Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 539.3

СТАТИЧЕСКИ ДОПУСТИМЫЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ

Каменярж Я. А.

В задачах механики сплошной среды часто приходится рассматривать совокупность статически допустимых полей напряжений. В частности, на этом множестве следует искать экстремумы в соответствии с принципом Кастильяно теории упругости и с экстремальным принципом для статического предельного коэффициента теории идеальной пластичности. Для несжимаемых сред используются два различных множества статически допустимых напряжений. Связь между ними известна лишь при кинематических условиях на всей границе тела. В работе аналогичная связь устанавливается в случае смешанных краевых условий, обсуждается возможность ее использования.

Пусть сплошная среда заполняет в R^n $(n = 2,3)$ область Ω и находится под действием массовых сил с плотностью $\mathbf{f}$, заданной в Ω, и поверхностной нагрузки с плотностью $\mathbf{q}$, заданной на части S_q границы области Ω. Пусть далее

$$S_v = \partial\Omega \setminus \bar{S}_q, \quad S_q = \partial\Omega \setminus \bar{S}_v \tag{0.1}$$

где черта означает замыкание в R^n, и на S_v задана скорость (например, S_v закреплена).

Статически допустимым для нагрузки $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ называется поле напряжений, уравновешивающее ее; условия равновесия в области Ω и на ее границе могут быть записаны в виде уравнения принципа виртуальных скоростей [1]

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}\,dx - \int\limits_{\Omega} \mathbf{f}\mathbf{v}\,dx - \int\limits_{S_q} \mathbf{q}\mathbf{v}\,ds = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{0.2}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

где $\mathbf{V}$ — множество виртуальных (пробных) полей скорости, x^i — декартовы координаты в R^n.

Для несжимаемых сред имеются две естественные возможности выбора $\mathbf{V}$: $\mathbf{V}^1 = \mathbf{V}^1(\Omega, S_v)$ — множество гладких, т. е. принадлежащих $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$, соленоидальных полей скорости, обращающихся в нуль вблизи (или на) $\bar{S}_v$ и $\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}^2(\Omega, S_v)$ — множество, которое определяется аналогично, но без требования соленоидальности. В связи с этим возникает следующий вопрос. Пусть поле напряжений $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяет условиям равновесия (0.2) с $\mathbf{V} = \mathbf{V}^1$ (тогда им удовлетворяет и любое поле напряжений $\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{g}$, где p — произвольное поле давления и $\mathbf{g}$ — метрический тензор); можно ли найти такое поле давления p, чтобы $\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{g}$ удовлетворяло полным условиям равновесия, т. е. (0.2) с $\mathbf{V} = \mathbf{V}^2$?

По-видимому, впервые этот вопрос изучался в [2] применительно к задачам гидромеханики, в которых на всей границе $\partial\Omega$ задаются кинематические краевые условия $(\partial\Omega = S_v)$. Оказалось, что такое поле давления может быть найдено. Представляет интерес и другой случай — смешанных краевых условий. Ниже показано, что и в этом случае подходящее поле давления может быть найдено. Роль этого утверждения обсуждается в п. 5.

1. Формулировка задачи. План решения. Пусть $\mathbf{s}$ $(s_{ij} = s_{ji};\ s_{ij} \in L_2(\Omega);\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — какое-нибудь поле напряжений, удовлетворяющее (0.2) с $\mathbf{V} = \mathbf{V}^2$, а $\boldsymbol{\Sigma}$ — множество полей напряжений, уравновешивающих нагрузку $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{q} = 0$ (такие поля напряжений называются самоуравновешенными). Тогда множество полей напряжений, статически допустимых для нагрузки $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ можно представить в виде $\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{s}$. Если

s_1 и s_2 — два поля напряжений, уравновешивающих нагрузку $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$, то их разность, очевидно, самоуравновешена и, следовательно, $\Sigma + s_1 = \Sigma + s_2$. Таким образом, изучение множества статически допустимых полей напряжений сводится фактически к изучению Σ.

В соответствии с двумя возможностями выбора $\mathbf{V} - \mathbf{V}^1(\Omega, S_v)$ и $\mathbf{V}^2(\Omega, S_v)$ имеются и два множества самоуравновешенных полей напряжений

$$\Sigma^\varkappa = \Sigma^\varkappa(\Omega, S_v) = (\mathbf{E}(\mathbf{V}^\varkappa))^\circ =$$
$$= \Big\{\sigma : \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ \sigma_{ij} \in L_2(\Omega)\ \ (i, j = 1, 2, \ldots, n);\ \int_\Omega \sigma \cdot \mathbf{e}\, dx = 0,$$
$$\forall \mathbf{e} \in \mathbf{E}(\mathbf{V}^\varkappa)\Big\} \quad (\varkappa = 1, 2)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{V}^\varkappa)$ — множество скоростей деформаций, соответствующих полям скорости из $\mathbf{V}^\varkappa = \mathbf{V}^\varkappa(\Omega, S_v)$.

Требуется установить, что для всякого τ из Σ^1 найдется в $L_2(\Omega)$ такое поле давления p, что $\tau + pg$ лежит в Σ^2.

Рассмотрим план решения этой задачи, предполагая сначала, что граница области и исходное поле напряжений τ гладкие.

Первый шаг. Поскольку τ принадлежит Σ^1, то, в частности, для всех гладких соленоидальных полей $\mathbf{v}$ с компактными носителями в Ω ($\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega)$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), выполнено равенство

$$\int_\Omega \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\, dx = 0$$

В силу результатов [3] из этого следует, что

$$(1.1) \qquad \partial\tau_{ij}/\partial x^j = \partial t/dx^i$$

где t — вследствие гладкости τ гладкая функция. Если $\partial\Omega = S_v$, то построение на этом заканчивается; искомое поле давления $p = -t$.

Второй шаг. Поскольку $\tau^\circ = \tau - tg$ вместе с τ лежит в Σ^1, то для любого $\mathbf{v}$ из $\mathbf{V}^1$ ($\mathbf{v} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $\mathbf{v}|_{S_v} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$)

$$(1.2) \qquad \int_\Omega \tau_{ij}^\circ \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\, dx = 0$$

В силу (1.1) $\partial\tau_{ij}^\circ/\partial x^j = 0$, тогда по формуле Стокса находим из (1.2), что

$$(1.3) \qquad \int_{\partial\Omega} \gamma \mathbf{v}\, ds = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^1;\ \gamma_i = \tau_{ij}^\circ \nu_j$$

(ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$).

