

Подставляя (2.1) в (1.10), (1.11), после преобразований приходим к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения x_m и y_m

$$(2.3) \quad (a_1 x_n + a_2 \bar{x}_n + a_3 y_n) \frac{\pi}{2} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} (A_{n, n-1}^1 x_m + *A_{m, n-1}^1 \bar{x}_m + B_{m, n-1}^1 y_m + *B_{m, n-1}^1 \bar{y}_m) = P_{n-1}^1 \\ (b_1 x_n + b_2 \bar{x}_n + b_3 y_n) \frac{\pi}{2} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} (A_{m, n-1}^2 x_m + *A_{m, n-1}^2 \bar{x}_m + B_{m, n-1}^2 y_m + \\ + *B_{m, n-1}^2 \bar{y}_m) + Q_{n-1} \mu \varepsilon = P_{n-1}^2$$

$$(2.4) \quad \beta \sum_{m=1}^{\infty} x_m \{i[H(1, m-1) + H(1, m+1)] - 2\beta H(1, m)\} + \\ + x_0 [\pi - 2\beta^2 H(1, 0)] = 0 \\ \beta \sum_{m=1}^{\infty} \{i(\bar{x}_m + y_m)[H(1, m-1) + H(1, m+1)] - \\ - 2\beta(\bar{x}_m - y_m)H(1, m)\} + (x_0 - y_0)[\pi - 2\beta^2 H(1, 0)] = 0$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} A_{m, n}^1 \\ *A_{m, n}^1 \\ A_{m, n}^2 \\ *A_{m, n}^2 \end{vmatrix} = 2\beta \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \kappa_0 \mu' \\ -\mu' \end{vmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k} R(m-1, n, 2k) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{vmatrix} B_{m, n}^1 \\ B_{m, n}^2 \end{vmatrix} = 2\beta \begin{vmatrix} 1 \\ -\mu' \end{vmatrix} T_{m, n} + \begin{vmatrix} a_3 \\ b_3 \end{vmatrix} S_{m, n}$$

$$*B_{m, n}^1 = -*B_{m, n}^2 = \frac{2i\beta^2 h(1-\mu')}{R(1+\kappa)} P_n \{i\{H(1, m+1) + H(1, m-1)\} - \\ - 2\beta^2 [H(2, m+1) + H(2, m-1)]\} + 4\beta [H(2, m)\beta^2 - H(1, m)]$$

$$\begin{vmatrix} A_{0,n}^1 \\ *A_{0,n}^1 \\ A_{0,n}^2 \\ *A_{0,n}^2 \end{vmatrix} = -2\beta \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \kappa_0\mu' \\ -\mu' \end{vmatrix} C_n + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} G_n + \begin{vmatrix} F_n^1 \\ F_n^2 \\ -F_n^1 \\ -F_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} B_{0,n}^1 \\ B_{0,n}^2 \end{vmatrix} = -2\beta \begin{vmatrix} 1 \\ -\mu' \end{vmatrix} V_n + \begin{vmatrix} a_3 \\ b_3 \end{vmatrix} W_n$$

$$*B_{0,n}^1 = -*B_{0,n}^2 = \frac{i\beta h(1-\mu')}{R(1+\kappa)} P_n \{\pi + 8\beta^2 [H(2,0)\beta^2 - H(1,0)]\}$$

$$\begin{aligned} S_{m,n} = & 2i\beta \{2\beta^2 [H(2, m-n) + H(2, m-n-2) - \\ & - H(2, m+n) - H(2, m+n+2)] - H(1, m-n) - \\ & - H(1, m-n-2) + H(1, m+n) + H(1, m+n+2)\} + \\ & + 4\beta^2 \{\beta^2 [H(2, m-[n-1]) - H(2, m+n+1)] - H(1, m- \\ & - n-1) + H(1, m+n+1)\} - i\beta^2 [P_n - i\beta(L_{n+1} + L_{n-1}) - \\ & - 2\beta^2 L_n] \{i[H(1, m+1) + H(1, m-1)] + 2\beta H(1, m)\} \end{aligned}$$

