Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 539.3

ПРОБЛЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОГО СТЕРЖНЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПРУЖИН

Бердичевский В. Л., Сутырин В. Г.

Пружину с большим числом витков можно приближенно рассматривать как одномерный континуум (эквивалентный стержень), частицы которого — витки пружины. Проблема эквивалентного стержня заключается в построении уравнений, описывающих этот континуум, и в вычислении характеристик эквивалентного стержня по геометрии витков и упругим свойствам материала пружины. В линейной теории проблема эквивалентного стержня обстоятельно исследована [1—6]. В геометрически нелинейной теории она, по существу, оставалась открытой (были известны лишь некоторые точные решения задач о растяжении, кручении и изгибе пружины [7—10]).

Ниже проблема эквивалентного стержня решается вариационно-асимптотическим методом [11—14].

1. Теория нерастяжимых стержней [7, 14]. В классической теории стержень моделируется кривой Г, оснащенной орторепером τ_a (a, b, c = = 1, 2, 3), вектор τ_3 которого касателен к Г. Кривую Г можно рассматривать как среднюю линию стержня, а плоскость, натянутую на векторы τ_α, — как плоскость поперечного сечения стержня. Деформированное состояние стержня задается компонентами $r^i(\xi)$ радиуса-вектора точек кривой Г и компонентами $\tau_a{}^i(\xi)$ векторов τ_a ($\xi \in [0, l]$ — длина дуги вдоль Г, индексы i, j, k соответствуют проекциям на декартовы оси системы координат наблюдателя x^i и пробегают значения 1, 2, 3; величины с индексами, написанными вверху или внизу, совпадают; место индекса выбирается в соответствии с правилом суммирования по повторяющимся нижнему и верхнему индексам). Предполагается, что система координат наблюдателя и орторепер τ_a имеют одинаковую ориентацию, и определитель ортогональной матрицы $\|\tau_a{}^i\|$ равен +1.

Величины r^i и $\tau_a{}^i$ удовлетворяют ограничениям

$$dr^i/d\xi = \tau_3{}^i, \quad \tau_a{}^i\tau_{ib} = \delta_{ab} \tag{1.1}$$

где δ_{ab} — символ Кронекера. Деформированное состояние нерастяжимого стержня имеет три функционально независимые степени свободы.

Кривизна и кручение кривой Г характеризуется величинами $\omega_a = {}^1/_2 e_{abc}\tau_{,\xi}{}^{ib}\tau_i{}^c$, где e_{abc} — символ Леви—Чивита, запятой в индексах перед ξ обозначается дифференцирование по ξ.

Меры деформации нерастяжимого стержня Ω_a вводятся равенствами

$$\Omega_a = \omega_a - \omega_{(0)a} \tag{1.2}$$

Индексом (0) отмечаются значения величин в недеформированном состоянии. Изгиб стержня характеризуется величинами $\Omega_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2)$, кручение — величиной Ω_3.

В случае, когда на концах стержня заданы r^i и $\tau_a{}^i$, истинное положение стержня есть стационарная точка функционала [14]

$$I = \int_0^l {}^1/_2 I^{ab}\Omega_a\Omega_b d\xi \tag{1.3}$$

где I^{ab} — тензор жесткостей поперечного сечения.

2. Пружины. Пружина — это упругий стержень со специальным недеформированным состоянием. Опишем эти состояния (рассмотрение в этом пункте относится к недеформированному состоянию; во избежание громоздкости во всех формулах индекс 0, отмечающий величины в недеформированном состоянии, опущен).

Пусть имеется некоторая пространственная кривая $\overline{\Gamma}$, задаваемая уравнениями $x^i = \bar{r}^i(\zeta)$, где ζ — натуральный параметр вдоль $\overline{\Gamma}$, и снабженная ортореперном $\bar{\tau}_a(\zeta)$ так, что $\bar{\tau}_3{}^i = d\bar{r}^i/d\zeta$. Представим радиус-вектор средней линии Γ стержня, из которого свита пружина, в виде

$$r^i(\xi) = \bar{r}^i(\zeta) + \rho^a(\zeta)\,\bar{\tau}_a{}^i(\zeta), \quad \zeta = \zeta(\xi) \tag{2.1}$$

Здесь $\rho^a(\xi)$ и $\zeta(\xi)$ — функции, удовлетворяющие условию $dr^i/d\xi\, dr_i/d\xi = 1$. Величины $\rho^a(\xi)$ имеют смысл проекций локального радиуса-вектора $r^i - \bar{r}^i$ на векторы ортореперa $\bar{\tau}_a$.

Введем проекции α_{ab} векторов τ_a, которыми снабжена средняя линия стержня, на векторы $\bar{\tau}_b$

$$\tau_a{}^i = \alpha_a{}^b \bar{\tau}_b{}^i \tag{2.2}$$

Ортогональная матрица $\|\alpha_b{}^a\|$, как и все встречающиеся в дальнейшем ортогональные матрицы, по условию имеют детерминант, равный 1.

Формулы (2.1), (2.2) можно написать для недеформированного состояния произвольного стержня.

Упругий стержень будем называть пружиной, если найдутся такие функции $\bar{r}^i(\zeta)$ и $\bar{\tau}_a{}^i(\zeta)$, что функции $\rho^a(\xi)$, $\alpha_{ab}(\xi)$ и физические характеристики $I^{ab}(\xi)$ представляются в виде функций $f(\eta, \xi)$ от быстрой переменной η и медленной переменной ξ (причем $\eta = \eta(\xi)$) со следующими свойствами: 1) функция f периодична по η с периодом единица; 2) $d\eta/d\xi \equiv 1/\Delta(\xi) \geqslant \text{const} > 0$, $\Delta \ll l$; 3) характерный масштаб L изменения функций $f(\eta, \xi)|_{\eta=\text{const}}$ и $\Delta(\xi)$ по ξ удовлетворяет условию $\Delta \ll L$. Кроме того, для пружин функции $\varkappa \equiv d\zeta/d\xi$ и $\bar{\omega}_a = {}^1/_2 e_{abc}\bar{\tau}_\zeta{}^{ib}$, $\bar{\tau}_i{}^c$ будем считать функциями медленной переменной ξ. Величина $\Delta(\xi)$ для пружин имеет смысл локальной длины витка пружины.

В дальнейшем для краткости примем, что явное указание аргументов η или ξ у какой-либо функции означает, что она удовлетворяет условиям 1—3.