Третий шаг. Пусть теперь $\mathbf{u}$ — любое поле из $\mathbf{V}^2$ ($\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $\mathbf{u}|_{S_v} = 0$), а $\mathbf{u}_0$ — какое-нибудь гладкое поле, для которого

$$\mathbf{u}_0|_{S_v} = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \nu\, ds = 1$$

(такое $\mathbf{u}$ найдется, если $S_q \neq \varnothing$).

Тогда для

$$(1.4) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\nu\, ds$$

выполнены соотношения

$$(1.5) \qquad \mathbf{v}|_{S_v} = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}\nu\, ds = 0$$

Рассмотрим теперь след $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}$. В силу второго из условий (1.5) он имеет гладкое соленоидальное продолжение на Ω — $\mathbf{v}_s$ из $\mathbf{V}^1$. Тогда из равенства (1.3) следует

$$\int_{\partial\Omega} \gamma \mathbf{v}_s ds = 0$$

что с использованием (1.4) приводит к соотношению

$$\int_{\partial\Omega} \gamma \mathbf{u} ds = c_0 \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \mathbf{u} ds \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}^2; \quad c_0 = \int_{\partial\Omega} \gamma \mathbf{u}_0 ds \tag{1.6}$$

Остается положить $\sigma = \tau - (t + c_0)\, \mathbf{g}$ и, используя (1.6) и формулу Стокса, убедиться, что для любого $\mathbf{u}$ из $\mathbf{V}^2$

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx = 0$$

Таким образом, σ лежит в Σ^2 и искомое давление $p = -(t + c_0)$.

Этот план будет реализован в дальнейшем при ослабленных предположениях о гладкости $\partial\Omega$ и τ. Для этого необходима некоторая подготовительная работа, поскольку в негладком случае проведенное построение наталкивается на ряд трудностей.

Именно, если поле τ не гладкое, то и t, возникающее на первом шаге, можно рассматривать лишь как обобщенную функцию. Это затруднение было преодолено в [2]. Полученные в [2] для задач гидромеханики (в которых $\partial\Omega = S_v$) результаты автоматически переносятся на общий случай при $\Omega = S_v$ (теорема 5.1).

Далее, для негладких τ нуждается в обосновании использование формулы Стокса. Обоснование дано в п. 4.

Наконец, если граница $\partial\Omega$ не предполагается гладкой, то рассматриваемое на третьем шаге продолжение $\mathbf{v}_s$, вообще говоря, не является гладким. В этом случае оно может не принадлежать $\mathbf{V}^1$, что в свою очередь не позволяет непосредственно использовать для него соотношение (1.3), чтобы получить (1.6). Таким образом, придется расширить $\mathbf{V}^1$ до некоторого множества $\overline{\mathbf{V}}^1$ так, чтобы, во-первых, множество самоуравновешенных полей напряжений осталось бы прежним $\Sigma^1 = (\mathbf{E}(\mathbf{V}^1))^\circ = (\mathbf{E}(\overline{\mathbf{V}}^1))^\circ$, во-вторых, можно было применить в (1.2) при любом $\mathbf{v}$ из $\overline{\mathbf{V}}^1$ формулу Стокса для вывода (1.3) и, в-третьих, чтобы соленоидальное продолжение $\mathbf{v}_s$ на третьем шаге принадлежало бы $\overline{\mathbf{V}}^1$. Такое расширение рассмотрено в п. 3. Предварительно в п. 2 рассматривается расширение множества $\mathbf{V}^2$.

2. Пробные поля скорости. Поскольку для рассматриваемых полей напряжений $\sigma_{ij} \in L_2(\Omega)$, то выполнение условий равновесия

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j} dx = 0$$

для всех $\mathbf{v}$ из $\mathbf{V}^1$ (из $\mathbf{V}^2$) эквивалентно их выполнению для всех $\mathbf{v}$ из $\overline{\mathbf{V}}^1$ (из $\overline{\mathbf{V}}^2$), где $\overline{\mathbf{V}}^1$ ($\overline{\mathbf{V}}^2$) — замыкание $\mathbf{V}^1$ ($\mathbf{V}^2$) в $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Здесь $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и используемое в дальнейшем $H^{1/2}(\partial\Omega)$ — соболевские пространства, свойства которых хорошо изучены [4—7]. Замыкания $\overline{\mathbf{V}}^1$, $\overline{\mathbf{V}}^2$ оказываются подходящими расширениями $\mathbf{V}^1$, $\mathbf{V}^2$.

Отметим еще, что само множество $\mathbf{V}^2$ пробных полей скорости можно определить двумя способами — как всевозможные гладкие поля скорости $\mathbf{v}$ на $\overline{\Omega}$, обращающиеся в нуль на $\overline{S}_v$ или вблизи $\overline{S}_v$ (последнее означает, что расстояние от носителя supp $\mathbf{v}$ до $\overline{S}_v$ положительно). В дальнейшем, чтобы не различать эти случаи, будем считать, что соответствующие им множества самоуравновешенных полей напряжений совпадают. Совпадение гарантировано, если $\mathbf{U}^2 = \mathbf{W}^2$, где

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}^2(\Omega, S_v) = [\{\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \rho(\operatorname{supp} \mathbf{u}, \bar{S}_v) > 0\}]_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \tag{2.1}$$
$$\mathbf{W}^2 = \mathbf{W}^2(\Omega, S_v) = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{w}|_{S_v} = 0\}$$

($\rho(A, B)$ — расстояние между множествами A и B в R^n). Достаточные условия равенства $\mathbf{U}^2 = \mathbf{W}^2$, которое будет использоваться и в дальнейшем, дает лемма 2.1.