$$T_{m,n} = \sum_{k=0}^{\infty} [P_{2k} - 8\beta^2(L_{2k} - \beta^2 Z_{2k})] R(m-1, n, 2k) -$$

$$- 2i\beta \sum_{k=1}^{\infty} \{L_{2k} + L_{2(k-1)} - 2\beta^2 [Z_{2k} + Z_{2(k-1)}]\} R(m-1, n, 2k-1)$$

$$\begin{aligned} V_n = & C_n + 4\beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k-1} \{[H(3, 2k-n-1) - H(3, 2k+n+1)]\beta^2 - \\ & - H(2, 2k-n-1) + H(2, 2k+n+1)\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 2i\beta \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k-1} \{H(1, 2k-n) + H(1, 2k-n-2) - H(1, 2k+n) - \\ & - H(1, 2k+n+2) - 2\beta^2 [H(2, 2k-n) + H(2, 2k-n-2) - \\ & - H(2, 2k+n) - H(2, 2k+n+2)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n = & \frac{\pi}{2} [D_n - 3i\beta P_n - 2\beta^2(L_{n+1} + L_{n-1}) + 4i\beta^3 L_n] + \\ & + i\beta [P_n - i\beta(L_{n+1} + L_{n-1}) - 2\beta^2 L_n] \{\pi + 8\beta^2 [\beta^2 H(2,0) - H(1,0)]\} \end{aligned}$$

$$C_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k-1} [H(1, 2k-n-1) - H(1, 2k+n+1)]$$

$$\begin{aligned} R(m, n, k) = & -4(n+1)(k+1)[(m+1)^2 - \\ & - (n-k)^2]^{-1} [(m+1)^2 - (n+k+2)^2]^{-1} \cos^2\left(\frac{m+n+k}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

$$G_n = \frac{\pi}{2} (D_n - i\beta P_n), \quad Q_n = -2\beta\pi P_n i,$$

$$F_n^1 = -\frac{\pi i\beta h(1-\mu')}{R(1+\kappa)} P_n, \quad F_n^2 = -\frac{\pi i\beta h(1+\kappa_0\mu')}{R(1+\kappa)} P_n$$

$$P_{2k} = (1-p^2)(-p)^k \beta^{-2}, \quad P_{2k+1} = 0,$$

$$D_{2k+1} = \frac{1}{2} (1-p^2)^2 (-p)^k \beta^{-2}, \quad D_{2k} = 0$$

$$L_{2k} = \frac{16(-1)^k p^{k+2}}{(1-p)^3(1+p)} [1+k(1-p)], \quad L_{2k+1} = 0$$

$$\begin{aligned} Z_{2k} = & 32(-1)^k p^{k+3} (1+p)^2 (1-p^2)^{-5} \{2[(1+p)^2 - p] + \\ & + k(1-p)[k(1-p^2) + 2 + (1+p)^2]\}, \end{aligned}$$

$$Z_{2k+1} = 0 \quad \left(p = \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{4}, k = 0, 1, 2, \dots\right)$$

$$\begin{aligned}
H(n, m) &= [1 + (-1)^m] \pi \left(\frac{q^2 - 1}{2} \right)^{1-2n} q^{n-|m|/2} (-1)^n \times \\
&\times \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+|m|/2-1}{j} \binom{2n-j-2}{n-1} (q^2 - 1)^j \quad \left(q = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{4} \right) \\
E_{2k-1} &= \frac{16k}{\pi (4k^2 - 1)^2}, \quad E_{2(k-1)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\
P_n^1 &= -2\beta \int_{-1}^1 \left[2\Gamma - \bar{\Gamma}' \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 - P_0^1(x) \right] \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x)}{x^2 + \beta^2} dx \\
P_0^1(x) &= K_0 + \bar{K}_0 - M_0 \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \\
P_n^2 &= -2\beta \int_{-1}^1 \left[(\kappa - 1)\Gamma + \bar{\Gamma}' \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 - \right. \\
&\left. - P_0^2(x) \right] \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x)}{x^2 + \beta^2} dx \\
P_0^2(x) &= \left[\kappa_0 K_0 - \bar{K}_0 + M_0 \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \right] \mu', \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}
\end{aligned}$$

Квазирегулярность бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.3), (2.4) исследовалась численно при разных параметрах задачи.

