Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 539.383

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ КАРЛЕМАНА, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Мхитарян С. М.

Методами теории обобщенного потенциала вновь устанавливается спектральное соотношение [1] для интегрального оператора, порожденного симметрическим степенным ядром на конечном интервале, которое содержит полиномы Гегенбауэра. Устанавливаются также спектральные соотношения для этого же оператора в случае двух симметрических полубесконечных интервалов. На основе последних строится решение контактной задачи о вдавливании двух одинаковых полубесконечных штампов в деформирующуюся по степенному закону полуплоскость.

Ряд подобных спектральных соотношений в ортогональных полиномах для интегральных операторов, встречающихся в разнообразных смешанных задачах теории упругости и математической физики, установлен в работах, подробная библиография которых приведена в [2]. Основанный на них метод ортогональных полиномов, существенно развитый в этих работах, позволяет получить эффективное решение обширного класса контактных и смешанных задач механики деформируемого тела. Применению аппарата ортогональных полиномов посвящена также работа [3].

Интегральное уравнение с симметрическим степенным ядром на конечном интервале впервые рассмотрено Карлеманом в [4], где применен метод продолжения уравнения в комплексную плоскость. Более общее уравнение методами краевых задач теории аналитических функций рассмотрено в [5]. В [6] впервые получено решение уравнения Карлемана в форме квадратур, не содержащее интегралы в смысле Коши.

1. Рассмотрим интегральное уравнение Карлемана

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(s)\,ds}{|x-s|^h} = f(x), \quad 0 < h < 1, \quad \varphi(x) \in L_w^2(-1,1), \quad w(x) > 0 \tag{1.1}$$

с тем, чтобы определить собственные функции и собственные числа входящего сюда интегрального оператора. С этой целью рассмотрим функцию двух переменных

$$V(x, y) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(s)\,ds}{[(x-s)^2 + y^2]^{h/2}} \tag{1.2}$$

Как показано в [7, 8], функция $V(x, y)$ везде в плоскости $x0y$, кроме отрезка $L = \{-1 \leqslant x \leqslant 1, \ y = 0\}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{h}{y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Это уравнение при $h = {}^1/_3$ в связи с известной задачей Трикоми встречается также в вопросах газовой динамики [9, 10]. Видно, что

$$V(x,y) \sim \frac{P}{r^h}, \quad r \to \infty \quad (r = \sqrt{x^2+y^2}); \quad P = \int_{-1}^{1} \varphi(s)\,ds$$

Следовательно, решение интегрального уравнения (1.1) эквивалентно решению следующей внешней краевой задачи:

$$\Delta V + \frac{h}{y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \overline{\in} L \tag{1.3}$$

$$V(x, y)|_{y=0} = f(x), \quad -1 < x < 1; \quad V(x, y) \sim \frac{P}{r^h}, \quad r \to \infty$$

Аналогичная краевая задача получена в [11], где затронут также вопрос о единственности решения.

После того как построено решение задачи (1.3), плотность источников будет определяться по формуле

$$-2\sqrt{\pi}\,\Gamma[(1+h)/2]\,[\Gamma(h/2)]^{-1}\operatorname{sgn} y\varphi(x) = \lim_{y\to 0}|y|^h \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \tag{1.4}$$

Краевую задачу (1.3) преобразуем в эквивалентную, допускающую применение метода разделения переменных, для чего положим

$$V(x, y) = |y|^{-h/2} U(x, y)$$

Далее, как в [12], при помощи функции Жуковского

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\vartheta}$$

плоскость z со щелью по отрезку $[-1,1]$ отобразим на единичный круг $\rho < 1$ плоскости ζ. При этом будем иметь

$$x = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\vartheta, \quad y = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{4y^2}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \frac{1}{(\rho^2-1)^2} + \frac{1}{4\rho^2\sin^2\vartheta} \tag{1.6}$$