Для доказательства леммы 2.1 требуется некоторая регулярность $\partial\Omega$ и S_v. Будем считать, что Ω — ограниченная область класса C^1. Это означает, что $\overline{\Omega}$ можно покрыть конечным числом областей U_i, на которых определены отображения φ_i, непрерывно дифференцируемые и имеющие непрерывно дифференцируемые обратные. Образом области U_i при отображении φ_i является стандартный цилиндр в R^n, образом $U_i \cap \partial\Omega$ (если пересечение непусто) — шар в R^{n-1}. Отметим, что существуют непрерывно дифференцируемые функции α_i на R^n с носителями в U_i, осуществляющие разбиение единицы на $\overline{\Omega}$: $\sum_i \alpha_i|_{\overline{\Omega}} = 1$.

Часть S_v границы $\partial\Omega$ будем называть регулярной, если карты (U_i, φ_i) можно выбрать так, что множество G_i — дополнение в R^{n-1} к замыканию множества $\varphi_i(U_i \cap S_v)$ — область, у каждой точки границы ∂G_i которой существует окрестность U в R^{n-1} и направление ξ, такие, что при любом достаточно малом сдвиге в направлении ξ множество $\overline{G}_i \cap U$ не выходит за пределы области G_i. Последнее свойство выполнено, например, для строго липшицевой области G_i.

Лемма 2.1. Пусть Ω — ограниченная область класса C^1, S_v — регулярная часть ее границы. Тогда $\mathbf{U}^2(\Omega, S_v) = \mathbf{W}^2(\Omega, S_v)$.

Вложение $\mathbf{U}^2$ в $\mathbf{W}^2$ очевидно. Кроме того, всякое $\mathbf{w}$ из $\mathbf{W}^2$ принадлежит $\mathbf{U}^2$. Для доказательства можно приблизить след $\mathbf{w}|_{\partial\Omega}$ в $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ функцией $\mathbf{v}_\varepsilon$, обращающейся в нуль на окрестности в $\partial\Omega$ множества $\bar{S}_v$. В силу регулярности S_v можно при любом $\varepsilon > 0$ обеспечить для функции $\mathbf{f}_\varepsilon = \mathbf{w}|_{\partial\Omega} - \mathbf{v}_\varepsilon$ в $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ оценку $\|\mathbf{f}_\varepsilon\| < \varepsilon$. В области Ω класса C^1 любая функция $\mathbf{g}$ из $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ имеет продолжение $\mathbf{g}^c$

$$\mathbf{g}^c \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \mathbf{g}^c|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \tag{2.2}$$
$$\|\mathbf{g}^c\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leqslant c\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Функция $\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{w} + (\mathbf{f}_\varepsilon)^c$ приближает $\mathbf{w}$

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leqslant c\varepsilon$$

c не зависит от $\mathbf{w}$) и обращается в нуль на некоторой окрестности (в $\partial\Omega$) множества $\bar{S}_v$. Остается применить к $\mathbf{w}_\varepsilon$ следующее утверждение.

Лемма 2.2 Пусть Ω — ограниченная строго липшицева область, S — замкнутое подмножество в $\partial\Omega$, $\mathbf{u}$ — функция из $\mathbf{H}^1(\Omega)$, след которой обращается в нуль на окрестности S' в $\partial\Omega$ множества S. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует гладкая функция $\mathbf{u}_\varepsilon$ из $\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$, обращающаяся в нуль на некоторой окрестности множества S в $\overline{\Omega}$ и приближающая функцию $\mathbf{u}$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} < \varepsilon$$

С помощью разбиения единицы доказательство леммы 2.2 сводится к ее проверке для области, звездной относительно шара с центром в нуле. Далее достаточно рассмотреть подходящее продолжение u^c функции u и последовательность усреднений функций u_λ ($u_\lambda(x) = u^c(\lambda x)$, $\lambda > 1$) при $\lambda \to 1$.

Отметим, наконец, что если $\mathbf{U}^2 = \mathbf{W}^2$, то, очевидно, $\mathbf{U}^2 = \overline{\mathbf{V}}^2 = \mathbf{W}^2$ независимо от того, требовалось ли в определении $\mathbf{V}^2$ обращение пробных полей скорости в нуль вблизи или на $\overline{S}_v$.

3. Соленоидальные поля скорости. Установим для соленоидальных полей на Ω аналог леммы 2.1, т. е. совпадение множеств $\mathbf{U}^1$ и $\mathbf{W}^1$, где

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & \mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^1(\Omega, S_v) = [\{\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \rho(\operatorname{supp} \mathbf{u}, \overline{S}_v) > 0\}]_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
& \mathbf{W}^1 = \mathbf{W}^1(\Omega, S_v) = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \mathbf{w}|_{S_v} = 0\}
\end{aligned}
$$

В случае $\partial\Omega = S_v$ совпадение $\mathbf{U}^1$ и $\mathbf{W}^1$ доказано в [2] (теорема 2.2). Пользуясь этим, получим два утверждения о совпадении $\mathbf{U}^1$ и $\mathbf{W}^1$, покрывающих достаточно широкий класс (Ω, S_v).

В доказательстве первого из них используется следующее вспомогательное предложение.

Лемма 3.1. Пусть Ω — ограниченная строго липшицева область; $\Gamma \subset \partial\Omega$; $\partial\Omega \setminus \Gamma$ содержит некоторое непустое открытое в $\partial\Omega$ множество. Тогда для любой функции $\mathbf{u}$ из $\mathbf{H}^1(\Omega)$ с $\mathbf{u}|_\Gamma = 0$ найдется функция $\mathbf{v}$ из $\mathbf{H}^1(\Omega)$, такая, что

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_\Gamma = 0 \\
& \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leqslant c \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Справедливость леммы 3.1 непосредственно следует из результатов [2].

Теорема 3.1. Пусть 1) Ω — ограниченная строго липшицева область; 2) $\overline{S}_q = \partial\Omega \cap \partial\Omega'$, где Ω' — строго липшицева область, непересекающаяся с Ω (фиг. 1); 3) область G, содержащая Ω и Ω', и такая, что $\overline{G} = \overline{\Omega} \cup \overline{\Omega}'$ — строго липшицева; 4) для всякой функции $\mathbf{w}$ из $\mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\mathbf{w}_\varepsilon$ из $\mathbf{H}^1(\Omega)$, такое, что

$$
\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} < \varepsilon, \quad \mathbf{w}_\varepsilon|_\Gamma = 0
$$

где Γ — некоторая окрестность $\overline{S}_v$ в $\partial\Omega$.