Поступая таким же образом, как и в работе [4], для постоянных K_0 и M_0 примем такие значения, чтобы из решения задачи следовали возможные частные случаи

$$\begin{aligned}
P_0^1(x) &= \left[2\Gamma - \bar{\Gamma}' \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \right] \frac{\min(\mu, \mu_0)}{\mu} \\
P_0^2(x) &= \left[(\kappa - 1)\Gamma + \bar{\Gamma}' \left(\frac{-x+i\beta}{x+i\beta} \right)^2 \right] \frac{\min(\mu, \mu_0)}{\mu_0}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
P_n^1 &= -\pi\beta \left[1 - \frac{\min(\mu, \mu_0)}{\mu} \right] \{ 2\Gamma P_n - \bar{\Gamma}' [P_n - 2i\beta(L_{n+1} + L_{n-1}) - \\
&- 8\beta^2 L_n + 4i\beta^3(Z_{n+1} + Z_{n-1}) + 8\beta^4 Z_n] \} \\
P_n^2 &= -\pi\beta \left[1 - \frac{\min(\mu, \mu_0)}{\mu_0} \right] \{ (\kappa - 1)\Gamma P_n + \\
&+ \bar{\Gamma}' [P_n - 2i\beta(L_{n+1} + L_{n-1}) - 8\beta^2 L_n + 4i\beta^3(Z_{n+1} + Z_{n-1}) + 8\beta^4 Z_n] \}
\end{aligned}$$

Угол поворота включения ε находим из условия (Λ — область включения)

$$\operatorname{Re} \int_{\Lambda} \frac{R^2}{z} \left[\Phi(z) - \bar{\Omega} \left(\frac{R^2}{z} \right) \right] dz = 0$$

которое после преобразований примет вид

$$\begin{aligned}
(2.5) \quad 2\operatorname{Re} x_0 - \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \{ -2i\beta \{ H(1, m-1) + H(1, m+1) - \\
- 2\beta^2 [H(2, m-1) + H(2, m+1)] \} + 8\beta^2 [\beta^2 H(2, m) - H(1, m)] \} - \\
- \operatorname{Re} y_0 \{ \pi + 8\beta^2 [\beta^2 H(2, 0) - H(1, 0)] \} = 0
\end{aligned}$$

Следуя работе [5], напряженное состояние пластинки в окрестности конца включения в полярной системе координат (ρ, γ) (фиг. 1) можно представить в следующем виде:

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_{\rho} \\ \sigma_{\gamma} \\ \tau_{\rho\gamma} \end{array} \right\| = K_1^* \left\| \begin{array}{l} 5c_1 - c_3 \\ 3c_1 - c_3 \\ s_1 + s_3 \end{array} \right\| + K_2^* \left\| \begin{array}{l} -5s_1 + 3s_3 \\ -3s_1 - 3s_3 \\ c_1 + 3c_3 \end{array} \right\| +$$

$$+ K_3^* \begin{vmatrix} 5c_1 + (1 + 2\kappa) c_3 \\ 3c_1 - (1 + 2\kappa) c_3 \\ s_1 - (1 + 2\kappa) s_3 \end{vmatrix} + K_4^* \begin{vmatrix} -5s_1 + (1 - 2\kappa) s_3 \\ -3s_1 - (1 - 2\kappa) s_3 \\ c_1 + (1 - 2\kappa) c_3 \end{vmatrix} + O(\rho^0)$$

$$K_i^* = \frac{K_i}{4\sqrt{2\rho}}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (s_1 = \sin^{1/2}\gamma,$$

$$s_3 = \sin^{3/2}\gamma, \quad c_1 = \cos^{1/2}\gamma, \quad c_3 = \cos^{3/2}\gamma)$$

Здесь K_i — коэффициенты интенсивности напряжений, определяемые по формулам

$$K_1^j - iK_2^j = - \frac{2h}{(1 + \kappa)\sqrt{R \sin \varphi}} \frac{\mu}{\mu_0} \sum_{m=0}^{\infty} R_m(d_j) (-1)^{(m+1)(2-j)}$$

$$K_3^j - iK_4^j = - \frac{2h}{(1 + \kappa)\sqrt{R \sin \varphi}} \sum_{m=0}^{\infty} N_m(d_j) (-1)^{(m+1)(2-j)},$$

$$d_j = \begin{cases} a, & j = 1 \\ b, & j = 2 \end{cases}$$

($j = 1$ для конца a и $j = 2$ для конца b).

