

УДК 539.374

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КОНУСОБРАЗНЫХ ТЕЛ

Задоян М. А.

Рассматриваются течения идеальной жесткопластической несжимаемой среды, имеющей форму конусообразного тела, при различных внешних воздействиях. Задача об осесимметричном течении сводится к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых описывают предельные состояния конических труб под воздействием равномерно распределенных на внутренней и внешней поверхностях кольцевых касательных сил, нормальных и кольцевых касательных сил, нормальных и продольных касательных сил. Исследуются совместный изгиб и растяжение конического листа, течение пластической массы между двумерно-шероховатыми коническими поверхностями, сближающимися по экспоненциальному закону по кольцевой координате.

Осесимметричное радиальное течение пластической массы в сходящихся каналах формы кругового конуса исследовано в работах [1, 2]. Задача предельного состояния конической трубы при равномерных внутреннем и внешнем давлениях решена в [3], а решение соответствующей упругопластической задачи построено в [1]. В работах [4, 5] исследовано течение пластического материала между коническими поверхностями, принятыми шероховатыми по кольцевому направлению при постоянных поперечных скоростях по этому же направлению.

**1. Основные уравнения.** Соотношения теории идеального жесткопластического течения в сферических координатах в обычных обозначениях имеют следующий вид:

дифференциальные уравнения равновесия

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\varphi}) &= 0 \end{aligned}$$

соотношения между компонентами скоростей деформаций, напряжений и скоростей перемещений

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \Lambda (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma), \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta, \quad 2\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

условие пластичности Губера—Мизеса

$$(1.3) \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2 + \tau_{r\varphi}^2) = 6k^2$$

Здесь и в дальнейшем компоненты напряжений отнесены к пластической постоянной  $k$ . Компоненты напряжений удобно представить в виде

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta + \frac{1}{\Omega_0} (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - \frac{1}{\Omega_0} (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta) \\ \tau_{ij} &= \frac{1}{\Omega_0} \gamma_{ij}, \quad \Omega_0 = (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta\varphi}^2 + \gamma_{r\varphi}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

В некотором классе осесимметричных течений компоненты напряжений и скорости перемещений можно выразить через неизвестные функции  $f(\theta)$ ,  $\psi(\theta)$  и произвольные постоянные в следующем виде:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta + \frac{2}{\Omega} [(2\lambda + 1)f' + (\lambda - 1)f \operatorname{ctg} \theta], \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta + \frac{2(\lambda + 2)}{\Omega} (f' - f \operatorname{ctg} \theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{\Omega} [g' + (1 - \lambda)(2 + \lambda)f], \quad \tau_{r\varphi} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 2)}{\Omega} \psi \sin \theta \\ \tau_{\theta\varphi} &= \frac{\lambda + 2}{\Omega} \psi' \sin \theta, \quad \Omega = \{4\lambda^2 g^2 - 4\lambda gh + 4h^2 + \\ &+ [g' + (1 - \lambda)(2 + \lambda)f]^2 + (\lambda + 2)^2 \sin^2 \theta [\psi'^2 + (\lambda - 1)^2 \psi^2]\}^{1/2} \\ g &= f' + f \operatorname{ctg} \theta, \quad h = (\lambda + 1)f' - f \operatorname{ctg} \theta, \quad \lambda = \text{const} \\ u &= r^\lambda g, \quad v = -(\lambda + 2)r^\lambda f, \quad w = (\lambda + 2)r^\lambda \psi \sin \theta + Cr \sin \theta \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем заглавные буквы латинского алфавита обозначают произвольные постоянные.

Из уравнений равновесия (1.1) и соотношения (1.5) следуют выражение

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta &= -H + M \ln r - 3 \int \tau_{r\theta} d\theta + \\ &+ 2(\lambda + 2) \int (f' - f \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{\Omega} \end{aligned}$$

и система из двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно  $f$  и  $\psi$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} &\left\{ \frac{\sin \theta}{\Omega} [f'' + (f \operatorname{ctg} \theta)' + (1 - \lambda)(2 + \lambda)f] \right\}' + \\ &+ \frac{6\lambda}{\Omega} (f \sin \theta)' + M \sin \theta = 0 \\ &\left( \frac{\sin^3 \theta}{\Omega} \psi' \right)' - 3(1 - \lambda) \frac{\sin^3 \theta}{\Omega} \psi = 0 \end{aligned}$$

Конкретными условиями течения материала определяются краевые условия для системы уравнений (1.7). При  $\lambda = -2$ ,  $\psi = C = 0$  имеем случай радиального течения, рассмотренный в работах [1, 2].