Тогда $\mathbf{U}^1(\Omega, S_v) = \mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$

Замечания. 1°. Последнее предположение необходимо; достаточные условия его выполнения даны леммой 2.1.

2°. При $S_q = \varnothing$ теорема доказана в [2], в дальнейшем можно считать, что $S_q \neq \varnothing$. Напомним еще, что все время предполагаются выполненными условия (0.1).

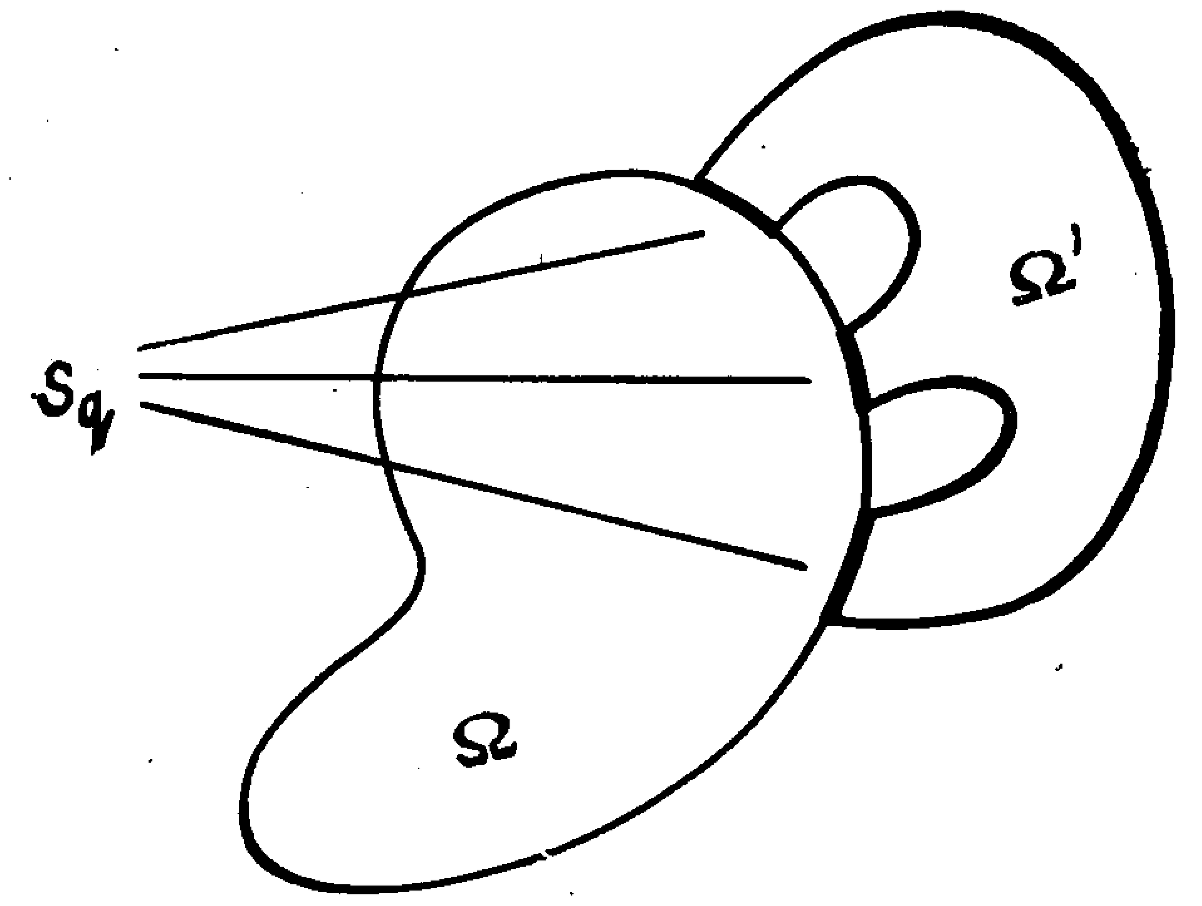
Доказательство. Вложение $\mathbf{U}^1(\Omega, S_v)$ в $\mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$ очевидно. Пусть теперь $\mathbf{w}$ — функция из $\mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$; покажем, что $\mathbf{w}$ принадлежит $\mathbf{U}^1(\Omega, S_v)$.

Рассмотрим прежде всего функцию $\mathbf{w}_\varepsilon$, существование которой обеспечено предположением 4. По лемме 3.1 найдется такая функция $\mathbf{v}_\varepsilon$ из $\mathbf{H}^1(\Omega)$, что