$$r = \frac{1}{2\rho}\sqrt{\rho^4 + 2\rho^2\cos 2\vartheta + 1} \tag{1.7}$$

Из (1.7) вытекает, что точке $z = \infty$ соответствует точка $\zeta = 0$. С учетом последнего и формул (1.5), (1.6) краевую задачу (1.3) преобразуем в следующую краевую задачу для единичного круга:

$$\Delta W + h(2-h)\left[\frac{1}{(\rho^2-1)^2} + \frac{1}{4\rho^2\sin^2\vartheta}\right] W = 0, \quad \rho < 1 \tag{1.8}$$

$$\left[\frac{1}{2}\left|\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta\right|\right]^{-h/2} W(\rho, \vartheta)|_{\rho=1} = f(\cos\vartheta)$$

$$W(\rho, \vartheta)|_{\rho=0} = 0, \quad -\pi \leqslant \vartheta < \pi$$

$$\left(\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\vartheta^2}\right)$$

$$\left(W(\rho, \vartheta) = U\left[\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\vartheta, \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta\right] = U(x, y)\right)$$

Теперь применим к (1.8) метод разделения переменных, для чего положим

$$W(\rho, \vartheta) = R(\rho)\,\Phi(\vartheta)$$

В результате придем к дифференциальным уравнениям

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + \left[h(2-h)\frac{\rho^2}{(\rho^2-1)^2} - \lambda^2\right] R = 0, \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{1.9}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2} + \left[\lambda^2 + \frac{h(2-h)}{4\sin^2\vartheta}\right]\Phi = 0, \quad -\pi \leqslant \vartheta < \pi \tag{1.10}$$

где λ^2 — параметр разделения. При помощи (1.8) можно обнаружить, что уравнение (1.9) должно рассматриваться при условии

$$R(0) = 0 \tag{1.11}$$

а уравнение (1.10) — при условии периодичности

(1.12) $$\Phi(\vartheta) = \Phi(\vartheta + 2\pi)$$

Эти условия вместе с приводимым ниже дополнительным условием для (1.10) приводят к краевым задачам Штурма — Лиувилля для указанных дифференциальных уравнений.

Сначала построим решение уравнения (1.10), считая $0 < \vartheta < \pi$. Подстановка

$$\Phi(v) = \sqrt{\sin\vartheta}\,G(\vartheta),\ 0 < \vartheta < \pi$$

преобразует упомянутое уравнение в дифференциальное уравнение Лежандра, имеющее линейно-независимые решения

$$P_\nu^\mu(\cos\vartheta),\quad Q_\nu^\mu(\cos\vartheta);\ 0 < \vartheta < \pi,\quad \nu = \lambda - {}^1/_2,\quad \mu = (1-h)/2$$

Представляя функции Лежандра в виде известных тригонометрических разложений [13], при помощи (1.12) находим, что должно быть $\lambda = n + h/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из этих же разложений находим, что функция $(\sin\vartheta)^\mu P_{n-\mu}^\mu(\cos\vartheta)$ $(0 < \vartheta < \pi)$ допускает четное продолжение на интервал $-\pi < \vartheta < 0$, а функция $(\sin\vartheta)^\mu Q_{n-\mu}^\mu(\cos\vartheta)$ — нечетное продолжение на этот же интервал. Но согласно второму соотношению (1.8) искомое решение должно быть четным. Поэтому единственное решение уравнения (1.10), определяемое посредством (1.12) и этим дополнительным условием, имеет вид