**2. Кручение конической трубы кольцевыми касательными силами, действующими на боковых поверхностях.** Принимаем, что на внутренней и внешней боковых поверхностях длинной конической трубы приложены касательные распределенные нагрузки

$$(2.1) \quad \tau_{\theta\varphi} = q_1 \text{ при } \theta = \alpha, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_2 \text{ при } \theta = \beta$$

При подстановке в (1.5)–(1.7)  $f(\theta) \equiv 0$ ,  $M = H = 0$  получается  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \tau_{r\theta} = 0$ ,  $u = v = 0$ . Второе уравнение (1.7), если опустить индексы при  $\tau_{\theta\varphi}$ , можно написать в виде

$$(2.2) \quad \tau' + 2\tau \operatorname{ctg} \theta + 3\sqrt{1 - \tau^2} = 0$$

$$(2.3) \quad \tau = \psi' [\psi'^2 + (\lambda - 1)^2 \psi^2]^{-1/2}, \quad \lambda \neq 1$$

Решение уравнения (2.2) можно получить в квадратурах. Введением новой функции  $Z(x)$

$$\tau = \frac{Z(x)}{\sqrt{1 + Z^2(x)}}, \quad x = \operatorname{ctg} \theta$$

а затем функции

$$(2.4) \quad Z = \frac{x - y}{1 + xy}, \quad y = \frac{x\sqrt{1 - \tau^2} - \tau}{\sqrt{1 - \tau^2} + x\tau}$$

уравнение (2.2) приводится к линейному дифференциальному уравнению относительно  $x$ , решение которого имеет вид

$$(2.5) \quad 2x(1+y^2)^{1/4} + \int (1+y^2)^{-3/4} dy = \text{const}$$

Полученная квадратура выражается через эллиптический интеграл первого рода. В конечном счете, учитывая первое граничное условие из (2.1), получаем

$$(2.6) \quad \frac{\sqrt{2} \operatorname{ctg} \theta}{T(\tau, \theta)} + F \left[ \arccos T(\tau, \theta), \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = \\ = \frac{\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{T(q_1, \alpha)} + F \left[ \arccos T(q_1, \alpha), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

где обозначено

$$T(x, y) = (x \cos y + \sqrt{1-x^2} \sin y)^{1/2}$$

Использование второго граничного условия в (2.1) дает соотношение

$$(2.7) \quad \frac{\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta}{T(q_2, \beta)} + F \left[ \arccos T(q_2, \beta), \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = \\ = \frac{\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{T(q_1, \alpha)} + F \left[ \arccos T(q_1, \alpha), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Соотношение (2.7) налагает связь на значения  $q_1$  и  $q_2$ , которая должна соблюдаться в предельном состоянии конической трубы.

Из (2.3) определяется  $\psi(\theta)$

$$(2.8) \quad \psi = D \exp \left[ (\lambda - 1) \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{1-\tau^2}} \right]$$

**3. Коническая труба под совместным воздействием нормальных и кольцевых касательных сил.** Положим, что на внутренних и внешних поверхностях длинной конической трубы действуют распределенные нормальные и касательные силы

$$(3.1) \quad \sigma_{\theta} = -p_1, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_1 \quad \text{при } \theta = \alpha; \quad \sigma_{\theta} = -p_2, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_2 \\ \text{при } \theta = \beta$$

Если принять  $f = E/\sin \theta$ ,  $\lambda = 1$ ,  $M = 0$  в соотношениях (1.5)–(1.7), то первое уравнение (1.7) удовлетворится тождественно, а из второго при учете граничного условия на внутренней поверхности получим (индексы у  $\tau_{\theta\varphi}$  опускаем)

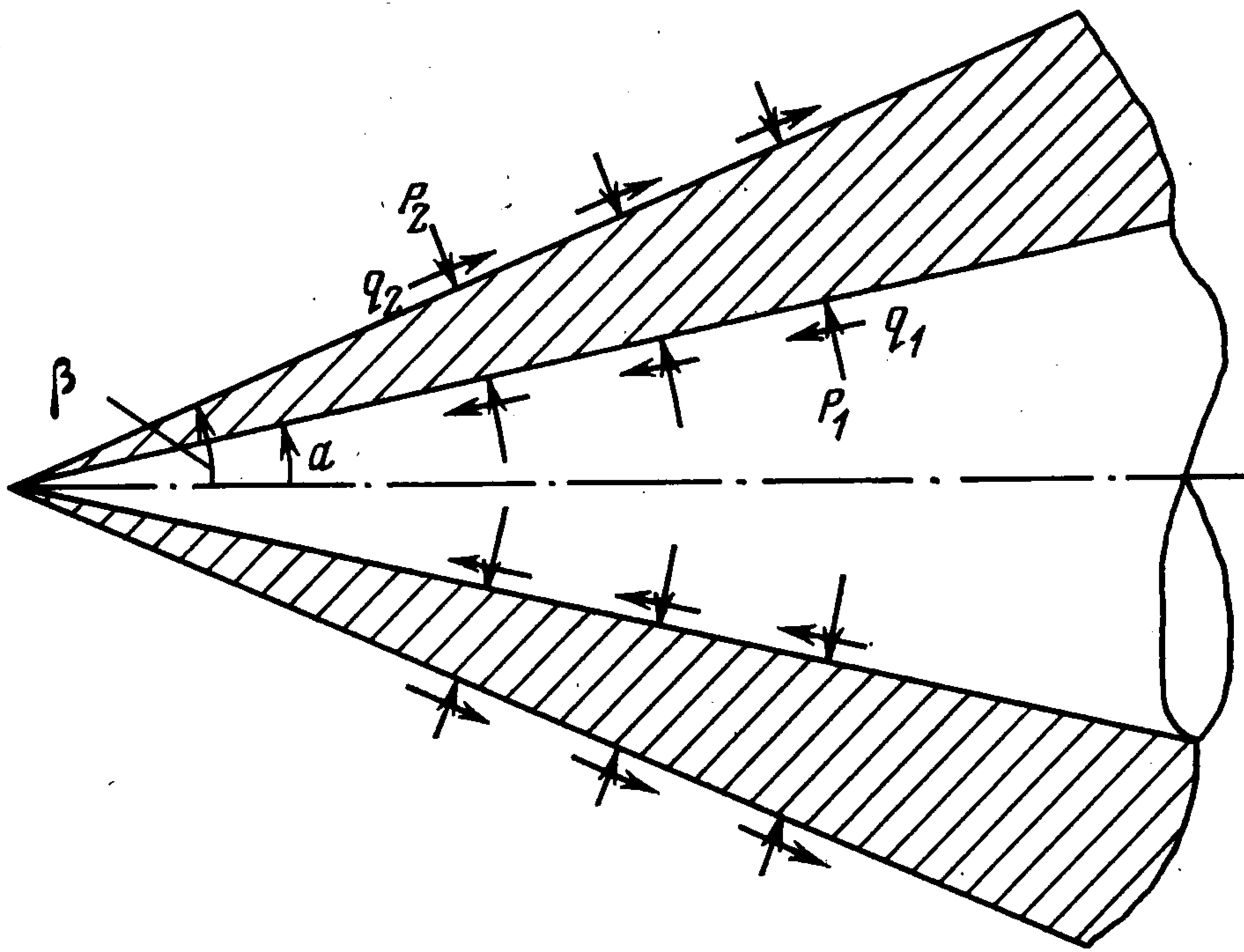
$$(3.2) \quad \tau = \psi' \sin^3 \theta (4E^2 \cos^2 \theta + \psi'^2 \sin^6 \theta)^{-1/2}, \quad \tau = q_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta}$$