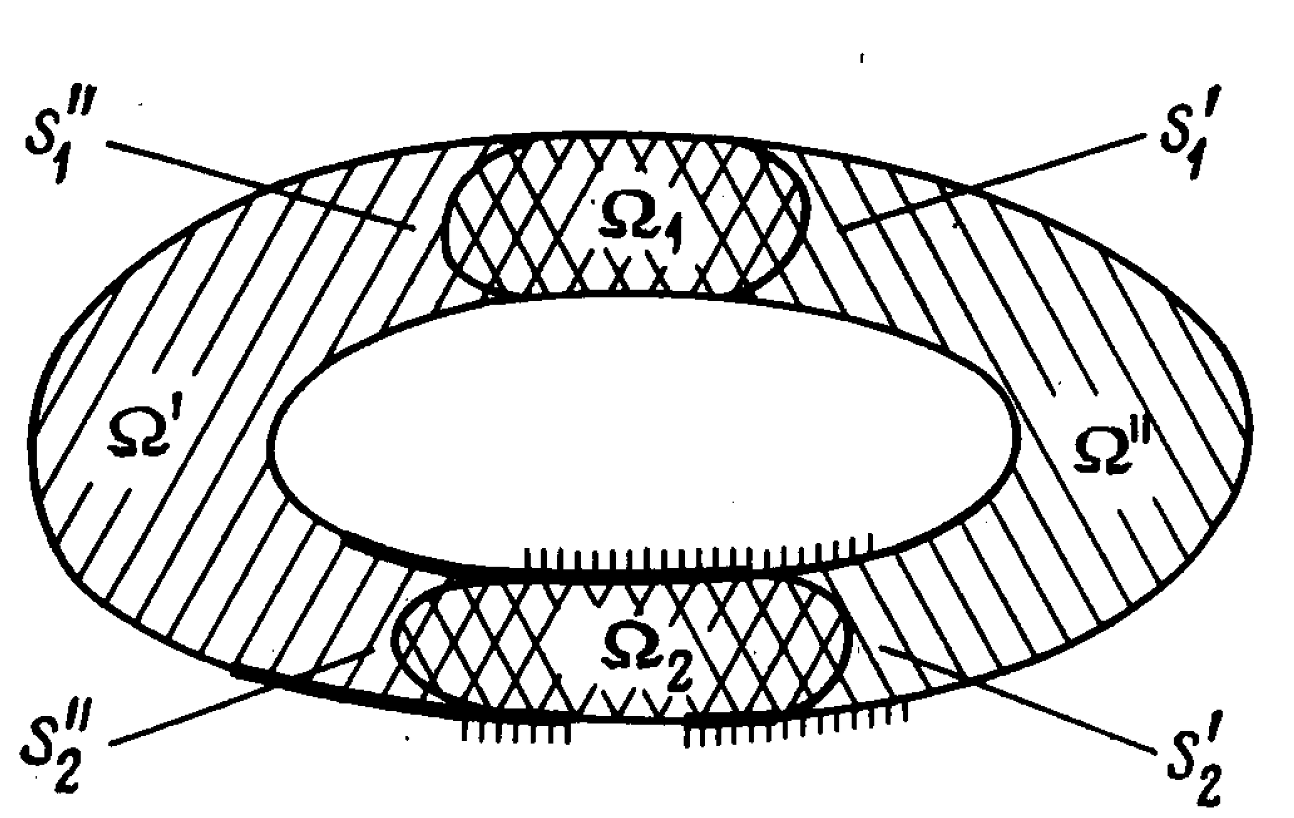
$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad & \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon = 0, \quad \mathbf{v}_\varepsilon|_\Gamma = 0 \\
& \|\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} < c\varepsilon
\end{aligned}
$$

(c не зависит от $\mathbf{w}_\varepsilon$). Далее достаточно проверить, что $\mathbf{v}_\varepsilon$ может быть приближено в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ функцией из $\mathbf{U}^1(\Omega, S_v)$.

Построим соленоидальное продолжение функции $\mathbf{v}_\varepsilon$ на G, принимающее нулевое значение на ∂G. Для этого рассмотрим сначала любое продолжение $\mathbf{V}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(R^n)$ функции $\mathbf{v}_\varepsilon$ (для строго липшицевой области Ω оно всегда существует). Заметим теперь, что поскольку компакты $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и $\partial\Omega' \setminus S_q$ не пересекаются, то найдутся их непересекающиеся окрестности $U(\partial\Omega \setminus \Gamma)$, $U(\partial\Omega' \setminus S_q)$ в R^n и гладкая финитная в R^n функция α, прини-



Фиг. 1



Фиг. 2

мающая на $U(\partial\Omega \setminus \Gamma)$ значение 1 и на $U(\partial\Omega' \setminus S_q)$ — значение 0. Тогда для функции $\alpha\mathbf{V}_\varepsilon$ из $\mathbf{H}^1(R^n)$ имеем

(3.3) $$\alpha\mathbf{V}_\varepsilon|_{U(\partial\Omega'-S_q)} = 0, \quad \alpha\mathbf{V}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_\varepsilon|_{\partial\Omega}$$

Функция $\mathbf{u}_\varepsilon$, совпадающая с $\mathbf{v}_\varepsilon$ на Ω и с $\alpha\mathbf{V}_\varepsilon$ на $C\Omega$, принадлежит $\mathbf{H}^1(R^n)$ и является продолжением $\mathbf{v}_\varepsilon$.

Рассмотрим теперь функцию $\mathbf{u}_\varepsilon' = \mathbf{u}_\varepsilon|_{\Omega'}$ из $\mathbf{H}^1(\Omega')$. В силу соотношений (3.3), (3.2)

$$\int_{\partial\Omega'} \mathbf{u}_\varepsilon'\mathbf{v}'ds = \int_{S_q} \mathbf{u}_\varepsilon'\mathbf{v}'ds = -\int_{S_q} \mathbf{v}_\varepsilon\mathbf{v}ds = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_\varepsilon\mathbf{v}ds = 0$$

($\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ — единичные внешние нормали к $\partial\Omega$, $\partial\Omega'$). Тогда найдется [2] функция $\mathbf{v}_\varepsilon'$ из $\mathbf{H}^1(\Omega')$, такая, что $\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon' = 0$, $\mathbf{v}_\varepsilon'|_{\partial\Omega'} = \mathbf{u}_\varepsilon'|_{\partial\Omega'}$.

Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon^c$ — функция на G, совпадающая с $\mathbf{v}_\varepsilon$ на Ω и с $\mathbf{v}_\varepsilon'$ на Ω'. Несложно убедиться, что $\mathbf{v}_\varepsilon^c \in \mathbf{H}^1(G)$ — соленоидальное продолжение $\mathbf{v}_\varepsilon$ на G, имеющее нулевой след на ∂G. По теореме 2.2 из [2] для $\mathbf{v}_\varepsilon^c$ найдется тогда приближающее его соленоидальное поле из $\mathbf{C}_0^\infty(G)$. Ограничение этого поля на Ω, очевидно, принадлежит $\mathbf{U}^1(\Omega, \bar{S}_v)$ и аппроксимирует $\mathbf{v}_\varepsilon$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$, что и доказывает теорему.

Даже в гладком случае теорема 3.1 применима не для всяких Ω, S_q. Если, например, область Ω на плоскости имеет форму кольца, часть множества S_q расположена на его внутренней окружности, а другая его часть — на внешней, то невозможно построить область Ω', удовлетворяющую условиям теоремы 3.1.

В этом и аналогичном случаях совпадение $\mathbf{U}^1$ и $\mathbf{W}^1$ можно установить рассматривая Ω и S_v как составленные из некоторых областей Ω', Ω'' и частей их границ S_v', S_v''. Прежде чем доказывать соответствующее утверждение, перечислим требования к строению составной области.