3. Рассмотрим некоторые предельные случаи.

Пластинка с трещиной по дуге окружности ($\mu_0 \rightarrow 0$). Сделаем в (1.8) замену

$$\Phi_0(t) = \mu_0/\mu \Phi_0^*(t), \quad \Gamma_0(t) = \mu_0/\mu \Gamma_0^*(t)$$

Устремив $\mu_0 \rightarrow 0$ и подставив решение полученного сингулярного интегрального уравнения в (1.7), находим выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, совпадающие с приведенными в [2].

Однородная пластинка ($\mu = \mu_0, \kappa = \kappa_0$). Случай однородной пластинки можно получить двумя способами: предельным переходом в (1.7) при $h \rightarrow 0$ либо предельным переходом в (2.3)–(2.5) при $\mu \rightarrow \mu_0$ (в этом случае однородная система линейных алгебраических уравнений дает решение $\varepsilon = x_m = y_m = 0$ ($m = 0, 1, \dots$), т. е. $A(t) = B(t) = 0$). В обоих случаях имеем

$$\Phi(z) = \Gamma, \quad \Omega(z) = \Gamma - \bar{\Gamma} R^2/z^2$$

Пластинка с тонкостенным абсолютно жестким включением по дуге окружности ($\mu_0 \rightarrow \infty$). Перейдя в (1.8) к пределу при $\mu_0 \rightarrow \infty$, решая полученное сингулярное интегральное уравнение и подставляя это решение в (1.7), находим выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, совпадающие с приведенными в [6].

Пластинка с прямолинейным тонкостенным упругим включением ($\varphi \rightarrow 0$, но $R\varphi \rightarrow l = \text{const}$). Устремив в (1.8) $\varphi \rightarrow 0$ ($R\varphi \rightarrow l$) и введя обозначения