(1.13) $$\Phi(\vartheta) = \sqrt{|\sin\vartheta|}\,P_{n-\mu}^\mu(\cos\vartheta),\quad -\pi \leqslant \vartheta < \pi,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Приняв во внимание соотношение, связывающее полиномы Гегенбауера с функциями Лежандра [13], окончательно можем записать

$$\Phi(\vartheta) = |\sin\vartheta|^{h/2} C_n^{h/2}(\cos\vartheta),\quad -\pi \leqslant \vartheta < \pi,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Обращаясь теперь к уравнению (1.9), положим

$$u = \rho^2,\quad R(\sqrt{u}) = M(u),\quad 0 \leqslant u < 1$$

Следуя известной процедуре аналитической теории дифференциальных уравнений [14], можно показать, что получившееся уравнение описывается следующей схемой Римана:

$$M(u) = u^{\lambda/2}(1-u)^{h/2} P \begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & h/2 & 0 & u \\ -\lambda & \lambda + h/2 & 1-h & \end{Bmatrix}$$

Но указанной схемой Римана описывается функция $M_0(u)$, удовлетворяющая гипергеометрическому дифференциальному уравнению [14] при

$$a = h/2,\ b = \lambda + h/2,\quad c = \lambda + 1,\ \lambda = n + h/2,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Линейно-независимыми решениями этого уравнения будут

$$F(a, b; c; u),\quad u^{1-c} F(a - c + 1,\ b - c + 1;\ 2 - c;\ u)$$

где $F(a, b; c; u)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Однако при указанных параметрах второе решение не ограничено в точке $u = 0$, и вследствие условия (1.11) нужно брать только первое решение. Тогда окончательно

(1.14) $$R(\rho) = \rho^{n+h/2}(1-\rho^2)^{h/2} F(h/2,\ n + h;\ n + 1 + h/2;\ \rho^2),\ 0 \leqslant \rho < 1$$

Сопоставление (1.13) и (1.14) дает, что краевая задача (1.3) обладает нормальным решением вида

$$(1.15)\qquad V_0(\rho,\vartheta)=\rho^{n+h}F(h/2,n+h;n+1+h/2;\rho^2)\,C_n^{h/2}(\cos\vartheta)$$

$$0\leqslant\rho<1,\quad -\pi\leqslant\vartheta<\pi,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\left(V_0(\rho,\vartheta)=V\left[\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\vartheta,\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta\right]=V(x,y)\right)$$

Исходя из потенциала (1.15), вычислим соответствующую плотность источников, для чего преобразуем формулу (1.4). Для определенности считая $0<\vartheta<\pi$ и используя (1.15), получим

$$(1.16)\qquad \varphi(\cos\vartheta)=\frac{\Gamma(h)\,\Gamma(n+1+h/2)}{\sqrt{\pi}\,2^{h/2}\Gamma[(1+h)/2]\,\Gamma(n+h)}(\sin\vartheta)^{h-1}C_n^{h/2}(\cos\vartheta),\ 0<\vartheta<\pi$$

Подставляя (1.16) и (1.15) при $\rho=1$ в (1.2), после некоторых операций получим искомое спектральное соотношение

$$(1.17)\qquad \int_{-1}^{1}\frac{C_n^{h/2}(s)\,ds}{|x-s|^h(1-s^2)^{(1-h)/2}}=\mu_nC_n^{h/2}(x),\quad |x|<1,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\mu_n=\pi\Gamma(n+h)\,[n!\,\Gamma(h)\cos(\pi h/2)]^{-1}$$

которое другими методами было установлено ранее [1].

Важно отметить, что изложенная здесь методика позволяет получить также выражение интеграла из (1.17) вне интервала $|x|<1$, т. е. на лучах $|x|>1$. А именно, на этих лучах

$$\rho=|x|-\operatorname{sgn}x\sqrt{x^2-1},\quad |x|>1$$

что вытекает из (1.5), причем лучу $x>1$ соответствует значение $\vartheta=0$, а лучу $x<-1$ — значение $\vartheta=\pi$. Опять подставляя (1.16) и (1.15) в (1.2), после преобразований придем к родственному с (1.17) интегральному соотношению ($H(x)$ — функция Хевисайда)