Пусть Ω, Ω', Ω'' — ограниченные области в R^n, $\Omega = \Omega' \bigcup \Omega''$; Ω' не вложена в Ω'', Ω'' не вложена в Ω'; пересечение $\Omega' \bigcap \Omega''$ состоит из конечного числа областей $\Omega_i (i = 1, 2, \ldots, N)$, удаленных одна от другой на положительные расстояния; каждая из областей Ω, Ω', Ω'', Ω_i расположена локально по одну сторону своей границы; на $\bar{\Omega}$ существует функция α из $C^1(\bar{\Omega})$, принимающая значение 0 на $\Omega \setminus \Omega'$ и значение 1 на $\Omega \setminus \Omega''$. Пусть далее S_v, S_v', S_v'' — открытые подмножества в $\partial\Omega$, $\partial\Omega'$, $\partial\Omega''$ соответственно; $S_v' \subset S_v$, $S_v'' \subset S_v$, $\bar{S}_v = \bar{S}_v' \bigcup \bar{S}_v''$; кроме того, пусть $\bar{S}_v$ содержится в объединении $\bar{S}_v'$ с границей множества $\Omega'' \setminus \Omega'$ и в объединении $\bar{S}_v''$ с границей множества $\Omega' \setminus \Omega''$.

При выполнении этих условий будем называть Ω и S_v регулярно составленными из Ω', Ω'' и S_v', S_v'' соответственно. Перечисленные требования, хотя и выглядят громоздко, описывают простую ситуацию. Пример приведен на фиг. 2, где области Ω', Ω'' заштрихованы с разным наклоном,

S_v' показана жирной линией, S_v'' — штриховкой границы. Кроме того, указаны части границ $S_i' = \partial\Omega_i \cap \Omega''$, $S_i'' = \partial\Omega_i \cap \Omega'$.

Обозначим еще S' и S'' объединения $\bigcup_i S_i'$ и $\bigcup_i S_i''$ соответственно. Несложно проверить, что $\bar{S}'$ ($\bar{S}''$) — пересечение $\partial\Omega'$ ($\partial\Omega''$) с границей множества $\Omega'' \setminus \Omega'$ ($\Omega' \setminus \Omega''$).

Теорема 3.2. Пусть 1) Ω и S_v регулярно составлены из Ω', Ω'' и S_v', S_v'' соответственно; 2) Ω, Ω_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) — строго липшицевы области, граница области Ω_i содержит некоторое непустое открытое в $\partial\Omega_i$ множество U_i, $U_i \subset S_q$; 3) справедливы соотношения

$$(3.4) \qquad \mathbf{U}^1(\Omega', S_v' \cup S') = \mathbf{W}^1(\Omega', S_v' \cup S')$$
$$\mathbf{U}^1(\Omega'', S_v'' \cup S'') = \mathbf{W}^1(\Omega'', S_v'' \cup S'')$$

Тогда $\mathbf{U}^1(\Omega, S_v) = \mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$.

Доказательство. Вложение $\mathbf{U}^1(\Omega, S_v)$ в $\mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$ очевидно. Пусть теперь $\mathbf{w}$ принадлежит $\mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$; покажем, что $\mathbf{w}$ принадлежит и $\mathbf{U}^1(\Omega, S_v)$.

Достаточно убедиться, что $\mathbf{w}$ можно представить в виде $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}''$, где

$$\mathbf{w}' \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{w}' = 0, \quad \mathbf{w}'|_{S_v' \cup S'} = 0$$

причем $\mathbf{w}'$ — продолжение нулем на Ω некоторой функции из $\mathbf{H}^1(\Omega')$, а $\mathbf{w}''$ обладает аналогичными свойствами с заменой (′) на (″). Действительно, в силу первого из условий (3.4) для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\mathbf{u}'$ из $\mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega}')$, обращающаяся в нуль на окрестности $\bar{S}_v' \cup \bar{S}'$ в $\bar{\Omega}'$ и такая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0, \quad \| \mathbf{w}' - \mathbf{u}' \|_{\mathbf{H}^1(\Omega')} < \varepsilon$$

Поскольку, как отмечено выше, $\bar{S}' = \partial\Omega' \cap \operatorname{Fr}(\Omega'' \setminus \Omega')$, то $\mathbf{u}'$ обращается в нуль на окрестности этого множества в $\bar{\Omega}'$ ($\operatorname{Fr} M$ — граница множества M в R^n). Тогда ее продолжение нулем $\mathbf{u}_c'$ на $\Omega'' \setminus \Omega'$ принадлежит $\mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega})$, причем $\operatorname{div} \mathbf{u}_c' = 0$ и, как несложно установить, $\mathbf{u}_c'$ обращается в нуль на окрестности $\bar{S}_v$ в $\bar{\Omega}$. Аналогично строится функция $\mathbf{u}_c''$. Для функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c' + \mathbf{u}_c''$ очевидны тогда следующие свойства:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega}), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$
$$\rho(\operatorname{supp} \mathbf{u}, \bar{S}_v) > 0, \quad \| \mathbf{w} - \mathbf{u} \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} < 2\varepsilon$$

откуда видно, что $\mathbf{w}$ принадлежит $\mathbf{U}^1(\Omega, S_v)$.

Покажем теперь, что $\mathbf{w}$ можно представить в требуемом виде $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}''$.

Рассмотрим сначала функцию $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}$. Используя свойства функции α, находим, что $\mathbf{v}$ принадлежит $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и является продолжением нулем на Ω некоторой функции из $\mathbf{H}^1(\Omega')$. Поскольку $S' \subset \operatorname{Fr}(\Omega'' \setminus \Omega')$ и $\mathbf{w}|_{S_v} = 0$, то $\mathbf{v}|_{S_v \cup S'} = 0$. Следует еще добиться выполнения условия соленоидальности — подправить функцию $\mathbf{v}$ в областях Ω_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), поскольку только в них $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$.