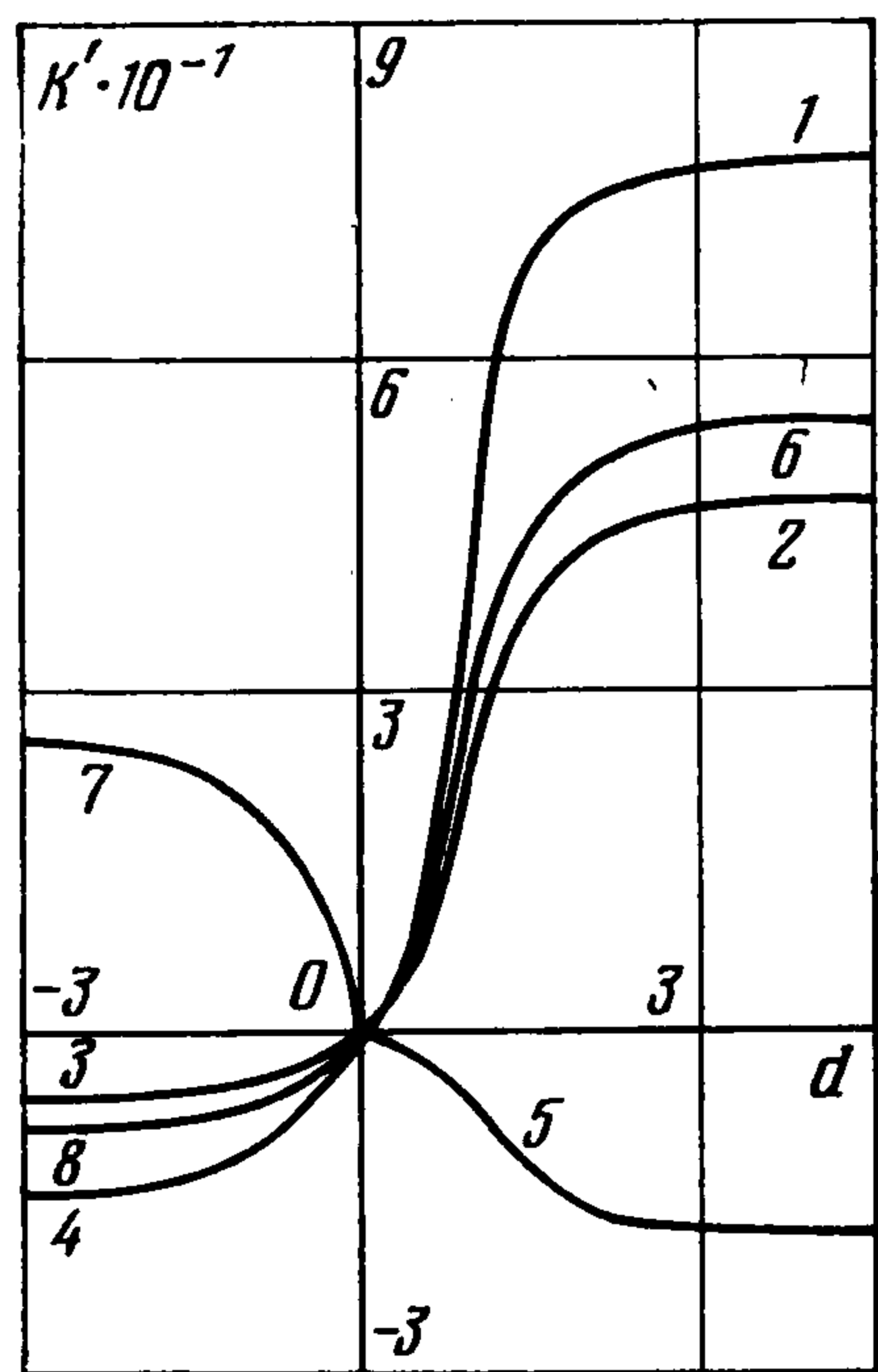
$$M(t) = \kappa_0 \Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} + \Gamma_0(t), \quad K(t) = \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} - \Gamma_0(t)$$

приходим к системе двух сингулярных интегродифференциальных уравнений типа Прандтля для прямолинейного тонкостенного упругого включения [4].