$$\int_{-1}^{1}\frac{C_n^{h/2}(s)\,ds}{|x-s|^h(1-s^2)^{(1-h)/2}}=\nu_n[H(x)+(-1)^nH(-x)]\,[\,|x|-$$

$$-\operatorname{sgn}x\sqrt{x^2-1}]^{n+h}F(h/2,n+h;n+1+h/2;2x^2-$$

$$-2x\sqrt{x^2-1}-1),\quad |x|>1$$

$$\nu_n=\frac{\sqrt{\pi}\,2^h\Gamma[(1+h)/2]\,\Gamma^2(n+h)}{\Gamma^2(h)\,n!\,\Gamma(n+1+h/2)},\quad n=0,1,2,\ldots$$

2. Перейдем к рассмотрению интегрального уравнения

$$(2.1)\qquad \left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{1}^{\infty}\right)\frac{\varphi(s)\,ds}{|x-s|^h}=f(x)$$

Опять введем функцию двух переменных

$$(2.2)\qquad V(x,y)=\int_L\frac{\varphi(s)\,ds}{[(x-s)^2+y^2]^{h/2}}\qquad (L=\{\,|x|>1,y=0\})$$

причем, как ранее, будем предполагать, что плотность источников обладает конечной мощностью

$$P=\int_L\varphi(s)\,ds<\infty$$

хотя для отдельных гармоник это условие может и не выполняться. Тогда интегральное уравнение (2.1) эквивалентно следующей краевой задаче:

$$(2.3)\qquad \Delta V+\frac{h}{y}\frac{\partial V}{\partial y}=0,\quad (x,y)\overline{\in} L$$
$$V(x,y)|_{y=0}=f(x),\quad |x|>1,\quad V(x,y)\backsim\frac{P}{r^h},\quad r\to\infty$$

Чтобы построить решение (2.3), заметим, что приведенная выше функция Жуковского отображает плоскость z с выключенными лучами $|x|>1$ на полуплоскость $\eta>0$ плоскости ζ. При этом верхняя плоскость $y>0$ отображается на бесконечный полукруг $\{\rho>1,\ 0<\vartheta<\pi\}$, а нижняя полуплоскость $y<0$ — на полукруг $\{\rho<1,\ 0<\vartheta<\pi\}$. Следовательно, (2.3) можно преобразовать в краевую задачу

$$(2.4)\qquad \Delta W+h(2-h)\left[\frac{1}{(\rho^2-1)^2}+\frac{1}{4\rho^2\sin^2\vartheta}\right]W=0,\ \rho<\infty,\ 0<\vartheta<\pi$$
$$\left[\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta\right]^{-h/2}W(\rho,\vartheta)|_{\vartheta=0,\ \vartheta=\pi}=$$
$$=f\left[\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\vartheta\right]_{\vartheta=0,\ \vartheta=\pi},\quad 1<\rho<\infty$$
$$\left(\frac{1}{2}\left|\rho-\frac{1}{\rho}\right|\sin\vartheta\right)^{-h/2}W(\rho,\vartheta)|_{\rho\to 0,\ \rho\to\infty}\backsim\frac{P}{r^h},\quad r\to\infty$$

где обозначения прежние.

Положив

$$W(\rho,\vartheta)=R(\rho)\,\Phi(\vartheta)$$

из (2.4) опять, как ранее, придем к дифференциальным уравнениям (1.9) и (1.10), в которых следует заменить λ^2 на $-\lambda^2$.