Определяя отсюда  $\psi'$ , подставляя в формулы нормальных напряжений (1.5), (1.6) и учитывая граничные условия на внутренней поверхности, будем иметь

$$(3.3) \quad \sigma_r = \sigma_{\theta} + \sqrt{1-\tau^2}, \quad \sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta} + 2\sqrt{1-\tau^2} \\ \sigma_{\theta} = -p_1 + T(\tau, \sin \theta) - T(q_1, \sin \alpha) \\ T(x, y) = \ln [1 + \sqrt{1-x^2}] - \sqrt{1-x^2} + 2 \ln y$$

Условия на внешней поверхности определяют следующие связи между параметрами  $p_i, q_i$ , которые должны соблюдаться в определенном состоянии конической трубы:

$$(3.4) \quad p_1 - p_2 = T(q_2, \sin \beta) - T(q_1, \sin \alpha), \quad q_2 \sin^2 \beta = q_1 \sin^2 \alpha$$



Фиг. 1

Из (3.2) следует

$$(3.5) \quad \psi = \frac{E}{q_1 \sin^2 \alpha} [\sqrt{1 - \tau^2} - \sqrt{1 - q_1^2}] + \text{const}$$

Если учесть значения  $f$ , скорости перемещения будут

$$(3.6) \quad u = 0, \quad v = -\frac{3Er}{\sin \theta}, \quad w = \frac{3Er \sin \theta}{q_1 \sin^2 \alpha} [\sqrt{1 - \tau^2} - \sqrt{1 - q_1^2}] + Gr \sin \theta$$

Из предыдущих формул при  $q_1 = 0$  получаются формулы [3], соответствующие предельному состоянию конической трубы при внутренних и внешних давлениях.

Из полученных формул (3.3), (3.4) при переходе к цилиндрическим координатам, фиксировании  $r \sin \theta$ , при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$  следуют формулы для напряжений

$$(3.7) \quad \sigma_r = -p_1 + T(\tau, r) - T(q_1, a) \\ \sigma_\theta = \sigma_r - 2\sqrt{1 - \tau^2}, \quad \tau_{r\theta} = \tau = q_1 \frac{a^2}{r^2}$$

а из (3.4) получаются соотношения для предельного состояния

$$(3.8) \quad p_1 - p_2 = T(q_2, b) - T(q_1, a), \quad q_2 b^2 = q_1 a^2$$

Формулы (3.7), (3.8) определяют в цилиндрических координатах предельное напряженное состояние цилиндрической трубы, где через  $a$  и  $b$  здесь и в дальнейшем обозначены, соответственно, ее внутренний и внешний радиусы.

Выражения для напряжений (3.7) совпадают с формулами Надаи [6], относящимися к напряжениям в пластической области, окружающей круговую полость в бесконечной плоскости.

**4. Коническая труба под совместным воздействием нормальных и продольных касательных сил (фиг. 1).** Рассмотрим предельное состояние длинной конической трубы, когда на внутренней и внешней боковых поверхностях действуют, соответственно, нормальные давления  $-p_1$ ,  $-p_2$  и касательные, параллельные образующим распределенные силы  $q_1$ ,  $q_2$ .