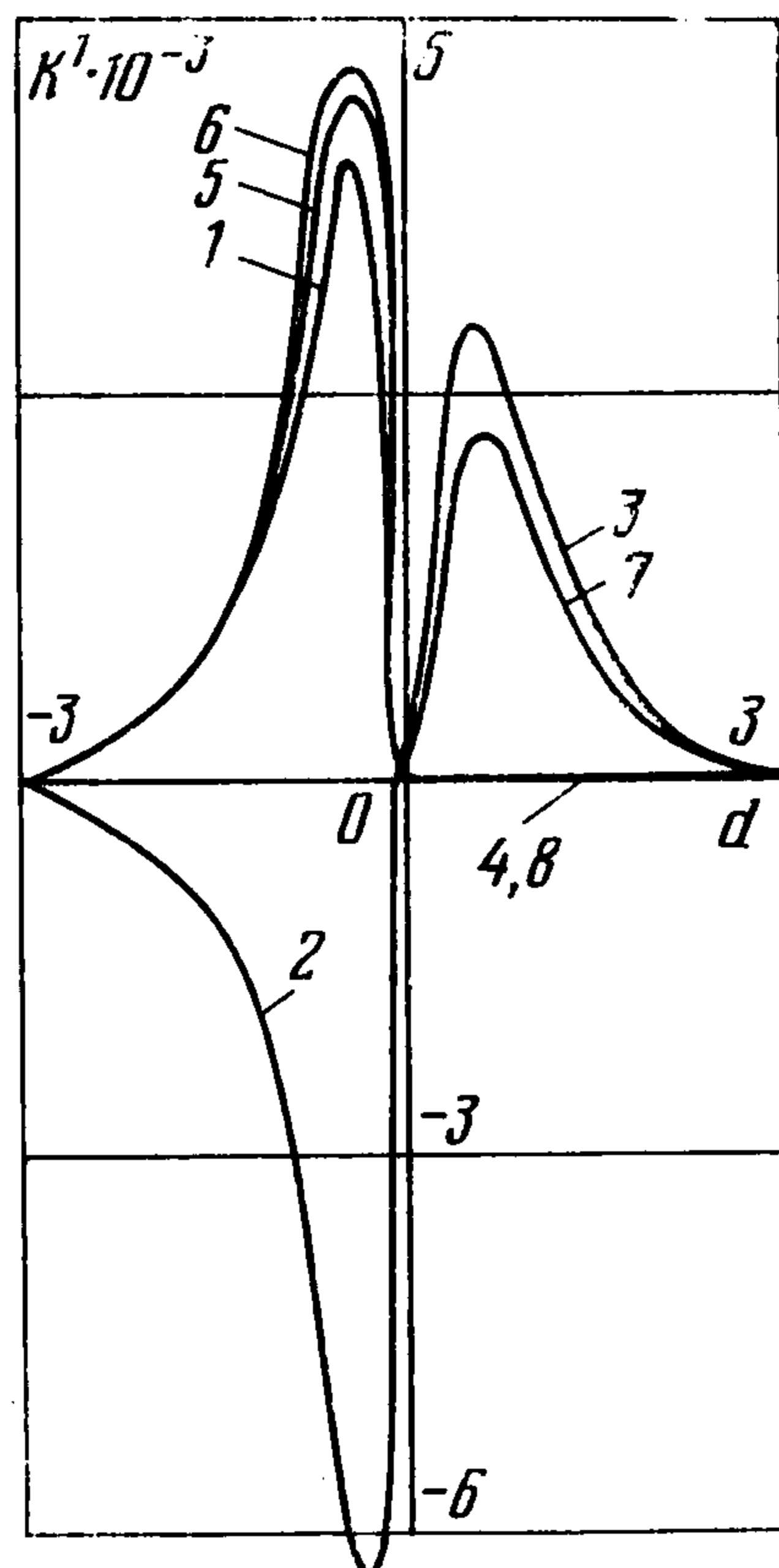
4. На ЭВМ ЕС-1022 был проведен численный анализ решения задачи, результаты которого представлены на фиг. 2–5. Вычисления проводились при следующих значениях параметров:

$$\sigma_1 = P, \quad \sigma_2 = 0, \quad h/(R \sin \varphi) = 0,1, \quad \nu = \nu_0 = 1/3.$$