Далее, поступив совершенно аналогично изложенному выше, находим, что краевая задача (2.3) обладает нормальным решением вида

$$(2.5)\qquad V(x,y)=V_0(\rho,\vartheta)=\left(\frac{1}{2}\left|\rho-\frac{1}{\rho}\right|\sin\vartheta\right)^{\mu}\times$$
$$\times[AP_\nu^\mu(\cos\vartheta)+BQ_\nu^\mu(\cos\vartheta)]\left\{CP_\nu^\mu\left[\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+DP_\nu^{-\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right]\right\},\quad \rho<\infty,\quad 0<\vartheta<\pi$$
$$\nu=-{}^1/_2+i\lambda,\ \mu=(1-h)/2,\ \lambda>0$$

Теперь, исходя из (2.5), построим четные и нечетные относительно точки $\vartheta=\pi/2$ функции по ϑ. Положим

$$G(\vartheta)=AP_\nu^\mu(\cos\vartheta)+BQ_\nu^\mu(\cos\vartheta),\ 0<\vartheta<\pi$$

и воспользуемся известными соотношениями ([13], с. 145). Тогда равенство $G(\vartheta)=G(\pi-\vartheta)$ $(0<\vartheta<\pi/2)$, определяющее четную относительно точки $\vartheta=\pi/2$ функцию, приводит к линейной однородной системе относительно постоянных A и B. Определитель этой системы тождественно равен нулю, и, следовательно, она имеет нетривиальное решение

$$B=\frac{2A}{\pi}\,\mathrm{tg}\left[\pi\left(\frac{h}{4}-\frac{i\lambda}{2}\right)\right]$$

При помощи этого равенства четную вещественную функцию, являющуюся компонентом нормального решения, можем представить формулой

$$(2.6)\qquad G_0(\vartheta)=(\sin\vartheta)^\mu G_\lambda^+(\vartheta),\quad 0<\vartheta<\pi$$
$$C_\lambda^+(\vartheta)=P_\nu^\mu(\cos\vartheta)+\frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{tg}\left[\pi\left(\frac{h}{4}-\frac{i\lambda}{2}\right)\right]Q_\nu^\mu(\cos\vartheta)+\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{tg}\left[\pi\left(\frac{h}{4}-\frac{i\lambda}{2}\right)\right]Q_{\bar\nu}^\mu(\cos\vartheta)\right\}$$

Аналогичным образом нечетную вещественную функцию можем представить формулой

$$(2.7)\qquad G_0(\vartheta)=(\sin\vartheta)^{\mu}G_\lambda^-(\vartheta),\quad 0<\vartheta<\pi$$

$$G_\lambda^-(\vartheta)=P_\nu^{\mu}(\cos\vartheta)-\frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{ctg}\left[\pi\left(\frac{h}{4}-\frac{i\lambda}{2}\right)\right]Q_\nu^{\mu}(\cos\vartheta)+\right.$$
$$\left.+\operatorname{ctg}\left[\pi\left(\frac{h}{4}+\frac{i\lambda}{2}\right)\right]Q_\nu^{-\mu}(\cos\vartheta)\right\}$$

Далее, в (2.5) положим $C=1$, $D=0$. Тогда нормальное решение краевой задачи (2.3) будет иметь вид

$$(2.8)\qquad V_0(\rho,\vartheta)=\left(\frac{1}{2}\left|\rho-\frac{1}{\rho}\right|\right)^{\mu}G_0(\vartheta)P_\nu^{\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right]$$
$$\rho<\infty,\quad 0<\vartheta<\pi$$

Если же в (2.5) положим $C=0$, $D=1$, то будем иметь

$$(2.9)\qquad V_0(\rho,\vartheta)=\left(\frac{1}{2}\left|\rho-\frac{1}{\rho}\right|\right)^{\mu}G_0(\vartheta)P_\nu^{-\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right]$$
$$\rho<\infty,\quad 0<\vartheta<\pi$$

Найдем плотность источников. Поступив вполне аналогично сделанному выше, из (2.8) и (2.6) получим

$$(2.10)\qquad \varphi(x)=E_\lambda^h\left[\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\right]^{\mu}P_\nu^{\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right],$$
$$x=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right),\quad \rho>1$$
$$E_\lambda^h=2^{-\mu}\pi^{-1/2}\Gamma(h/2)\frac{1+\cos(\pi h/2)\operatorname{ch}\pi\lambda}{\{|\Gamma(h/2+i\lambda)|[\operatorname{ch}\pi\lambda+\cos(\pi h/2)]\}^2}$$