Приведем пример. Положим $\bar{r}^i = a^i\zeta$, $\bar{r}^i{}_1 = b^i$, $\bar{r}_2{}^i = c^i$, где a^i, b^i, c^i — постоянные единичные взаимно ортогональные векторы, и

$$\rho^1 = R\cos 2\pi\eta,\ \rho^2 = R\sin 2\pi\eta,\ \rho^3 = 0,\ \eta = \Delta^{-1}\xi$$
$$\zeta = \varkappa\xi,\ \varkappa = \sin\alpha,\ \alpha \in [-\pi/2,\ \pi/2] \tag{2.3}$$

Здесь R — радиус пружины, положительная величина Δ — длина витка, α — угол подъема витка. Величины R, Δ и α — постоянные, связанные соотношением $2\pi R = \Delta\cos\alpha$.

Кривая Γ, определяемая формулами (2.1), (2.3),— правильная винтовая линия. Орторепер, которым оснащена линия Γ, выберем состоящим из касательного вектора τ_3 и геометрических нормали и бинормали τ_1, τ_2. Тогда компоненты ортогональной матрицы α_{ab}, представляющие проекции векторов τ_a на векторы $\bar{\tau}_b$, определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_{1b} &= (-\cos 2\pi\eta,\ -\sin 2\pi\eta,\ 0) \\ \alpha_{2b} &= (\sin\alpha\sin 2\pi\eta,\ -\sin\alpha\cos 2\pi\eta,\ \cos\alpha) \\ \alpha_{3b} &= (-\cos\alpha\sin 2\pi\eta,\ \cos\alpha\cos 2\pi\eta,\ \sin\alpha) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Функции I^{ab} возьмем постоянными. Определенные таким образом пружины называются правильными цилиндрическими, их геометрия задается двумя параметрами, например R и α. Величины ω_a при этом постоянны

$$\omega_1 = 0, \ \omega_2 = 2\pi\Delta^{-1}\cos\alpha, \ \omega_3 = 2\pi\Delta^{-1}\sin\alpha$$

причем ω_2 и ω_3 имеют смысл соответственно геометрических кривизны и кручения кривой Г, а функции $\overline{\omega}_a \equiv 0$.

Для любой функции быстрой переменной η определим операцию осреднения формулой

$$\langle f\rangle = \int_0^1 f(\eta)\,d\eta$$

Если $f = f(\eta, \xi)$, то величина $\langle f\rangle$ может зависеть от ξ и удовлетворяет условию 3, т. е. является мало меняющейся функцией ξ на расстояниях порядка Δ.

Не ограничивая общности, можно считать, что функции $\rho^a(\eta, \xi)$ в (2.1) подчинены ограничениям

$$\langle\rho^a(\eta, \xi)\rangle = 0. \tag{2.5}$$

Если бы функции ρ^a не удовлетворяли равенству (2.5), то его выполнения можно было бы добиться заменой $\bar{r}^i \to \bar{r}^i + \langle\rho^a\rangle\,\bar{\tau}_a{}^i$.

В силу (2.5) имеет место соотношение $\langle r^i\rangle = \bar{r}^i$. Таким образом, кривая $\bar{\Gamma}$ задает среднюю ось пружины и ее можно интерпретировать как ось эквивалентного стержня.

Эквивалентный стержень снабжен ортореперов $\bar{\tau}_a$. Если известны функции r^i и $\tau_a{}^i$ (и, следовательно, $\bar{r}^i$), то орторепер $\bar{\tau}_a$ не восстанавливается по ним однозначно: преобразование поворота векторов $\bar{\tau}_\alpha$ на некоторый угол вокруг вектора $\bar{\tau}_3$ не изменяет r^i, $\tau_a{}^i$ и $\bar{r}^i$

$$\begin{aligned} &\bar{\tau}_\alpha{}^i \to \bar{\tau}_\beta{}^i a_\alpha{}^\beta, \ \bar{\tau}_3{}^i \to \bar{\tau}_3{}^i \\ &\alpha_{a\gamma} \to \alpha_{a\delta} a_\gamma{}^\delta, \quad \alpha_{a3} \to \alpha_{a3} \\ &\rho_\alpha \to \rho_\beta a_\alpha{}^\beta, \quad \rho_3 \to \rho_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Поэтому необходимы дополнительные условия, однозначно определяющие орторепер $\bar{\tau}_a$. В качестве таких условий возьмем ограничения

$$\rho_2|_{\eta=0} = 0, \quad \rho_1|_{\eta=0} > 0 \tag{2.7}$$

Условия (2.7) однозначно определяют ортогональную матрицу $a_\beta{}^\alpha(\xi)$, если для первоначально взятого орторепера $\bar{\tau}_a$ эти условия не выполнялись.

Величины ω_a для пружин вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} &\omega_a(\eta, \xi) = \Delta^{-1}\theta_a + \varkappa\alpha_{ab}\overline{\omega}^b + {}^1\!/_2 e_{abc}\alpha^{bd}_{|\xi}\alpha_d{}^c \\ &\theta_a(\eta, \xi) = {}^1\!/_2 e_{abc}\alpha^{bd}_{|\eta}\alpha_d{}^c \end{aligned} \tag{2.8}$$

Вертикальной чертой в индексах перед η и ξ обозначаются частные производные по η, ξ функций, зависящих от быстрой и медленной переменных.

Решение задачи (1.1) — (1.3) для пружин быстро осциллирует. Требуется заменить точную постановку задачи (1.1) — (1.3) приближенной «осредненной», в которой фигурируют функции от ξ, мало меняющиеся на расстояниях порядка длины витка Δ.

3. Задача об эквивалентном стержне. Дальше показано, что для пружин функции $r^i(\xi)$ и $\tau_a{}^i(\xi)$ в деформированном состоянии представимы в виде

$$r^i = \bar{r}^i(\zeta) + \rho^a(\eta)\bar{r}_a{}^i(\zeta), \quad \zeta = \zeta(\xi) \tag{3.1}$$
$$\tau_a{}^i = \alpha_a{}^b(\eta)\bar{\tau}_b{}^i, \quad \eta = \eta(\xi)$$

Функции ρ^a имеют порядок Δ (при $\Delta \to 0$). Функции ρ^a и $\alpha_a{}^b$ зависят от $\bar{r}^i$ и $\bar{\tau}_a{}^i$ и их первых производных, однако это не подчеркивается в обозначениях.