Принимая в (1.5)–(1.7)  $\psi(\theta) \equiv 0$ ,  $\lambda = M = 0$ , опуская индексы при  $\tau_{r\theta}$ , получим

$$(4.1) \quad \tau = q_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}, \quad \Omega = \frac{2v(f' - f \operatorname{ctg} \theta)}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad v = \operatorname{sign}(f' - f \operatorname{ctg} \theta)$$

Подставляя эти выражения в (1.5) и (1.6) и учитывая условие на внутренней поверхности, находим

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta + \sqrt{1 - \tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + 2\sqrt{1 - \tau^2} \\ \sigma_\theta &= -p_1 + T(\tau, \theta) - T(q_1, \alpha), \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0 \\ T(x, y) &= 2 \ln [1 + \sqrt{1 - x^2}] - 2\sqrt{1 - x^2} + 2 \ln \sin y - \\ &\quad - 3q_1 \sin \alpha \ln \operatorname{tg} y/2 \end{aligned}$$

Удовлетворяя условиям на внешней поверхности  $\theta = \beta$ , приходим к соотношениям, определяющим предельное состояние конической трубы по нагрузкам

$$(4.3) \quad p_1 - p_2 = T(q_2, \beta) - T(q_1, \alpha); \quad q_2 \sin^2 \beta = q_1 \sin^2 \alpha$$

Скорости перемещения можно взять в виде

$$(4.4) \quad u = f' + f \operatorname{ctg} \theta, \quad v = -2f, \quad w = 0$$

Сравнивая формулу для касательного напряжения из (1.5) с выражениями (4.1), приходим к линейному дифференциальному уравнению относительно  $f$

$$(4.5) \quad f'' + \left( \operatorname{ctg} \theta - \frac{2\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \right) f' + \left( 2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{2\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \operatorname{ctg} \theta \right) f = 0$$

общее решение которого будет

$$(4.6) \quad f = C_1 \sin \theta + C_2 \sin \theta \int_{\alpha}^{\theta} \frac{1}{\sin^3 \theta} \exp \left[ 2 \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{1 - \tau^2}} \right] d\theta$$

При  $q_1 = q_2 = 0$  из (4.3) следует формула [3]

$$p_1 - p_2 = 2 \ln \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Решение в [3] соответствует  $\lambda = 1$ ,  $\psi = 0$  и т. д. в рассматриваемом случае, а соответствующее поле скоростей, согласно [3], имеет вид  $u = w = 0$ ,  $v = Nr/\sin \theta$ . Поле скоростей перемещения, соответствующее рассматриваемому здесь случаю  $\lambda = 0$ ,  $\psi = 0$  и т. д. определяется по (4.4), где

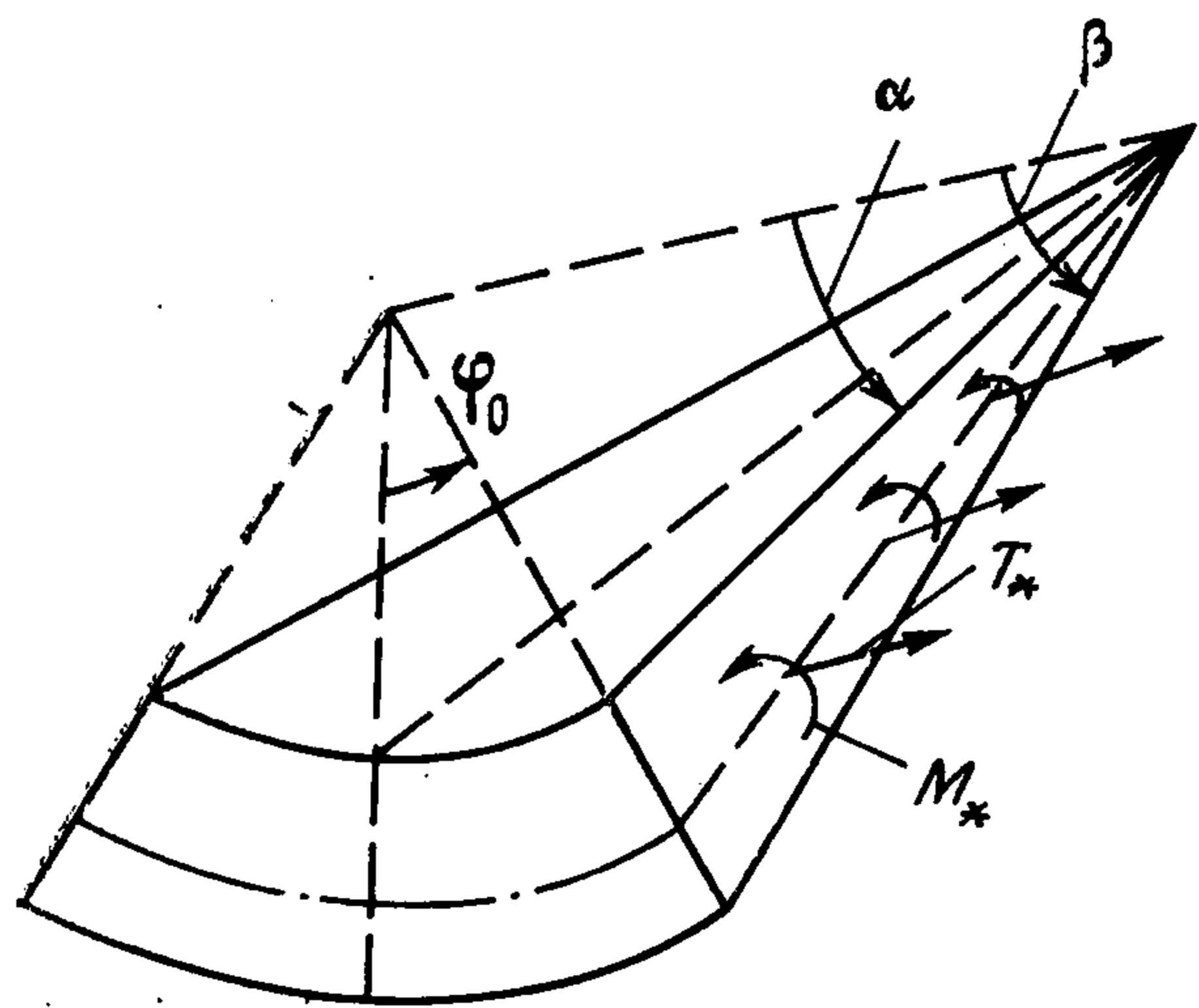
$$(4.7) \quad f = C_1 \sin \theta + C_2 \operatorname{ctg} \theta + \frac{C_2}{4} \sin \theta \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