Теперь в (2.10) и (2.8) при $\vartheta=0$ от переменной ρ перейдем к переменной x и полученные результаты подставим в (2.2). После преобразований придем к спектральному соотношению

$$(2.11)\qquad \int_1^\infty\left[\frac{1}{|x-s|^h}+\frac{1}{(x+s)^h}\right](s^2-1)^{-\mu}\varphi_+(s,\lambda)\,ds=$$
$$=\sigma_+(\lambda)\varphi_+(x,\lambda),\quad x>1,\quad \lambda>0$$

Совершенно аналогичным путем, исходя из других компоновок формул (2.6) — (2.7) и (2.8) — (2.9), получим еще следующие спектральные соотношения:

$$(2.12)\qquad \int_1^\infty\left[\frac{1}{|x-s|^h}-\frac{1}{(x+s)^h}\right](s^2-1)^{-\mu}\varphi_+(s,\lambda)\,ds=$$
$$=\sigma_-(\lambda)\varphi_+(x,\lambda),\quad x>1,\quad \lambda>0$$

$$(2.13)\qquad \int_1^\infty\left[\frac{1}{|x-s|^h}\pm\frac{1}{(x+s)^h}\right](s^2-1)^{-\mu}\varphi_-(s,\lambda)\,ds=$$
$$=\sigma_\pm(\lambda)\varphi_-(x,\lambda),\quad x>1,\quad \lambda>0$$
$$(\varphi_\pm(x,\lambda)=(x^2-1)^{\mu/2}P_\nu^{\pm\mu}(x))$$
$$(\sigma_\pm(\lambda)=[\operatorname{ch}\pi\lambda\pm\cos(\pi h/2)]\,|\Gamma(h/2+i\lambda)|^2\,[\Gamma(h)\times$$
$$\times\cos(\pi h/2)]^{-1})$$

Формальным сложением и вычитанием формул (2.11) и (2.12), а также формул (2.13) придем еще к четырем спектральным соотношениям

$$(2.14)\qquad \int_1^\infty\frac{\varphi_+(s,\lambda)}{|x\pm s|^h}(s^2-1)^{-\mu}\,ds=\rho_\pm(\lambda)\varphi_+(x,\lambda),\quad x>1,\quad \lambda>0$$

$$(2.15)\qquad \int_1^\infty \frac{\varphi_-(s,\lambda)}{|x\pm s|^h}(s^2-1)^{-\mu}\,ds=\rho_\pm(\lambda)\,\varphi_-(x,\lambda),\quad x>1,\quad \lambda>0$$

$$\rho_+(\lambda)=|\Gamma(h/2+i\lambda)|^2[\Gamma(h)]^{-1},\quad \rho_-(\lambda)=\operatorname{ch}\pi\lambda\,|\Gamma(h/2+ i\lambda)|^2[\Gamma(h)\cos(\pi\lambda/2)]^{-1}$$

Положив в (2.14) и (2.15), когда имеется знак плюс, $h=1$, получим известное спектральное соотношение Мелера [15].

На основе изложенных результатов можно получить также родственные с (2.11) — (2.13) соотношения, справедливые на интервале $0<x<1$. Можно заметить, что этому интервалу соответствует дуга $\{\rho=1, 0<\vartheta<\pi/2\}$ окружности на плоскости ζ. Поступив аналогично сделанному выше, при помощи (2.8) — (2.9), (2.6) и (2.10) придем к соотношениям

$$(2.16)\qquad \int_1^\infty\left[\frac{1}{|x-s|^h}\pm\frac{1}{(x+s)^h}\right](s^2-1)^{-\mu}\varphi_+(s,\lambda)\,ds= =\pm\varkappa_\pm(\lambda)(1-x^2)^{\mu/2}G_\lambda^\pm(\arccos x),\quad 0<x<1$$