Пусть Γ_i — окрестность в $\partial\Omega_i$ множества $\bar{S}_i' \cup \bar{S}_i'' \cup \bar{S}_{vi}$ ($S_{vi} = S_v \cap \partial\Omega_i$), причем $\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i$ содержит некоторое открытое в $\partial\Omega_i$ множество (Γ_i существует в силу условия 2 теоремы). Тогда найдется функция

$$\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}^1(\Omega_i), \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = -\operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_i|_{\Gamma_i} = 0$$

Пусть теперь $\mathbf{w}_i$ — продолжение $\mathbf{v}_i$ нулем на Ω. Легко проверить, что $\mathbf{w}_i|_{S_v \cup S' \cup S''} = 0$, и тогда функции

$$\mathbf{w}' = \alpha \mathbf{w} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{w}'' = (1-\alpha)\mathbf{w} - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{w}_i$$

обладают всеми требуемыми свойствами. Теорема доказана.

Заметим, что если $\mathbf{U}^1 = \mathbf{W}^1$, то очевидно $\mathbf{U}^1 = \overline{\mathbf{V}}^1 = \mathbf{W}^1$ независимо от того, требовалось ли в определении $\mathbf{V}^1$ обращение $\mathbf{v}$ из $\mathbf{V}^1$ в нуль вблизи или на $\bar{S}_v$.

4. Формула Стокса. В дальнейшем, как намечено в п. 1, предстоит применять формулу Стокса к полю $\boldsymbol{\tau}$, у которого, вообще говоря, не все первые производные хотя бы локально суммируемы. В связи с этим рассмотрим пространство векторных полей на Ω

$$\mathbf{K}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) \colon \operatorname{div} \mathbf{u} \in L_2(\Omega)\}$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{K}(\Omega)} = \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Пространство $\mathbf{K}(\Omega)$ относится к классу пространств $\mathbf{H}^{\mathbf{M}}$, изучавшемуся в [6], где, однако, не рассматривался интересующий нас вопрос об интегрировании по частям. Пространство $\mathbf{K}(\Omega)$ полное, причем (например, в строго липшицевых областях) в нем плотно $\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Пусть Ω — ограниченная область класса C^1 в R^n. Всякая функция $\mathbf{v}$ из $\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ имеет на $\partial\Omega$ след $v_\nu = \mathbf{v}|_{\partial\Omega}\boldsymbol{\nu}$ ($\boldsymbol{\nu}$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$). Его можно рассматривать как элемент пространства $H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))'$, действие которого на w из $H^{1/2}(\partial\Omega)$ задается соотношением

$$\langle v_\nu, w\rangle = \int_{\partial\Omega} v_\nu w\, ds$$

Заметим, что

$$\|v_\nu\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leqslant c\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \tag{4.1}$$

где c не зависит от $\mathbf{v}$. Действительно, возьмем для w его продолжение w^c на Ω, как в (2.2). Тогда из формулы Стокса

$$\int_{\partial\Omega} v_\nu w\, ds = \int_\Omega w^c \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx + \int_\Omega \mathbf{v} \operatorname{grad} w^c\, dx$$

следует (4.1). Полнота $\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ в $\mathbf{K}(\Omega)$, оценка (4.1) и соответствующий переход к пределу в форме Стокса приводят теперь к следующему утверждению.

Лемма 4.1. Пусть Ω — ограниченная область класса C^1 в R^n. Тогда отображение следа $\mathbf{u} \to \mathbf{u}_\nu$ из $\mathbf{K}(\Omega)$ в $H^{-1/2}(\partial\Omega)$

$$\langle u_\nu, w\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} u_\nu^{(n)} w\, ds \quad \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

(где $\{\mathbf{u}^{(n)}\}$ — любая последовательность гладких функций, сходящаяся к $\mathbf{u}$ в $\mathbf{K}(\Omega)$) линейно и непрерывно. Для любого w из $H^1(\Omega)$ и любого $\mathbf{u}$ из $\mathbf{K}(\Omega)$ справедлива формула Стокса

$$\int_\Omega w \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx = -\int_\Omega \mathbf{u} \operatorname{grad} w\, dx + \langle u_\nu, w|_{\partial\Omega}\rangle$$

5. Самоуравновешенные поля напряжений в несжимаемых средах. Теперь можно реализовать план, намеченный в п. 1. Прежде всего приведем утверждение о связи Σ^1 и Σ^2 в случае $\partial\Omega = S_v$, непосредственно вытекающее из результатов [2].

Теорема 5.1 (О. А. Ладыженская, В. А. Солонников). Пусть Ω — ограниченная строго липшицева область, $\partial\Omega = S_v$. Тогда для любого $\boldsymbol{\tau}$ из Σ^1 найдется такое поле давления $p \in L_2(\Omega)$, что $\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{g}$ принадлежит Σ^2.

Действительно, если $\tau_{ij} \in L_2(\Omega)$, то $\boldsymbol{\tau}$ определяет линейный непрерывный функционал $\mathbf{f}_\tau$ на $H_0^1(\Omega)$

$$(5.1) \qquad \langle \mathbf{f}_\tau, \mathbf{u} \rangle = -\int_\Omega \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega))$$

Тогда однозначно разрешима задача Стокса [2], т. е. найдется $\mathbf{v}$ из $\overline{\mathbf{V}}^1$, такое, что для любого $\mathbf{u} \in \overline{\mathbf{V}}^1$

$$\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx = -\langle \mathbf{f}_\tau, \mathbf{u} \rangle$$

В рассматриваемом случае $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma^1$ и, следовательно, $\mathbf{f}_\tau |_{\overline{\mathbf{V}}^1} = 0$, поэтому $\mathbf{v} = 0$. Применим теперь к этому решению задачи Стокса теорему 2.1 [2]: найдется такое p из $L_2(\Omega)$, что

$$\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{w} dx = \langle \mathbf{f}_\tau, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

В силу (5.1) это и означает, что $\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{g}$ принадлежит Σ^2 (поскольку в рассматриваемом случае $S_v = \partial\Omega$ и, следовательно, $\overline{\mathbf{V}}^2 = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$).

Рассмотрим далее случай смешанных краевых условий. Пусть $\partial\Omega \neq S_v$ и $\boldsymbol{\tau}$ принадлежит множеству $\Sigma^1 = \Sigma^1(\Omega, S_v)$.