Функции $\varkappa = d\zeta/d\xi$ и $\bar{\omega}_a = {}^1/_2 e_{abc}\bar{\tau}_{,\zeta}{}^{ib}\bar{\tau}_i{}^c$ мало меняются на расстояниях порядка Δ. Функции $\rho^a(\eta)$ и ортогональная матрица $\alpha_{ab}(\eta)$ удовлетворяют условиям 1—3 п. 2 и ограничениям (2.5) и (2.7).

Функции $\bar{r}^i$ и $\bar{\tau}_a{}^i$ определяют состояние эквивалентного стержня в деформированном положении и находятся из условия стационарности функционала

$$\int_0^l F d\xi \tag{3.2}$$

на множестве функций $\bar{r}^i$ и $\bar{\tau}_a{}^i$, удовлетворяющих ограничениям

$$d\bar{r}^i/d\xi = \bar{\tau}_3{}^i, \quad \bar{\tau}_a{}^i\bar{\tau}_{ib} = \delta_{ab} \tag{3.3}$$

Здесь F — функция от мер деформации эквивалентного стержня $\bar{\Omega}_a = \varkappa\bar{\omega}_a - \varkappa_0\bar{\omega}_{(0)a}$ и $\gamma = {}^1/_2((\varkappa/\varkappa_0)^2 - 1)$, величин, характеризующих недеформированное состояние $\varkappa_0$, $\bar{\omega}_{(0)a}$, и физических характеристик I^{ab} стержня, из которого свита пружина.

Для вычисления F надо решить задачу на витке

$$F = \inf\Phi, \quad \Phi = \langle {}^1/_2 I^{ab}\Omega_a\Omega_b\rangle \tag{3.4}$$
$$\Omega_a = \Delta^{-1}(\theta_a - \theta_{(0)a}) + \alpha_{ab}\bar{\Omega}^b + (\alpha_{ab} - \alpha_{(0)ab})\varkappa_0\bar{\omega}^b_{(0)}$$

где нижняя грань берется по всем периодическим функциям $\alpha_{ab}(\eta)$ и $\rho_a(\eta)$, удовлетворяющим ограничениям

$$\alpha_{ac}\alpha_b{}^c = \delta_{ab} \tag{3.5}$$

$$\alpha_{3a} = \varkappa\delta_{3a} + \Delta^{-1}\rho_{a\,|\,\eta} + e_{abc}(\bar{\Omega}^b + \varkappa_0\bar{\omega}^b_{(0)})\rho^c \tag{3.6}$$

$$\langle\rho^a\rangle = 0, \quad \rho_2|_{\eta=0} = 0, \quad \rho_1|_{\eta=0} > 0 \tag{3.7}$$

Величины $\bar{\Omega}_a$, Δ, $\varkappa_0$ и $\bar{\omega}_{(0)a}$ в задаче (3.4) — (3.7) — постоянные параметры, а I^{ab}, $\theta_{(0)a}$ и $\alpha_{(0)ab}$ — заданные периодические функции η.

По вычисленным функциям $\rho^a(\eta)$ и $\alpha_{ab}(\eta)$ и известным краевым значениям функций r^i и $\tau_a{}^i$ из формул (3.1) находятся краевые условия для функций $\bar{r}^i$ и $\bar{\tau}_a{}^i$.

Если же один конец пружины жестко заделан, а на другом заданы сила F_i и момент M_i, то деформированное состояние эквивалентного стержня определяется из вариационного уравнения

$$\delta\int_0^l F d\xi - \delta L = 0 \tag{3.8}$$
$$\delta L = (F_i\delta\bar{r}^i + M_i\bar{\tau}_3{}^i\delta\varphi + M_i\bar{\tau}^{i\alpha}\bar{\tau}^{j\beta}e_{\alpha\beta}\delta\bar{r}_{j,\zeta})|_{\xi=l}$$
$$\delta\varphi = {}^1/_2 e^{\alpha\beta}\bar{\tau}_\alpha{}^i\delta\bar{\tau}_{i\beta}$$

где $e^{\alpha\beta}$ — двумерный символ Леви — Чивита.

Приведем выражение для F, которое получается в результате решения задачи (3.4) — (3.7) в частном случае правильной цилиндрической пружины, свитой из круглого стержня (т. е. $I^{\alpha\beta} = I\delta^{\alpha\beta}$, $I^{\alpha 3} = 0$, $I^{33} = J$)

$$2F = I\left[(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)\sqrt{1-\varkappa^2} - 2\pi\Delta^{-1}\sqrt{1-\varkappa_0^2}\right]^2 + J\left[(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)\varkappa - 2\pi\Delta^{-1}\varkappa_0\right]^2 + \frac{IJ}{J - {}^1/_2(J-I)\sqrt{1-\varkappa_0^2}}\overline{\Omega}_\alpha\overline{\Omega}^\alpha \tag{3.9}$$

Это выражение выведено в предположении малости $\overline{\Omega}_\alpha$, при этом отброшены перекрестные члены между $\overline{\Omega}_\alpha$ и $\overline{\Omega}_3$, γ.

Дальше получены также выражения F при более общих предположениях.

Оказывается, что плотность энергии F не является выпуклой функцией характеристик деформаций $\overline{\Omega}_3$ и $\varkappa$, и эквивалентный стержень, по-видимому, представляет простейший пример модели сплошной среды с невыпуклой плотностью энергии. Этот круг вопросов здесь не рассматривается.

4. Асимптотический анализ вариационной задачи. Дадим вывод формул (3.1) — (3.7). Рассмотрим асимптотику по малому параметру Δ/L — отношению длины витка пружины к характерному масштабу изменения функций по медленному аргументу ξ.

Будем искать r^i и $\tau_a{}^i$ как функции быстрой и медленной переменных: $r^i = r^i(\eta, \xi)$, $\tau_a{}^i = \tau_a{}^i(\eta, \xi)$, где $\eta = \eta(\xi)$ — функция, введенная при задании недеформированного состояния пружины. Подставляя $r^i(\eta, \xi)$ в первое уравнение (1.1) и выделяя главные в асимптотическом смысле слагаемые, получим: $r_{|\eta}{}^i = 0$, т. е. в первом приближении r^i — функции только медленной переменной

$$r^i = \bar{r}^i(\xi) \tag{4.1}$$

Функции $\tau_a{}^i(\eta, \xi)$ пока произвольные. Представим r^i в виде $r^i = \bar{r}^i + r'^i(\eta, \xi)$, где $r'^i(\eta, \xi)$ — асимптотически малые добавки. Не ограничивая общности, можно считать, что $\langle r'^i\rangle = 0$ (если $\langle r'^i\rangle$ отличны от нуля, то равенства $\langle r'^i\rangle = 0$ можно достичь, переопределяя $\bar{r}^i$ и r'^i: $\bar{r}^i \to \bar{r}^i + \langle r'^i\rangle$, $r'^i \to r'^i - \langle r'^i\rangle$). Из первого уравнения (1.1) видно, что r'^i дают вклад в ограничения, если $r'^i \sim \Delta$. Поэтому примем, что $r'^i = O(\Delta)$. Зафиксируем функции $\bar{r}^i$ и будем искать функции $r'^i(\eta, \xi)$ и $\tau_a{}^i(\eta, \xi)$. Сначала сделаем следующую замену.