Переходя к цилиндрическим координатам, фиксируя]  $r \sin \theta$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , из (4.2), (4.3) получим

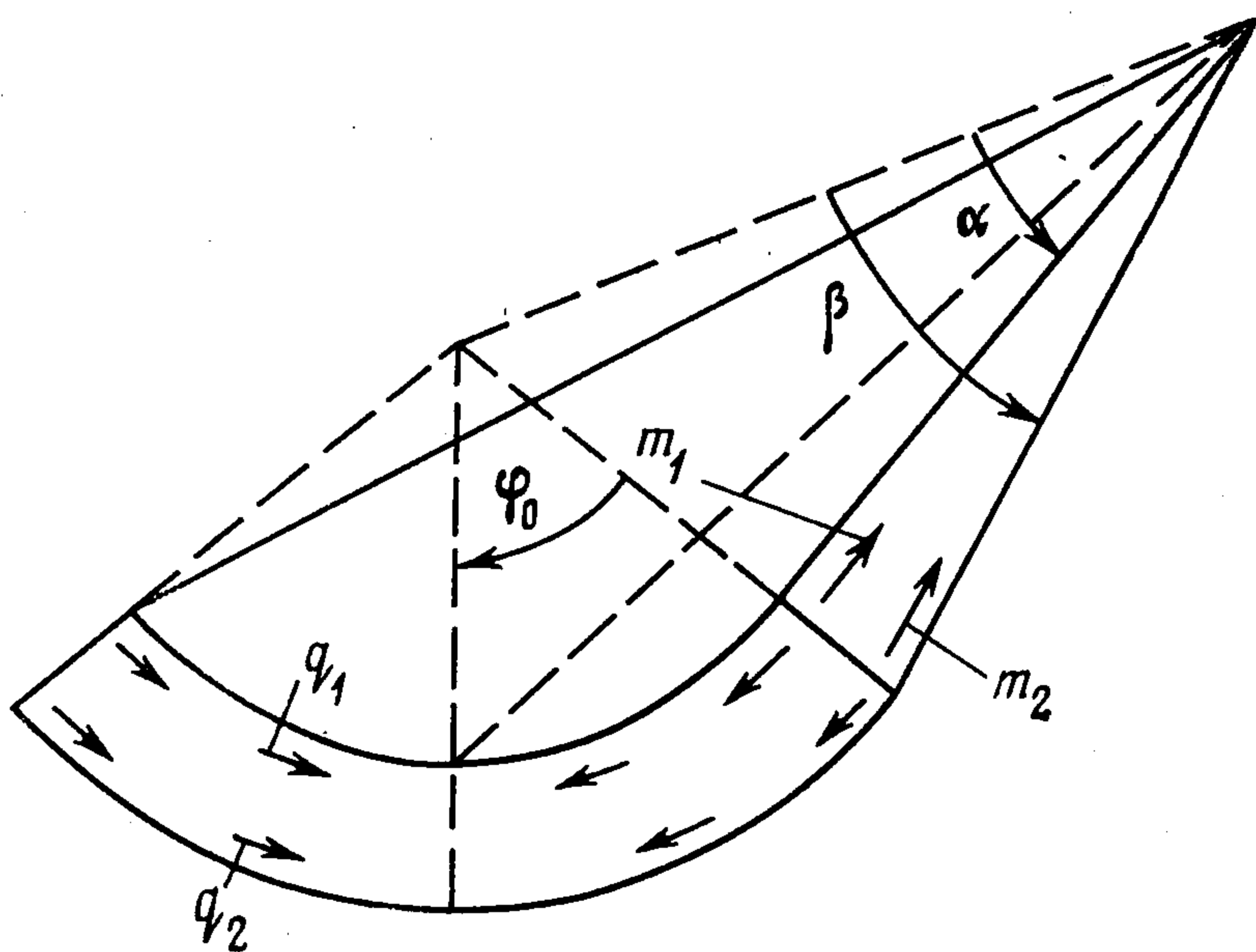
$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_1 + T_0(\tau, r) - T_0(q_1, \alpha) \\ \sigma_\theta &= \sigma_r + 2\sqrt{1 - \tau^2}, \quad \sigma_z = \sigma_r + \sqrt{1 - \tau^2}, \quad \tau_{rz} = \tau = q_1 a/r \\ T_0(x, y) &= 2 \ln [1 + \sqrt{1 - x^2}] - 2\sqrt{1 - x^2} + 2 \ln y \end{aligned}$$

Эти формулы в цилиндрических координатах определяют предельное напряженное состояние цилиндрической трубы под совместным воздействием нормальных давлений и распределенных касательных сил.