$$\int_1^\infty\left[\frac{1}{|x-s|^h}\pm\frac{1}{(x+s)^h}\right](s^2-1)^{-\mu}\varphi_-(s,\lambda)\,ds=0,\quad 0<x<1$$

$$\varkappa_\pm(\lambda)=|\Gamma(h/2+i\lambda)|^2\frac{[\operatorname{ch}\pi\lambda\pm\cos(\pi h/2)]^2}{\{\Gamma(h)[1\pm\cos(\pi h/2)\operatorname{ch}\pi\lambda]\}}$$

Далее, воспользовавшись формулами обобщенного преобразования Мелера, из (2.11) получим следующее билинейное разложение:

$$\pi\Gamma(h)\cos\left(\pi\frac{h}{2}\right)\left[\frac{1}{|x-s|^h}+\frac{1}{(x+s)^h}\right][(x^2-1)(s^2-1)]^{-\mu/2}= =\int_0^\infty\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda\left[\operatorname{ch}\pi\lambda+\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\right]\left|\Gamma\left(\frac{h}{2}+i\lambda\right)\right|^4 P_\nu^\mu(x)\,P_\nu^\mu(s)\,d\lambda$$

$$x>1$$

Видно, что последний интеграл сходящийся. Такие же разложения можно записать при помощи (2.12) — (2.13).

3. Полученные результаты применим к решению контактной задачи о вдавливании двух одинаковых полубесконечных штампов, занимающих область $\{|x|>a,\ y=0\}$ в деформирующуюся по степенному закону $\sigma_i=K_0\varepsilon_i^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ полуплоскость $y<0$.

Предположим, что под действием приложенных сил штампы могут только поступательно перемещаться в вертикальном направлении. Здесь σ_i и ε_i — интенсивности напряжений и деформаций, а K_0 и α — физические константы материала. Этот физический закон можно рассматривать как в рамках деформационной теории пластичности, так и в рамках теории установившейся ползучести, но в последнем случае под ε_i нужно подразумевать интенсивность скоростей деформаций. Придерживаясь обобщенного принципа суперпозиции перемещений [16, 17], решение указанной задачи можно свести к решению интегрального уравнения

$$(3.1)\qquad \left(\int_{-\infty}^{-a}+\int_a^\infty\right)\frac{p(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}=\left[\frac{\delta-f_0(x)}{A_0}\right]^\alpha$$

$$A_0=(2-\gamma)\sin(\pi\beta/2)\,[K_0J(\lambda)]^{-\gamma}[\beta(\gamma-1)]^{-1}$$

$$J(\alpha)=4\int_0^{\pi/2}(\cos\beta\vartheta)^\alpha\cos\vartheta\,d\vartheta,\quad \beta=\sqrt{2\alpha-1}/\alpha,\quad \gamma=1/\alpha$$

где $p(x)$ — контактное давление, δ — осадка штампов, $f_0(x)$ — функция, характеризующая поверхность штампов.

Ограничимся рассмотрением симметрического случая. Предположим, как обычно, что контактное давление имеет конечную равнодействующую P. Тогда левая часть (3.1) имеет асимптотику $P/|x|^{1-\alpha}$ при $|x| \to \infty$. Следовательно,

$$f_0(x) \sim \delta - A_0 P^\gamma |x|^{1-\gamma}, \quad |x| \to \infty$$

откуда фактически определяется осадка штампов δ.