По фиксированным $\bar{r}^i(\xi)$ построим функции $\varkappa(\xi)$, $\zeta(\xi)$ и $\bar{\tau}_3{}^i(\xi)$ в соответствии с формулами

$$\varkappa = (\bar{r}_{,\xi}{}^i \bar{r}_{i,\xi})^{1/2} = d\zeta/d\xi, \quad \zeta(0) = 0, \quad \bar{r}_{,\xi}{}^i = \varkappa\bar{\tau}_3{}^i \tag{4.2}$$

Построим произвольные векторы $\bar{\tau}_a$ так, чтобы три вектора $\bar{\tau}_a$ образовывали ортонормированный репер. Введем функции $\rho^a(\eta, \xi)$ и ортогональную матрицу $\alpha_{ab}(\eta, \xi)$ равенствами

$$r'^i = \bar{\tau}_a{}^i \rho^a(\eta, \xi), \quad \tau_a{}^i = \bar{\tau}^i{}_b \alpha_a{}^b(\eta, \xi) \tag{4.3}$$

Если на $\rho^a(\eta, \xi)$ наложить ограничения (2.7), то векторы $\bar{\tau}_\alpha{}^i$ с помощью преобразования (2.6) определятся однозначно. Таким образом, по заданным $r'^i(\eta, \xi)$, $\tau_a{}^i(\eta, \xi)$ и $\bar{r}^i(\xi)$ однозначно определяются функции $\bar{\tau}_a{}^i(\xi)$, $\alpha_{ab}(\eta, \xi)$ и $\rho^a(\eta, \xi)$, удовлетворяющие ограничениям (3.3), (3.5) и (3.7). Обратно, по функциям α_{ab} и ρ^a и формулам (4.3) восстанавливаются функции r'^i и $\tau_a{}^i$.

Зафиксируем теперь функции $\bar{r}^i$ и ортогональную матрицу $\bar{\tau}_a{}^i$, удовлетворяющие соотношениям (4.2), и будем искать функции α_{ab} и ρ^a, удовлетворяющие ограничениям (3.5), (3.7). Подставим (4.3) в функционал (1.3) и ограничения (1.1). Отбросим в первом приближении производные $\rho_{a|\xi}$, $\alpha_{ab|\xi}$ и $\alpha_{(0)ab|\xi}$ по сравнению с величинами $\Delta^{-1}\rho_{a|\eta}$, $\Delta^{-1}\alpha_{ab|\eta}$ и $\Delta^{-1}\alpha_{(0)ab|\eta}$.

Поскольку в пределе $\Delta/L \to 0$ для любой функции $f(\eta, \xi)$ справедливо равенство

$$\int_0^l f(\eta(\xi), \xi)\, d\xi = \int_0^l \langle f \rangle\, d\xi$$

то из условия стационарности энергии стержня получим задачу на витке (3.4) — (3.7).

После решения задачи на витке функции $\bar{r}^i(\xi)$ и $\bar{\tau}_a{}^i(\xi)$ определяются из вариационной задачи (3.2), (3.3).

5. Решение задачи на витке. Далее ограничимся рассмотрением пружин, которые в недеформированном состоянии образуют винтовую линию (см. пример в п. 2), при этом

$$\bar{\omega}_{(0)a} = 0 \tag{5.1}$$

т. е. эквивалентный стержень в недеформированном состоянии прямой и незакрученный.

В отличие от примера п. 2, в котором векторы τ_α совпадали с геометрическими нормалью и бинормалью, дальше допускается, что они могут быть повернуты вокруг вектора τ_3 на некоторый угол φ_0. Соответствующие функции $\rho_{(0)}^a$ и $\alpha_{(0)}^{ab}$ имеют вид

$$\rho_{(0)}^1 = R_0 \cos 2\pi\eta, \quad \rho_{(0)}^2 = R_0 \sin 2\pi\eta, \quad \rho_{(0)}^3 = 0 \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{(0)}^{11} &= -\cos\varphi_0 \cos 2\pi\eta - \varkappa_0 \sin\varphi_0 \sin 2\pi\eta \\
\alpha_{(0)}^{12} &= -\cos\varphi_0 \sin 2\pi\eta + \varkappa_0 \sin\varphi_0 \cos 2\pi\eta, \quad \alpha_{(0)}^{13} = -k_0 \sin\varphi_0 \\
\alpha_{(0)}^{21} &= \sin\varphi_0 \cos 2\pi\eta + \varkappa_0 \cos\varphi_0 \sin 2\pi\eta \\
\alpha_{(0)}^{22} &= \sin\varphi_0 \sin 2\pi\eta - \varkappa_0 \cos\varphi_0 \cos 2\pi\eta, \quad \alpha_{(0)}^{23} = k_0 \cos\varphi_0 \\
\alpha_{(0)}^{31} &= -k_0 \sin 2\pi\eta, \quad \alpha_{(0)}^{32} = k_0 \cos 2\pi\eta, \quad \alpha_{(0)}^{33} = \varkappa
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь $\varkappa_0$ и k_0 связаны соотношением $k_0 = \sqrt{1 - \varkappa_0{}^2}$, а длина витка Δ выражается формулой $\Delta = 2\pi R_0/k_0$. Если в (5.3) положить $\varphi_0 = 0$, $k_0 = \cos\alpha$, $\varkappa_0 = \sin\alpha$, то функции $\rho_{(0)}^a$ и $\alpha_{(0)}^{ab}$ перейдут в соответствующие функции из примера п. 2.

Класс пружин (5.1) — (5.3) задается тремя параметрами, например, величинами $\varkappa_0$, R_0 и φ_0, которые могут быть медленно меняющимися функциями ξ. Этот класс пружин — основной в технических приложениях.