**5. Изгиб и растяжение конического листа (фиг. 2).** Пусть лист в виде сектора длинной конической трубы находится в предельном состоянии под совместным воздействием распределенных изгибающих моментов и



Фиг. 2



Фиг. 3

растягивающих усилий, приложенных на осевых торцевых сечениях. Надо определить закон изменения этих сил вдоль образующих.

Поле скоростей перемещения ищем в виде

$$u = 0, \quad v = 3r \left( A \operatorname{ctg} \theta - \frac{B}{\sin \theta} - C \cos \varphi \right)$$

$$w = 3r (A \varphi \sin \theta + C \cos \theta \sin \varphi)$$

Тогда отличные от нуля компоненты скоростей деформации будут

$$\varepsilon_\varphi = -\varepsilon_\theta = \frac{3}{\sin^2 \theta} (A - B \cos \theta)$$

Соответствующие компоненты напряжения определяются из уравнений (1.1) и (1.4)

$$\sigma_r = \sigma_\theta - \nu, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - 2\nu, \quad \sigma_\theta = -H - 2\nu \ln \sin \theta, \quad \nu = \operatorname{sign} \varepsilon_\theta$$

Из условия отсутствия нагрузки на внутренней поверхности следует

$$\sigma_r = \sigma_\theta - 1, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - 2, \quad \sigma_\theta = -2 \ln \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \quad (\alpha \leq \theta \leq \gamma)$$

где  $\theta = \gamma$  — нейтральная поверхность слоя. Учитывая условия на внешней поверхности  $\theta = \beta$ , определим

$$\sigma_r = \sigma_\theta + 1, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + 2, \quad \sigma_\theta = -2 \ln \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \quad \gamma \leq \theta \leq \beta$$

Из условия непрерывности  $\sigma_\theta$  на поверхности  $\theta = \gamma$  определяется

$$\sin^2 \gamma = \sqrt{\sin \alpha \sin \beta}$$

Предельный изгибающий момент относительно оси  $\theta = 0$ , приходящийся на единицу длины, будет

$$M_* = r^2 \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_\varphi \sin \theta d\theta = 4r^2 \ln \left( \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin^{-2} \frac{\gamma}{2} \right)$$

Изгибающие моменты относительно осей, перпендикулярных к оси  $\theta = 0$  и лежащих в осевых торцевых сечениях  $\varphi = \pm \varphi_0$ , равны нулю. Действительно, выражая  $\sigma_\varphi$  из первого уравнения равновесия (1.1) для рассматриваемого случая, получим

$$M^* = r^2 \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_\varphi \cos \theta d\theta = r^2 \sigma_\theta \sin \theta \Big|_{\alpha}^{\beta} = 0$$

Предельное растягивающее усилие в сечениях  $\varphi = \pm\varphi_0$  будет

$$T_* = r \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_{\varphi} d\theta = r \left[ \int_{\gamma}^{\beta} \left(1 - \ln \frac{\sin \beta}{\sin \theta}\right) d\theta - \int_{\alpha}^{\gamma} \left(1 + \ln \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}\right) d\theta \right]$$

Принимая  $\varepsilon_{\varphi} = 0$  на поверхности  $\theta = \gamma$  и закрепляя линию  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \gamma$ , находим

$$\varepsilon_{\varphi} = -\varepsilon_{\theta} = \frac{3B}{\sin^2 \theta} (\cos \gamma - \cos \theta)$$

$$\frac{v}{3Br} = \sin \gamma \cos \varphi - \frac{1 - \cos \gamma \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$u = 0, \quad \frac{w}{3Br} = \varphi \cos \gamma \sin \theta - \sin \gamma \cos \theta \sin \varphi$$

Из полученных формул при переходе к цилиндрическим координатам и фиксировании  $r \sin \theta$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$  получается решение Хилла [7] для изгиба цилиндрического листа (в частности,  $M_* = (b - a)^2/2$ ,  $T_* = 0$ ).

6. Течение пластической массы между шероховатыми коническими поверхностями (фиг. 3). Задача предельного состояния пластического материала, находящегося между жесткими шероховатыми плитами, в условиях плоской деформации впервые исследована в работе Прандтля [8]. Теория течения пластического материала по жестким поверхностям в дальнейшем развита и обобщена в работах [1—7, 9—12, 13].

В работе [11] исследована задача о пластическом течении между жесткими шероховатыми коническими поверхностями. В отличие от рассматриваемой задачи, в которой поперечная скорость смещений считается экспоненциальной функцией азимутальной координаты, в [11] эта скорость принята постоянной по названной координате.

Рассмотрим задачу о течении несжимаемой идеально пластической массы между двумерно-шероховатыми коническими поверхностями при их сближении по закону

$$(6.1) \quad v = \omega_1 r e^{-\mu|\varphi|} \text{ при } \theta = \alpha, \quad v = -\omega_2 r e^{-\mu|\varphi|} \text{ при } \theta = \beta$$

где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\mu$  — заданные постоянные. В силу симметрии рассмотрим область  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ .

Принимаем, что касательные напряжения, возникающие в контактных поверхностях [1, 9], значительно меньше предела текучести материалов при сдвиге и равны соответственно:

$$(6.2) \quad \tau_{r\theta} = m_1, \quad \tau_{\theta\varphi} = q_1, \quad \theta = \alpha$$

$$\tau_{r\theta} = -m_2, \quad \tau_{\theta\varphi} = -q_2, \quad \theta = \beta$$

очевидно, что  $m_i^2 + q_i^2 < 1$ .

Компоненты напряжений и скоростей перемещений ищем в виде

$$(6.3) \quad \sigma_r = \sigma_{\theta} + \frac{6}{\Omega} f', \quad \sigma_{\varphi} = \sigma + \frac{6}{\Omega} (f' - \Phi)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\Omega} (f' + \Phi)', \quad \tau_{\theta\varphi} = \frac{3}{\Omega} \left( \psi' \sin \theta + \frac{\mu f}{\sin \theta} \right)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\mu}{\sin \theta} (f' + \Phi), \quad \Omega = \left[ (f' + \Phi)'^2 + 9 \left( \psi' \sin \theta + \frac{\mu f}{\Omega \sin \theta} \right)^2 + \left( 4 + \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right) (f' + \Phi)^2 + 4(2f' - \Phi)(f' - 2\Phi) \right]^{1/2}$$

$$(6.4) \quad u = r (f' + \Phi) e^{-\mu\varphi}, \quad v = -3r f e^{-\mu\varphi}, \quad w = 3r \psi e^{-\mu\varphi} \sin \theta$$

где  $f$  и  $\psi$  — произвольные функции  $\theta$ , а  $\Phi = f \operatorname{ctg} \theta + \mu\psi$ .

Подставляя (6.3) в дифференциальные уравнения равновесия (1.1) приходим к выражению

$$(6.5) \quad \sigma_\theta = -H + M \ln r - A(\varphi_0 - \varphi) + \\ + 6 \int_\alpha^\theta (f' - \Phi) \frac{\operatorname{ctg} \theta d\theta}{\Omega} - 3 \int_\alpha^\theta \tau_{r\theta} d\theta$$

и к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$(6.6) \quad \left[ \frac{\sin \theta}{\Omega} (f' + \Phi) \right]' + \frac{6 \sin \theta}{\Omega} (f' + \Phi)' + M \sin \theta = 0 \\ \left[ \frac{\sin \theta}{\Omega} (\psi' \sin^2 \theta + \mu f) \right]' - \frac{\mu \sin \theta}{\Omega} (f' + \Phi) + \frac{A}{3} \sin \theta = 0$$

$$(6.7) \quad f = -\omega_1/3 \text{ при } \theta = \alpha, \quad f = \omega_2/3 \text{ при } \theta = \beta$$

$$(6.8) \quad \frac{1}{\Omega} (f' + \Phi)' = \begin{cases} m_1 & \theta = \alpha \\ -m_2 & \theta = \beta \end{cases}, \quad \frac{3}{\Omega} \left( \psi' \sin \theta + \frac{\mu f}{\sin \theta} \right) = \begin{cases} q_1 & \theta = \alpha \\ -q_2 & \theta = \beta \end{cases}$$

Учитывая выражения касательных напряжений (6.3) и вводя обозначение  $B = A + 1/2\mu M$ , находим

$$(6.9) \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau - \frac{\mu}{2 \sin \theta} \tau_{r\theta}, \quad \tau = \frac{B \cos \theta - C}{\sin^2 \theta}$$

Используя граничные условия (6.2), из (6.9) получаем

$$(6.10) \quad B = \left[ q_1 \sin^2 \alpha + q_2 \sin^2 \beta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu (m_1 \sin \alpha + m_2 \sin \beta) \right] (\cos \alpha - \cos \beta)^{-1} \\ C = [q_1 \sin^2 \alpha \cos \beta + q_2 \sin^2 \beta \cos \alpha + 1/2 \mu (m_1 \sin \alpha \times \\ \times \cos \beta + m_2 \sin \beta \cos \alpha)] (\cos \alpha - \cos \beta)^{-1}$$

Соотношение (6.9) можно представить также в виде

$$(6.11) \quad \frac{3}{\Omega} \left( \psi' \sin \theta + \frac{\mu f}{\sin \theta} \right) + \frac{\mu}{2\Omega \sin \theta} (f' + \Phi)' = \tau$$

Уравнение (6.11) совместно с одним из уравнений (6.6) составляет систему дифференциальных уравнений, определяющую функции  $f(\theta)$ ,  $\psi(\theta)$  и постоянные  $A$ ,  $C$  при граничных условиях (6.7) — (6.8).

Вводя новые функции  $\chi = f'/f$ ,  $\Psi = \psi/f$ , можно снизить на единицу порядки этих дифференциальных уравнений. В частном случае, когда  $m_1 = m_2 = 0$ , т. е. конические поверхности в радиальном направлении идеально гладкие, то, полагая

$$(6.12) \quad f' + \Phi = M = 0$$

будем иметь

$$(6.13) \quad B = A = \frac{q_1 \sin^2 \alpha + q_2 \sin^2 \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}, \quad C = \frac{q_1 \sin^2 \alpha \cos \beta + q_2 \sin^2 \beta \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta} \\ \Omega = \frac{6vf'}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad v = \operatorname{sign} f', \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = u = 0$$

$$(6.14) \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau = \frac{q_1 \sin^2 \alpha (\cos \theta - \cos \beta) - q_2 \sin^2 \beta (\cos \alpha - \cos \theta)}{(\cos \alpha - \cos \beta) \sin^2 \theta}$$

Первое уравнение (6.6) превращается в тождество, а из (6.11) приходим к дифференциальному уравнению

$$(6.15) \quad f'' + \left( \operatorname{ctg} \theta - \frac{2\mu\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{1}{\sin \theta} \right) f' - \frac{1+\mu^2}{\sin^2 \theta} f = 0$$

которое при условиях (6.7) определяет  $f(\theta)$ .