Далее, в (3.1) перейдем к безразмерным величинам

$$x = a\xi, \quad y = a\eta, \quad ap(a\xi)/P = \varphi(\xi), \quad a^{1-\alpha} A_0^{-\alpha} [\delta - f_0(a\xi)]^\alpha / P = f(\xi)$$

после чего будем иметь уравнение

$$\int_1^\infty \left[\frac{1}{|\xi - \eta|^h} + \frac{1}{(\xi + \eta)^h} \right] \varphi(\eta)\, d\eta = f(\xi), \quad h = 1 - \alpha \tag{3.2}$$

Решение (3.2) представим в виде интеграла

$$\varphi(\xi) = (\xi^2 - 1)^{-\mu/2} \int_0^\infty \Phi(\lambda) P^\mu_{-1/2+i\lambda}(\xi)\, d\lambda \tag{3.3}$$

Приняв во внимание (2.11), по формуле обращения Мелера находим

$$\Phi(\lambda) = \frac{\Gamma(h) \cos(\pi h/2)\, \lambda\, \operatorname{sh} \pi\lambda}{\pi [\operatorname{ch} \pi\lambda + \cos(\pi h/2)]} \int_1^\infty P^\mu_{-1/2+i\lambda}(\xi) (\xi^2 - 1)^{-\mu/2} f(\xi)\, d\xi \tag{3.4}$$

Итак, решение уравнения (3.2) дается формулами (3.3), (3.4).

Теперь, положив

$$v_0(\xi) = \int_1^\infty \left[\frac{1}{|\xi - \eta|^h} + \frac{1}{(\xi + \eta)^h} \right] \varphi(\eta)\, d\eta, \quad 0 < \xi < 1$$

при помощи первого соотношения (2.16), когда берется знак плюс, получим

$$v_0(\xi) = \varkappa_+(\lambda) (1 - \xi^2)^{\mu/2} \int_0^\infty G^+_\lambda(\arccos \xi)\, \Phi(\lambda)\, d\lambda$$

В пределах принятой точности истинные перемещения граничных точек полуплоскости вне штампов будут выражаться формулой

$$v(x) = -A_0 a^{1-\gamma} P^\gamma v_0^\gamma (x/a), \quad 0 < x < a$$

Отметим, что результаты этого пункта могут быть распространены на рассматриваемую задачу в постановке линейной теории упругости [18], когда модуль упругости полуплоскости по глубине изменяется по степенному закону $E(y) = E_0 |y|^\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1,\ y < 0)$.

Следует еще отметить, что применение методов теории потенциала позволяет не только установить большое число ранее известных спектральных соотношений, но получить ряд новых и, тем самым, существенно расширить их класс. Они дают возможность получать спектральные соотношения единым методом для многих интегральных операторов.

Кроме того, можно найти нужные физические характеристики не только в областях, где заданы интегральные уравнения, но и вне их, что особенно важно в пространственных задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их приложение к контактным задачам.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 821—832.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
3. *Александров В. М., Кучеров В. А.* О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 643—652.
4. *Carleman T.* Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen.— Mat. Z., 1922, Bd 15, H. 1/2, S. 111—120.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода.— Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3, с. 413—416.

7. *Раков А. Ф., Рвачев В. Л.* Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины.— Докл. АН УССР, 1961, № 3, с. 286—290.
8. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. К.: Наук. думка, 1977. 235 с.
9. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.— Л.: Гостехтеориздат, 1947. 192 с.
10. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.
11. *Ростовцев Н. А.* О некоторых решениях интегрального уравнения теории линейно-деформируемого основания.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, с. 111—127.
12. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.— Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1937. 294 с.
14. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 343 с.
15. *Лебедев Н. Н.* Некоторые сингулярные интегральные уравнения, связанные с интегральными разложениями математической физики.— Докл. АН СССР, 1949, т. 65, № 5, с. 621—624.
16. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, т. 12, № 2, с. 77—105.
17. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901—924.
18. *Белик Г. И., Проценко В. С.* Контактная задача для полуплоскости, у которой модуль упругости материала выражается степенной функцией глубины.— Прикл. механика, 1967, т. 3, вып. 6, с. 137—140.

Ереван

Поступила в редакцию
11.V.1982