Величины $\theta_{(0)}^a$ не зависят от быстрой переменной η и даются формулами

$$\theta_{(0)}^1 = -2\pi k_0 \sin\varphi_0, \quad \theta_{(0)}^2 = 2\pi k_0 \cos\varphi_0, \quad \theta_{(0)}^3 = 2\pi\varkappa_0 \tag{5.4}$$

Задача на витке формулируется как задача о нахождении минимума функционала

$$2\Phi = \int_0^1 I^{ab} [\Delta^{-1}(\theta_a - \theta_{(0)\,a}) + \alpha_{ac}\bar{\Omega}^c][\Delta^{-1}(\theta_b - \theta_{(0)\,b}) + \alpha_{bc}\bar{\Omega}^c]\, d\eta \tag{5.5}$$

$$\theta_a = {}^1\!/_2 e_{abc} \alpha^{bd}_{|\eta} \alpha_d{}^c, \quad \bar{\Omega}^a = \varkappa\bar{\omega}^a$$

на множестве всех периодических функций $\alpha_{ab}(\eta)$ и $\rho^a(\eta)$, удовлетворяющих ограничениям (3.5) — (3.7), при этом для рассматриваемого класса пружин ограничение (3.6) принимает форму

$$\alpha_{3a} = \varkappa\delta_{3a} + \Delta^{-1}\rho_{a|\eta} + e_{abc}\bar{\Omega}^b \rho^c \tag{5.6}$$

Решение задачи на витке зависит от четырех параметров $\overline{\Omega}_a$ и $\varkappa$, характеризующих деформацию эквивалентного стержня, и трех параметров $\varkappa_0$, R_0 и φ_0 (через которые выражаются $\theta^a_{(0)}$ и Δ), несущих информацию о недеформированном состоянии. Для получения уравнений Эйлера вариационной задачи (5.5), (3.5), (3.7), (5.6) надо проварьировать функционал (5.5), в который добавлены ограничения (3.5), (3.7), (5.6) с соответствующими множителями Лагранжа. При этом получатся нелинейные уравнения с постоянными коэффициентами. При $\overline{\Omega}_\alpha = 0$ удается получить их точное решение. В этом решении функции ρ^a и α_{ab} даются формулами (5.2) и (5.3), в которых вместо $\varkappa_0$ и R_0 надо подставить $\varkappa$ и $R = k\,(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)^{-1}$ $(k \equiv \sqrt{1-\varkappa^2})$, а вместо φ_0 — корень φ уравнения

$$(5.7)\qquad I^{\alpha a}\left[(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)\, m_a - \Delta^{-1}\theta_{(0)a}\right] m^\beta e_{\alpha\beta} = 0$$

$$m_1 = -k\sin\varphi,\quad m_2 = k\cos\varphi,\quad m_3 = \varkappa$$

Уравнение (5.7) — трансцендентное относительно φ и определяет φ как функцию $\varkappa$ и $\overline{\Omega}_3$. В общем случае оно имеет от двух до четырех корней. Из них надо выбирать корень, к которому можно прийти, непрерывно меняя $\varkappa$ и $\overline{\Omega}_3$, из начального значения φ_0 при $\varkappa = \varkappa_0$ и $\overline{\Omega}_3 = 0$. Анализ уравнения (5.7) показывает, что это условие выделяет корень единственным образом. Решение уравнения (5.7) существенно зависит от тензора I^{ab} и значения φ_0. Например, если тензор I^{ab} диагонален и $\varphi_0 = {}^1/_2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то имеется корень $\varphi = \varphi_0$. Если к тому же $I^{\alpha\beta} = I\delta^{\alpha\beta}$, то при любом φ_0 уравнение (5.7) имеет корень $\varphi = \varphi_0$. Перечисленные случаи являются основными для приложений.

Обозначим функции ρ_a и α_{ab} в полученном решении через $\rho_a{}^*$ и $\alpha_{ab}{}^*$. Будем искать линейные по $\overline{\Omega}_\alpha$ добавки к решению $\rho_a{}^*$ и $\alpha_{ab}{}^*$. Представим искомые величины ρ_a и α_{ab} в виде

$$(5.8)\qquad \rho_a = \rho_a{}^* + u_a,\quad \alpha_{ab} = \alpha_{db}{}^*\,(\delta_a{}^d + e_a{}^{dc}\nu_c)$$

где $u_a(\eta)$ и $\nu_a(\eta)$ — новые искомые функции.

Подставим (5.8) в функционал (5.5) и ограничения (3.5), (3.7) и (5.6) и оставим главные по $\overline{\Omega}_\alpha$ члены. В функционале Φ главные члены будут квадратичными по $\overline{\Omega}_\alpha$, так как линейные члены обратятся в нуль в силу уравнений Эйлера для $\rho_a{}^*$, $\alpha_{ab}{}^*$. В ограничениях достаточно оставить только линейные по $\overline{\Omega}_\alpha$ члены, поскольку ищутся линейные по $\overline{\Omega}_\alpha$ поправки к $\rho_a{}^*$, $\alpha_{ab}{}^*$. Тогда для определения u_a и ν_a получим вариационную задачу о нахождении минимума функционала

$$(5.9)\qquad \begin{aligned} 2\Phi_1 = \langle I^{ab}\,&[\Delta^{-1}\nu_{a\,|\,\eta} + (2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)\, e_{acd} m^c\nu^d + \overline{\Omega}^\beta\overset{*}{\alpha}_{a\beta}] \times \\ &\times [\Delta^{-1}\nu_{b\,|\,\eta} + (2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)\, e_{bcd} m^c\nu^d + \overline{\Omega}^\beta\overset{*}{\alpha}_{b\beta}] + \\ &+ \Delta^{-1}N^a e_{abc}\nu^b_{|\,\eta}\nu^c + H[(\nu_a m^a)^2 - \nu_a\nu^a] + 2N^a\overline{\Omega}^\beta e_a{}^{bc}\overset{*}{\alpha}_{b\beta}\nu_c\rangle \end{aligned}$$

$$N^a = I^{ab}\left[(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)\, m_b - \Delta^{-1}\theta_{(0)b}\right]$$

$$H = (2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)\, k^{-2} N^\alpha m_\alpha$$