Первый шаг. Поскольку $\Sigma^1(\Omega, S_v)$, очевидно, вложено в $\Sigma^1(\Omega, \partial\Omega)$, то по теореме 5.1 найдется такое $p^0 \in L_2(\Omega)$, что для $\boldsymbol{\tau}^\circ = \boldsymbol{\tau} + p^\circ\mathbf{g}$ выполнены соотношения

$$(5.2) \qquad \partial\tau_{ij}^\circ / \partial x^j = 0.$$

Второй шаг. В силу последнего соотношения векторы $\boldsymbol{\tau}_{(i)}^\circ$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ с компонентами $\{\tau_{i1}^\circ, \tau_{i2}^\circ, \ldots, \tau_{in}^\circ\}$ принадлежат пространству $\mathbf{K}(\Omega)$. Тогда в соотношении

$$\int_\Omega \tau_{ij}^\circ \frac{\partial v_i}{\partial x^j} dx = 0$$

(выполненном для всякого $\mathbf{v}$ из $\overline{\mathbf{V}}^1(\Omega, S_v)$, поскольку $\boldsymbol{\tau}^\circ$ вместе с $\boldsymbol{\tau}$ принадлежит $\Sigma^1(\Omega, S_v)$) можно воспользоваться формулой Стокса (лемма 4.1). С учетом (5.2) находим, что для любого $\mathbf{v}$ из $\overline{\mathbf{V}}^1$

$$(5.3) \qquad \langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v} |_{\partial\Omega} \rangle = 0$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ принадлежит $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ и имеет компоненты $\gamma_i = \overset{\circ}{\tau}_{(i)\nu}$.

Третий шаг. Пусть теперь $\mathbf{u}$ — любое поле из $\overline{\mathbf{V}}^2$, а $\mathbf{u}_0$ — какое-нибудь поле из $\overline{\mathbf{V}}^2$, для которого

$$\mathbf{u}_0 |_{S_v} = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \boldsymbol{\nu} ds = 1$$

(такое поле найдется, так как $\partial\Omega \neq S_v$). Тогда для

$$(5.4) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\boldsymbol{\nu} ds$$

выполнены соотношения

$$(5.5) \qquad \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \mathbf{v} |_{S_v} = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}\boldsymbol{\nu} ds = 0$$

Рассмотрим далее поле $\mathbf{v}_s$, обладающее следующими свойствами:

$$\mathbf{v}_s \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \quad \mathbf{v}_s |_{\partial\Omega} = \mathbf{v} |_{\partial\Omega}$$

(благодаря условиям (5.5) такое поле найдется [2]). Заметим, что $\mathbf{v}_s$ принадлежит $\mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$.

Если $\mathbf{W}^1(\Omega, S_v)$ совпадает с $\overline{\mathbf{V}}^1(\Omega, S_v)$, то в силу (5.3) $\langle\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}_s|_{\partial\Omega}\rangle = 0$ или, что то же самое, $\langle\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}|_{\partial\Omega}\rangle = 0$.

Согласно (5.4), это означает, что для любого $\mathbf{u}$ из $\overline{\mathbf{V}}^2(\Omega, S_v)$

$$\langle\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{u}\rangle = c_0 \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{u}\mathbf{v}\,ds, \quad c_0 = \langle\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{u}_0|_{\partial\Omega}\rangle \tag{5.6}$$

Положим $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}^\circ - c_0\mathbf{g}$. Используя формулу Стокса и (5.2), находим, что

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x^j}\,dx = \langle\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{u}|_{\partial\Omega}\rangle - \langle c_0, \mathbf{v}, \mathbf{u}|_{\partial\Omega}\rangle \ \forall \mathbf{u}\in\overline{\mathbf{V}}^2(\Omega, S_v)$$

Как следует из (5.6), правая часть здесь обращается в нуль и, таким образом, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + (p^\circ - c_0)\mathbf{g}$ принадлежит $\Sigma^2(\Omega, S_v)$. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 5.2. Пусть Ω — ограниченная область класса C^1; $S_q \neq \varnothing$; $\mathbf{W}^1(\Omega, S_v) = \mathbf{V}^1(\Omega, S_v)$. Тогда для любого $\boldsymbol{\tau}$ из $\Sigma^1(\Omega, S_v)$ найдется такое поле давления $p \in L_2(\Omega)$, что $\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{g}$ принадлежит $\Sigma^2(\Omega, S_v)$.

Замечания. 1°. Достаточные условия совпадения $\mathbf{W}^1$ и $\overline{\mathbf{V}}^1$ даны теоремами 3.1, 3.2.

2°. Поле давления однозначно определяется по девиаторной составляющей $\boldsymbol{\tau}$. Точнее, если $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ принадлежат Σ^1 и их девиаторные составляющие совпадают, а $\sigma_1 = \boldsymbol{\tau}_1 + p_1\mathbf{g}$ и $\sigma_2 = \boldsymbol{\tau}_2 + p_2\mathbf{g}$ принадлежат Σ^2, то $\sigma_1 = \sigma_2$ при $S_q \neq \varnothing$ и $\sigma_1 - \sigma_2 = c\mathbf{g}$, где c — произвольная постоянная, при $S_q = \varnothing$.

Некоторые проблемы механики несжимаемых сред сводятся к задаче о нахождении самоуравновешенного поля напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, удовлетворяющего определенным условиям. Если эти условия не накладывают ограничений на шаровую составляющую $\boldsymbol{\sigma}$, то ее вообще можно исключить из рассмотрения, понимая самоуравновешенность как принадлежность поля напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ множеству Σ^1. В такой «девиаторной» задаче шаровая составляющая искомых напряжений не определяется (напомним, что всякое $\boldsymbol{\tau}$ из Σ^1 определено с точностью до добавления произвольного поля шарового тензора).

Решение полной задачи (в постановке которой самоуравновешенность $\boldsymbol{\sigma}$ понимается как принадлежность $\boldsymbol{\sigma}$ множеству Σ^2) является также решением девиаторной задачи. Теорема 5.2 может служить для обратного сопоставления решению $\boldsymbol{\tau}$ девиаторной задачи решения $\tau + pg$ полной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье — Стокса.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1976, т. 59, № 9, с. 81—116.
3. *Рам Ж де.* Дифференцируемые многообразия. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 250 с.
4. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
5. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена. Физ.-матем. фак-т, 1958, т. 197, с. 54—112.
6. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения.— Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 1, с. 3—74.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

Москва

Поступила в редакцию 22.V.1981