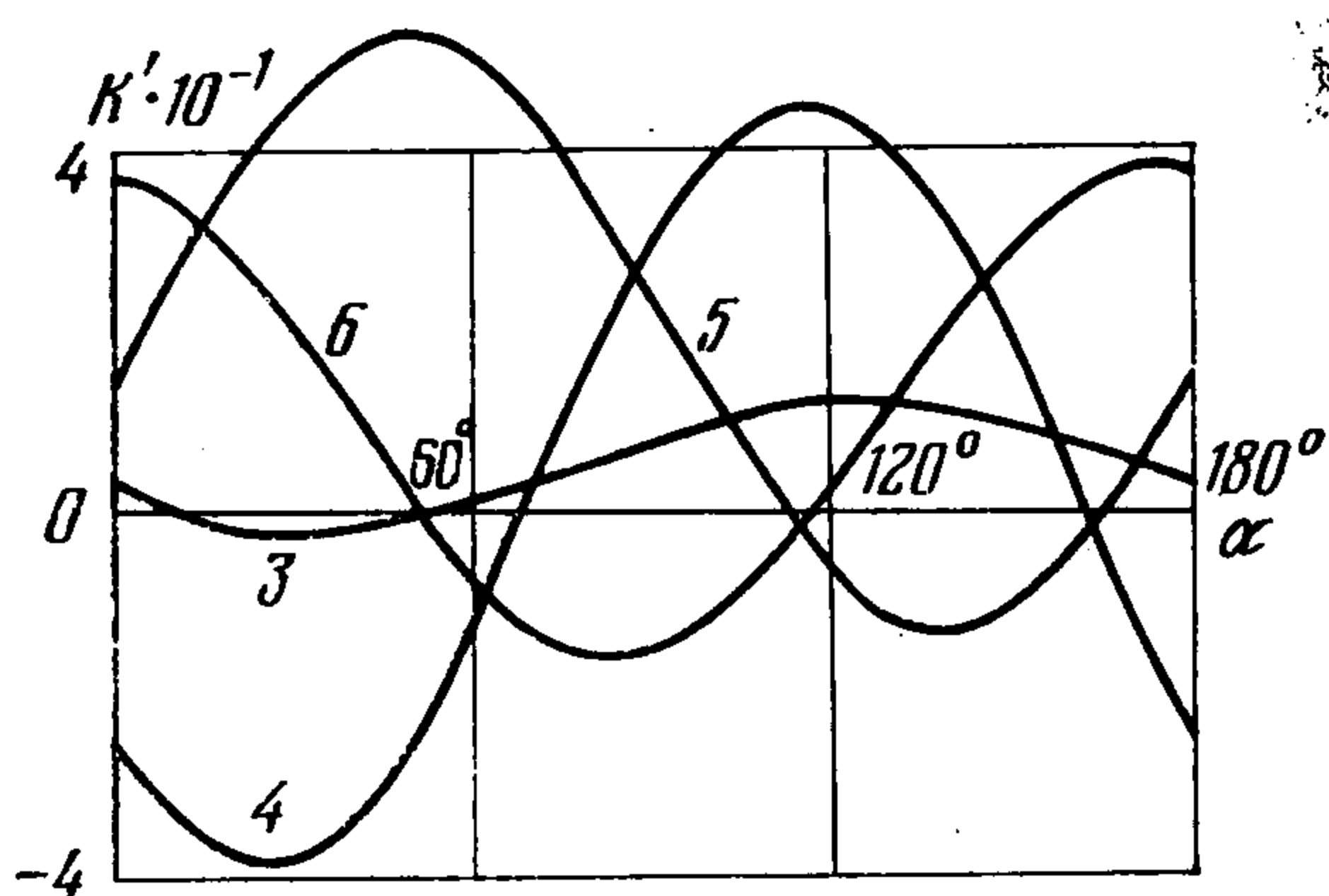
На фиг. 2, 3 представлена зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $K_i' = K_i/(P\sqrt{R \sin \varphi})$ в точке b от относительной жесткости $d = l g \mu/\mu_0$ пластинки и включения при $\alpha = 0$. Кривым i ($i = 1, 2, 3, 4$) соответствуют значения K_i' при угле раствора включения $\varphi = \pi/6$, кривым $i + 4$ — при угле раствора $\varphi = \pi/2$. В предельных случаях исследуемой задачи числовые значения совпадают с результатами, полученными на основании работ [2, 6, 7].