на множестве всех периодических функций $\nu_a(\eta)$ и $u_a(\eta)$, удовлетворяющих ограничениям

$$(5.10)\qquad \overset{*}{\alpha}_{\beta a}\nu_\gamma e^{\gamma\beta} = \Delta^{-1}u_{a\,|\,\eta} + \overline{\Omega}_3 e_{a3\beta}u^\beta + e_{a\beta}{}^c\,\overline{\Omega}^\beta\rho_c{}^*$$

$$(5.11)\qquad \langle u_a\rangle = 0$$

$$(5.12)\qquad u_2\,|_{\eta=0} = 0$$

Заметим, что функционал Φ_1 инвариантен относительно преобразования

(5.13) $$\nu_a \to \nu_a + tm_a$$

где t — произвольная постоянная. По заданным ν_γ, удовлетворяющим ограничениям

(5.14) $$\langle \alpha^*_{\beta a} \nu_\gamma e^{\gamma\beta} \rangle = 0$$

всегда можно найти из (5.10) периодические функции $u_a(\eta)$, удовлетворяющие ограничениям (5.11). Затем, используя преобразование (5.13) (ограничение (5.14) также инвариантно относительно этого преобразования), можно, не изменяя значения функционала добиться выполнения равенства (5.12). Поэтому задачу для ν_a и u_a можно решать следующим образом: сначала ищется минимум Φ_1 по всем периодическим $\nu_a(\eta)$ (минимизирующий элемент при этом определяется с точностью до преобразования (5.13)), затем из (5.10) и (5.11) находятся $u_a(\eta)$, после чего постоянная t выбирается из условия (5.12).

Уравнения Эйлера для вариационной задачи (5.9), (5.14) будут неоднородными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, причем неоднородные члены представляют линейную комбинацию синусов, косинусов и постоянных. Поэтому ν_a имеют вид

(5.15) $$\nu_a = q_a + g_a e^{2\pi i\eta} + \bar{g}_a e^{-2\pi i\eta}$$

Здесь q_a — вещественные, а g_a — комплексные постоянные, i — мнимая единица, черта над комплексными величинами означает комплексное сопряжение. Возможные резонансные члены не вошли в формулу (5.15), так как они не удовлетворяют условию периодичности.

Функции α_{ab}^* также представим в аналогичном виде

(5.16) $$\alpha^*_{ab} = Q_{ab} + G_{ab} e^{2\pi i\eta} + \bar{G}_{ab} e^{-2\pi i\eta}$$
$$Q_{a3} = \psi_{a3}, \quad Q_{\alpha\alpha} = 0, \quad G_{a3} = 0, \quad G_{a\alpha} = {}^1/_2\psi_a{}^\beta B_{\alpha\beta}$$
$$\psi_{ab} = \alpha^*_{ab}|_{\eta=0}, \quad B_{ab} = \delta_{ab} + ie_{ab3}$$

Отметим, что имеет место соотношение $\psi_{a3} = m_a$.

Матрица второго порядка $B_{\alpha\beta}$ обладает следующими свойствами:

(5.17) $$\bar{B}_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}, \quad B^{\alpha\beta}B_{\gamma\beta} = 0, \quad B_{\alpha\beta}B^\beta{}_\gamma = 2B_{\alpha\gamma}$$
$$B_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta} = B_{\alpha\delta}B_{\gamma\beta}, \quad B_{\alpha\beta}e^\alpha{}_\gamma = iB_{\gamma\beta}$$

Ограничения (5.14) после подстановки в них (5.15), (5.16) приводят к соотношениям

$$e^{\alpha\beta}G_{\alpha\gamma}g_\beta + e^{\alpha\beta}\bar{G}_{\alpha\gamma}\bar{g}_\beta = 0, \quad e^{\alpha\beta}m_\alpha q_\beta = 0$$

Можно проверить, что общее решение этих уравнений дается формулами

(5.18) $$g^a = x\delta^{a3} + y\psi^{a\beta}B_{\beta\alpha}\psi^{3\alpha}, \quad q^a = tm^a + z\delta^{a3}$$

где x и y — комплексные, а z и t — вещественные произвольные постоянные.

Подставим (5.18) в (5.9). Получим функцию от x, y, z, t, которую надо минимизировать по этим переменным

(5.19) $$2\Phi_2 = S_0 + S_1 x\bar{x} + S_2 y\bar{y} + (Kx\bar{y} + \bar{K}\bar{x}y) + $$
$$+ (\bar{X}x + X\bar{x}) + (Yy + \bar{Y}\bar{y}) + S_3 z^2$$

Здесь

$$S_0 = S\overline{\Omega}_\alpha\overline{\Omega}^\alpha, \quad S_1 = (2\pi/\Delta)^2 J_{ab}\psi_{3c}\psi_{3d}b^{ac}b^{db} - Hk^2$$
$$S_2 = (2\pi k/\Delta)^2 J_{\alpha\beta}b^{\alpha\gamma}b^{\delta\beta}B_{\gamma\delta} - 4\pi\Delta^{-1}k^2N^\alpha m_\alpha - Hk^2$$
$$K = (2\pi/\Delta)^2 J_{a\alpha}\psi_{3c}b^{\gamma c}b^{\beta\alpha}B_{\gamma\beta}\psi^{3\nu} + 2\pi\Delta^{-1}N^\alpha\psi_{3\alpha} - Hk^2$$
$$S_3 = {}^1/_2(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3) J_{\alpha\beta}e^{\alpha\gamma}e^{\beta\delta}\psi_{3\gamma}\psi_{3\delta} - Hk^2$$
$$X = X_\alpha B^{\beta\alpha}\overline{\Omega}_\beta, \quad Y = Y_\alpha B^{\alpha\beta}\overline{\Omega}_\beta$$
$$S = {}^1/_4 J_\alpha{}^\alpha, \quad J_{ab} = I^{cd}\psi_{ca}\psi_{db}$$
$$b_{ab} = \delta_{ab} + i(1 + \overline{\Omega}_3\Delta(2\pi)^{-1})e_{ab3}$$
$$X_\alpha = -i\pi\Delta^{-1}J_{a\alpha}\psi_{3c}b^{ca} - i{}^1/_2k^{-1}N^\beta m_\beta\psi_{3\alpha}$$
$$Y_\alpha = i\pi\Delta^{-1}J_{\alpha\beta}b^{\beta\gamma}B_{\gamma\delta}\psi^{3\delta}$$

В выражение (5.19) не входит t, как и должно быть в силу инвариантности Φ_1 относительно преобразования (5.13). Постоянная t вычисляется после определения u_a, как было описано выше.