Для нормальных напряжений получаем

$$(6.16) \quad \sigma_r = \sigma_\theta + \sqrt{1 - \tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + 2\sqrt{1 - \tau^2}$$

$$\sigma_\theta = -H - A(\varphi_0 - \varphi) + 2 \int_\alpha^\theta \sqrt{1 - \tau^2} \operatorname{ctg} \theta d\theta$$

Учитывая, что торцевые сечения слоя  $\varphi = \pm\varphi_0$  свободны от нагрузки, получим условие равенства нулю суммы моментов сил относительно оси  $\theta = 0$ , действующих на произвольной части слоя между сечением  $\varphi$  и  $\varphi_0$  длиной  $dr$

$$(6.17) \quad \int_\alpha^\beta \sigma_\varphi \sin \theta d\theta + (q_1 \sin \alpha + q_2 \sin \beta)(\varphi_0 - \varphi) = 0$$

Отсюда определяется

$$(6.18) \quad H = \frac{2}{\cos \alpha - \cos \beta} \int_\alpha^\beta \sqrt{1 - \tau^2} \frac{1 - \cos \beta \cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

Давление на контактной поверхности  $\theta = \alpha$ , действующее на единицу длины, будет равно

$$(6.19) \quad p_\alpha = -2r \sin \alpha \int_0^{\varphi_0} (\sigma_\theta \cos \varphi - \tau_{\theta\varphi} \sin \varphi)_{\theta=\alpha} d\varphi$$

из которого следует

$$(6.20) \quad p_\alpha = 2r \sin \alpha [H \sin \varphi_0 + (1 - \cos \varphi_0)(A + q_1)]$$

Переходя к цилиндрическим координатам и фиксируя  $r \sin \theta$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , из (6.14), (6.16), (6.18), (6.19) получим

$$(6.21) \quad \sigma_r = -H_* - 2A_*(\varphi_0 - \varphi) + 2 \int_a^r \sqrt{1 - \tau^2} \frac{dr}{r}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + 2\sqrt{1 - \tau^2}, \quad \sigma_z = \sigma_r + \sqrt{1 - \tau^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau = A_* - \frac{B_*}{r^2}, \quad H_* = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b \sqrt{1 - \tau^2} (b^2 + r^2) \frac{dr}{r}$$

$$A_* = \frac{q_1 a^2 + q_2 b^2}{b^2 - a^2}, \quad B_* = \frac{(q_1 + q_2) a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

$$(6.22) \quad p_\alpha = 2a [H_* \sin \varphi_0 + (1 - \cos \varphi_0)(A_* + q_1)]$$

Эти формулы определяют в цилиндрических координатах предельное напряженное состояние цилиндрического слоя при его сжатии между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями  $u = u_1 e^{-\mu|\varphi|}$  при  $r = a$ ,  $u = -u_2 e^{-\mu|\varphi|}$  при  $r = b$ . Если перейти к прямоугольным координатам при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ , из (6.21) следуют формулы Прандтля [8] для предельного состояния прямоугольного слоя при его сжатии параллельными шероховатыми плитами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1968. 608 с.
2. Shield R. T. Plastic flow in a converging conical channel. — J. Mech. and Phys. Solids, 1955, v. 3, No. 4, p. 246—258. — Рус. перев.: Механика. Сб. переводов и обзоров иностр. период. лит-ры, 1956, № 3, с. 140—150.
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. Ивлев Д. Д. Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния. — Тр. НИИ математики ВГУ. Воронеж, 1973, вып. 10, с. 1—3.

5. *Ершов Л. В., Ивлев Д. Д., Романов А. В.* Об обобщениях решения Л. Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами. Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 137—144.
6. *Nadai A.* Über die Gleit- und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körper.— *Z. Phys.*, 1924, В. 30, Н. 2, S. 106—138.
7. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
8. *Prandtl L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht.— *Z. angew. Math. und Mech.*, 1923, В. 3, S. 401—406.
9. *Ильюшин А. А.* Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям.— *ПММ*, 1954, т. 18, вып. 3, с. 265—288.
10. *Григорян С. С.* Об одной задаче Л. Прандтля и теории течения пластического вещества по поверхностям.— *Докл. АН СССР*, 1981, т. 257, № 5, с. 1075—1076.
11. *Ивлев Д. Д.* Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах.— *Докл. АН СССР*, 1958, т. 123, № 6, с. 988—990.
12. *Ивлев Д. Д.* Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности.— *Изв. АН СССР. ОТН*, 1958, № 11, с. 107—109.
13. *Задоян М. А.* Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности.— *Докл. АН СССР*, 1964, т. 156, № 1, с. 38—39.

Ереван

Поступила в редакцию  
3.II.1982