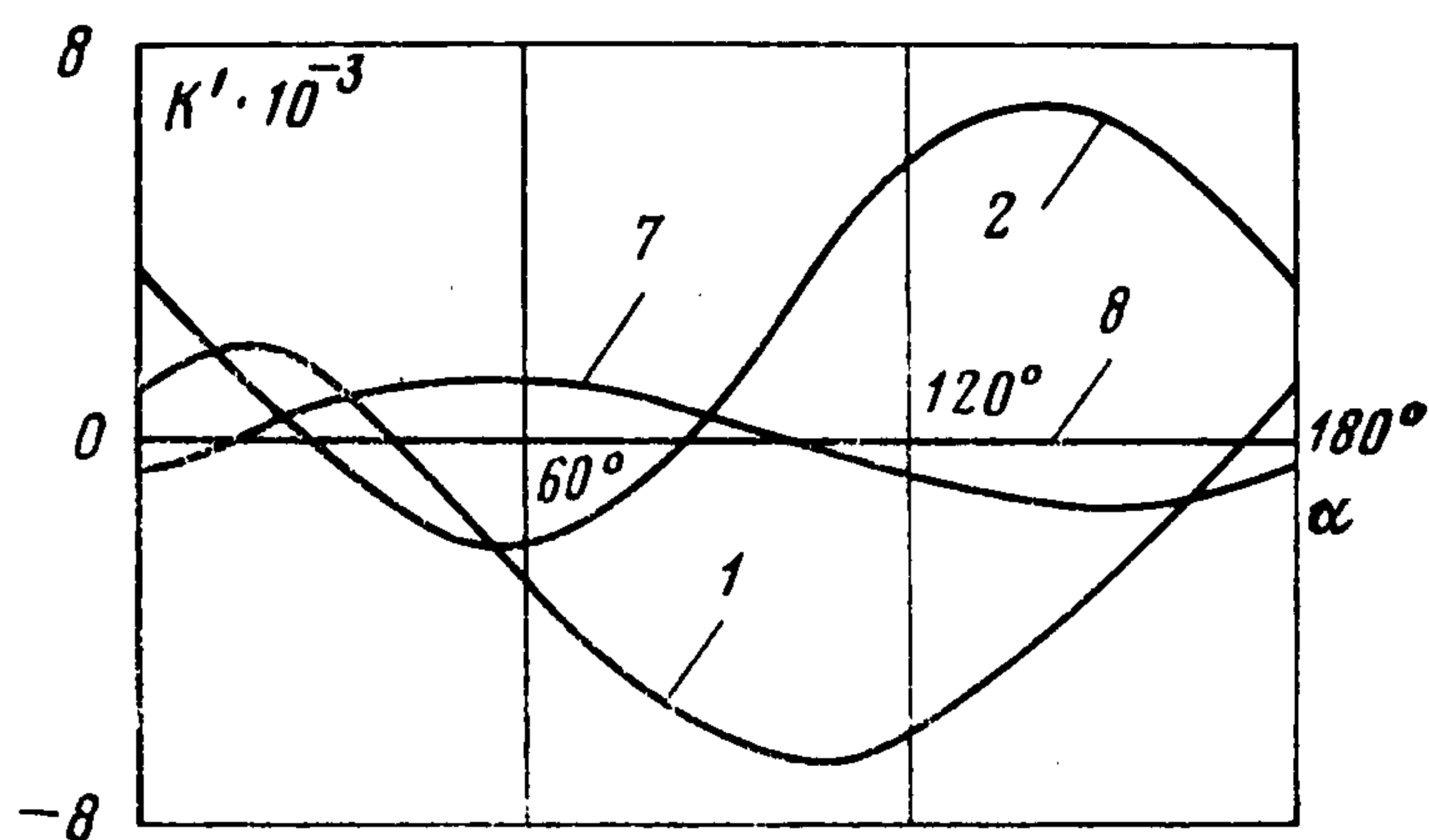
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4, 5 представлена зависимость K_i' в той же точке от угла α при угле раствора включения $\varphi = \pi/3$. Кривым i ($i = 1, 2, 3, 4$) соответствует значение относительной жесткости $d = -1$, кривым $i + 4 - d = 1$. Отметим, что кривые на фиг. 3, 5 являются продолжениями соответствующих кривых на фиг. 2, 4, но только в другом масштабе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грилицкий Д. В., Сорокатый Ю. И., Сулим Г. Т. Система сингулярных интегральных уравнений задачи для тонкостенных упругих включений по дуге окружности. — Вестн. Львов. ун-та. Сер. механ.-матем., 1979, вып. 15, с. 69—75.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 412—421.
4. Драган М. С., Опанасович В. К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 342—348.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К.: Наук. думка, 1976. 443 с.
6. Бережницкий Л. Т., Панькив Б. И. Коэффициенты интенсивности напряжений возле дугообразного жесткого включения. — Физ.-хим. механика материалов, 1976, т. 12, № 2, с. 91—96.
7. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1968. 246 с.