Найдем x, y, z из условия стационарности функции Φ_2

$$x = a^{-1}(\overline{Y}\overline{K} - S_2X), \quad y = a^{-1}(XK - S_1Y)$$
$$z = 0, \quad a = S_1S_2 - K\overline{K}$$

Стационарное значение функции Φ_2 имеет вид ${}^1/_2E\overline{\Omega}_\alpha\overline{\Omega}^\alpha$, причем

(5.20) $$E = S - a^{-1}[S_1Y_\alpha\overline{Y}^\alpha + S_2X_\alpha\overline{X}^\alpha - (KX_\alpha Y^\alpha + \overline{K}\overline{X}_\alpha\overline{Y}^\alpha)]$$

Коэффициент E зависит от $\overline{\Omega}_3$, $\varkappa$ и характеристик пружины. В общем случае эта зависимость сложная. Выражение для E существенно упрощается, если пренебречь перекрестными эффектами между изгибом и кручением — растяжением эквивалентного стержня, т. е. в выражении для E надо положить $\overline{\Omega}_3 = 0$, $\varkappa = \varkappa_0$. Упрощение связано с тем, что в этом случае H и N_a обращаются в нуль, а $b^{ab} = B^{ab}$ и, следовательно, можно применять формулы (5.17) к $b^{\alpha\beta}$. В результате для E получим ($I_{ab}{}^{-1}$ — матрица, обратная к I^{ab})

(5.21) $$E|_{\overline{\Omega}_3=0,\,\varkappa=\varkappa_0} = E_0 = 2(I_a^{-1a} - I_{ab}^{-1}m_{(0)}^a m_{(0)}^b)^{-1}$$

6. Уравнения эквивалентного стержня. Итак, для F получилось выражение

(6.1) $$2F = I^{ab}[(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)m_a - \Delta^{-1}\theta_{(0)a}] \times$$
$$\times [(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)m_b - \Delta^{-1}\theta_{(0)b}] + E\overline{\Omega}_\alpha\overline{\Omega}^\alpha$$
$$m_1 = -\sqrt{1-\varkappa^2}\sin\varphi, \quad m_2 = \sqrt{1-\varkappa^2}\cos\varphi, \quad m_3 = \varkappa$$

Здесь φ — функция от $\overline{\Omega}_3$ и $\varkappa$, неявно задаваемая уравнением (5.7), E задается формулой (5.20).

Отметим, что уравнение (5.7) можно получить, приравнивая нулю частную производную F по φ при $\overline{\Omega}_\alpha = 0$.

Уравнения Эйлера, следующие из задачи (3.2), (3.3), (3.8), имеют вид

(6.2) $$\overline{M}^a{}_{,\zeta} = -e^{abc}\overline{\omega}_b\overline{M}_c + e^{ab3}\overline{\tau}_{ib}F^i, \quad \overline{M}^a\overline{\tau}_a{}^i|_{\xi=l} = M^i$$
$$T = \overline{\tau}^{i3}F_i, \quad \overline{r}^i{}_{,\zeta} = \overline{r}^{i3}$$
$$\overline{\omega}_a = {}^1/_2e_{abc}\overline{\tau}^{ib}{}_{,\zeta}\overline{\tau}_i{}^c, \quad \overline{\tau}^i_a\overline{\tau}_{ib} = \delta_{ab}$$

Момент $\overline{M}_a$ и растягивающее усилие T определяются уравнениями состояния

(6.3) $$\overline{M}_a = \partial F/\partial\overline{\Omega}^a, \quad T = \partial F/\partial\varkappa$$

Если $E = E_0$, то уравнения состояния принимают вид

$$(6.4)\qquad \overline{M}^\alpha = E_0\overline{\Omega}^\alpha, \quad \overline{M}^3 = I^{ab}m_a[(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)m_b - \Delta^{-1}\theta_{(0)b}]$$

$$T = (2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)[I^{\alpha\beta}m_\beta\varkappa(1-\varkappa^2)^{-1} + I^{\alpha 3}] \times$$
$$\times [(2\pi\Delta^{-1} + \overline{\Omega}_3)m_a - \Delta^{-1}\theta_{(0)a}]$$

7. Примеры. 1°. Рассмотрим задачу о растяжении — кручении пружины ($F^i = M^i = 0$ при $i = 1,2$). Представим искомые функции $\bar\tau^{ia}$ и $\bar r^i$ в виде

$$\bar\tau^{i1} = (\cos\theta(\xi),\ -\sin\theta(\xi),\ 0)$$
$$\bar\tau^{i2} = (\sin\theta(\xi),\ \cos\theta(\xi),\ 0)$$
$$\bar\tau^{i3} = \delta^{i3},\ \bar r^i = \zeta(\xi)\,\delta^{i3}$$

В недеформированном состоянии считаем $\theta(\xi) = 0$, а $\zeta(\xi) = \zeta_0(\xi)$.

Тогда уравнения эквивалентного стержня переходят в следующие два соотношения для функций $\theta(\xi)$ и $\zeta(\xi)$:

$$(7.1)\qquad \overline{M}^3 = M^3,\quad T = F^3$$

где $\overline{M}^3$ и T определены формулами (6.4), причем $\overline{\Omega}_3 = -\theta_{,\xi}$, $\varkappa = \zeta_{,\xi}$.

Уравнения (7.1) определяют функции $\theta(\xi)$ и $\zeta(\xi)$ с точностью до твердого движения эквивалентного стержня, которое фиксируется, например, заданием положения одного из концов пружины. Форму пружины, зная ρ_a и α_{ab}, можно определить по формулам (3.1).

Решение уравнений (7.1) сводится к решению системы трех конечных уравнений относительно $\theta_{,\xi}$, $\zeta_{,\xi}$, φ и простой квадратуре.

Если пружина правильная цилиндрическая, т. е. величины $\theta_{(0)a}$, I^{ab} и Δ постоянны, то можно проверить, что уравнения (7.1) эквивалентны точным уравнениям исходной задачи (1.1) — (1.5). Это естественно, поскольку в данном случае величина Δ/L, используемая как малый параметр в вариационно-асимптотическом методе, равна нулю.

2°. Рассмотрим задачу о чистом изгибе пружины приложенными на ее концах силами, которые создают моменты, равные по абсолютной величине M. В этом случае можно считать, что $F^i = 0$, $M^2 = M$, $M^1 = M^3 = 0$. Представим искомые функции $\bar\tau^{ia}(\xi)$ и $\bar r^i(\xi)$ в виде

$$(7.2)\qquad \bar\tau^{i1} = (\sin\theta(\xi),\quad 0, -\cos\theta(\xi)),\quad \bar r^1 = \int_0^\xi \varkappa_0(s)\cos\theta(s)\,ds$$

$$\bar\tau^{i2} = (0,1,0),\quad \bar r^2 = 0$$

$$\bar\tau^{i3} = (\cos\theta(\xi), 0, \sin\theta(\xi)),\quad \bar r^3 = \int_0^\xi \varkappa_0(s)\sin\theta(s)\,ds$$

где $\theta(\xi)$ — новая искомая функция, равная нулю в недеформированном состоянии.

Тогда уравнения (6.2), (6.4) сводятся к соотношению $\theta_{,\xi} = M/E_0$, откуда

$$(7.3)\qquad \theta(\xi) = M\int_0^\xi \frac{ds}{E_0(s)} + \theta(0)$$

Если $E_0 = \mathrm{const}$ (например, для правильной цилиндрической пружины), то деформированное состояние эквивалентного стержня изображается дугой окружности радиуса

$$(7.4)\qquad \overline{R} = \varkappa_0 E_0/M$$

В случае, когда тензор I^{ab} имеет диагональный вид, причем $I^{\alpha\beta} = I\delta^{\alpha\beta}$, $I^{33} = J$, (7.4) переходит в следующее выражение:

$$\overline{R} = \sin\alpha_0\,\{[1/I - {}^1/_2\,(1/J - 1/I)\cos\alpha_0]\,M\}^{-1}$$

где α_0 — угол подъема витка пружины в недеформированном состоянии. Эта формула совпадает с выражением, полученным С. П. Тимошенко [2].

Если $I^{ab} = I\delta^a$, то формулы (7.2)—(7.4), (3.1) дают точное решение исходной задачи (1.1)—(1.5), полученное в работе [10]. Этот факт имеет то же объяснение, что и аналогичный результат в предыдущем примере.

8. Физически линейная теория эквивалентного стержня. Разложим энергию эквивалентного стержня (6.1) в ряд по мерам деформации $\overline{\Omega}_a$ и $\gamma = {}^1/_2\,((\varkappa/\varkappa_0)^2 - 1)$ и отбросим все члены порядка выше второго. Получим

$$2F = A\gamma^2 + B\,(\overline{\Omega}_3)^2 + 2C\overline{\Omega}_3\gamma + E_0\overline{\Omega}_\alpha\overline{\Omega}^\alpha \tag{8.1}$$

$$A = (2\pi\Delta^{-1})^2[-(G\varkappa_0 - G_3)\,D^{-1} + I_{33} + \varkappa_0^2 I - 2\varkappa_0 I_3]\,\varkappa_0^2\,(1 - \varkappa_0^2)^{-2}$$

$$B = I - G^2D^{-1},\quad C = (2\pi\Delta^{-1})[(G\varkappa_0 - G_3)\,GD^{-1} + I_3 - \varkappa_0 I]\,\varkappa_0\,(1 - \varkappa_0^2)^{-1}$$

$$G = I_{a\alpha}m_{(0)}{}^a e_\beta{}^\alpha m_{(0)}{}^\beta,\quad G_3 = I_{3\alpha}e_\beta{}^\alpha m_{(0)}{}^\beta$$

$$D = I_{\alpha\beta}e_\gamma{}^\alpha e^\beta m_{(0)}{}^\gamma m_{(0)}{}^\delta,\quad I = I_{ab}m_{(0)}{}^a m_{(0)}{}^b,\quad I_3 = I_{3a}m_{(0)}{}^a$$

Выражение (8.1) — энергия физически линейной теории эквивалентного стержня.

Если тензор I_{ab} диагонален и диагональные элементы равны величинам I_1, I_2 и J, то коэффициенты A, B, C и E_0 в энергии (8.1) имеют вид

$$A = (2\pi\Delta^{-1})^2\,\varkappa_0^2\,[J - \bar{I}\varkappa_0^2\,(1 - \varkappa_0^2)^{-1}]$$

$$B = J\varkappa_0^2 + \bar{I}\,(1 - \varkappa_0^2),\quad C = 2\pi\Delta^{-1}\varkappa^2\,(J - \bar{I})$$

$$E_0 = 2\,[(1/I_1 + 1/I_2) + (1/J - 1/\bar{I})(1 - \varkappa_0^2)]^{-1}$$

$$\bar{I} = I_1I_2/(I_1\cos^2\varphi_0 + I_2\sin^2\varphi_0)$$

В геометрически линейной теории для $\overline{\Omega}_a$ и γ надо принять

$$\overline{\Omega}_\alpha = -e_{\alpha\beta}\frac{d^2v^\beta}{d\zeta^2},\quad \overline{\Omega}_3 = \frac{d\Theta}{d\zeta},\quad \gamma = \frac{dv^3}{d\zeta}$$

где v^i — перемещения эквивалентного стержня, Θ — его кручение. При этом приходим к линейной теории пружин, построенной в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Лессельс Д. С.* Прикладная теория упругости. Л.: Гостехиздат, 1931. 392 с.
2. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов. Т. 2. М.: Наука, 1965. 480 с.
3. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И.* Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
4. *Хвингия М. В.* Вибрация пружин. М.: Машиностроение, 1969. 287 с.
5. *Андреева Л. Е.* Упругие элементы приборов. М.: Машгиз, 1962. 456 с.
6. *Сутырин В. Г.* Об уравнениях теории пружин.— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 1, с. 60—64.
7. *Кирхгоф Г. Р.* Механика. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 409 с.
8. *Tomson W., Tait P.* Treatis on natural philosophy. V. 1. Cambridge: Univ. press, 1890. 508 p.
9. *Чернышев Н. А.* Нелинейная теория упругих деформаций цилиндрических витых пружин.— В кн.: Расчеты на прочность. Т. 3. М.: Машгиз, 1958, с. 19—39.
10. *Costello G. A.* Large deflection of helical spring due to bending.— J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Sol. Civ. Eng., 1977, v. 103, No. 3, p. 481—487.
11. *Бердичевский В. Л.* Пространственное осреднение периодических структур.— Докл. АН СССР, 1975, т. 222, № 3, с. 565—567.
12. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 664—687.
13. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях теории анизотропных неоднородных стержней.—Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 3, с. 558—561.
14. *Бердичевский В. Л.* Об энергии упругого стержня.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 704—718.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1982