УДК 539.375

АСИМПТОТИКА ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ

Журавлев В. П., Назаров С. А., Шойхет Б. А.

Изучается асимптотика решения задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел в окрестности вершины трещины. Получены асимптотические представления напряжений и перемещений. Оказывается, что для напряжений эти представления совпадают с соответствующими представлениями в классической теории упругости, а для перемещений — отличаются добавочными слагаемыми. Полученные формулы для перемещений обобщают результаты работ [1—3], в которых проверено совпадение асимптотик напряжений в задачах ползучести и упругости для однородного материала.

1. Пусть Ω — плоская связная область с гладкой границей, содержащая разрез $\Gamma=\{\mathrm{x}\mid x_2=0,\ a\leqslant x_1\leqslant b\}$. Уравнения плоской деформации в декартовых координатах получаются из уравнений трехмерной задачи [4] подстановкой условий (далее всюду $i,\ j=1,\ 2$)

$$u_i(t, x_1, x_2, x_3)=u_i(t, x_1, x_2),\ u_3=0;\ \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\mathrm{u})\equiv(u_{i,j}+u_{j,i})/2 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij,j}(t, \mathrm{x})+f_i(t, \mathrm{x})=0,\ \mathrm{x}\in\Omega\setminus\Gamma \tag{1.2}$$

$$\frac{s_{ij}(t, \mathrm{x})}{2G[t+\varkappa(\mathrm{x}), \mathrm{x}]}=e_{ij}(t, \mathrm{x})-\int_0^t R_1[t+\varkappa(\mathrm{x}), \tau+\varkappa(\mathrm{x}), \mathrm{x}]\, e_{ij}(\tau, \mathrm{x})\, d\tau \tag{1.3}$$

$$\frac{\sigma(t, \mathrm{x})}{E_*[t+\varkappa(\mathrm{x}), \mathrm{x}]}=e(t, \mathrm{x})-\int_0^t R_2[t+\varkappa(\mathrm{x}), \tau+\varkappa(\mathrm{x}), \mathrm{x}]\, e(\tau, \mathrm{x})\, d\tau$$

$$e=(e_{11}+e_{22})/3,\ \varepsilon_{ij}=\delta_{ij}e+e_{ij},\ \sigma_{ij}=\delta_{ij}\sigma+s_{ij} \tag{1.4}$$

$$u_i=0,\ \mathrm{x}\in S_u;\ \sigma_{ij}n_j=P_i(t, \mathrm{x}),\ \mathrm{x}\in S_p;\ S_n\cup S_p=\partial\Omega \tag{1.5}$$

$$\sigma_{12}=g_1^{\pm}(t, \mathrm{x}),\ \sigma_{22}=g_2^{\pm}(t, \mathrm{x}),\ \mathrm{x}\in\Gamma^{\pm}$$

Здесь u_i, σ_{ij}, ε_{ij}— декартовы компоненты перемещений, напряжений и деформаций соответственно, s_{ij}, e_{ij} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций, σ, e,— их шаровые части, $E_*(t, \mathrm{x})$, $R_2(t, \tau, \mathrm{x})$ — модуль объемного расширения и ядро релаксации при всестороннем растяжении (сжатии), $G(t, \mathrm{x})$, $R_1(t, \tau, \mathrm{x})$ — модуль сдвига и ядро релаксации при сдвиге, $\varkappa(\mathrm{x})$ — функция неоднородного старения, характеризующая закон изменения возраста материала, f_i, P_i, $g_i^{\pm}$ — объемные и поверхностные нагрузки.

Решение будем рассматривать на произвольном отрезке времени $[0, T]$. Сформулируем ограничения, при которых существует решение задачи ползучести. Пусть при $\forall t$ нагрузки f_i, P_i, $g_i^{\pm}$ суммируемы с квадратом и кусочно непрерывны по t (т. е. допускаются мгновенные изменения нагрузки в отдельные моменты времени) как отображения отрезка $[0, T]$ в пространства L_2, модули E_*, G непрерывны по t, кусочно непрерывны по x и удовлетворяют оценкам

$$E_1\leqslant E_*\leqslant E_2,\ G_1\leqslant G\leqslant G_2,\ E_1,\ E_2,\ G_1,\ G_2=\mathrm{const}>0$$

Ядра релаксации R_i представимы в виде

$$R_i(t, \tau, \mathbf{x}) = p_i(t, \tau, \mathbf{x})(t-\tau)^{-\alpha} + q_i(t, \tau, \mathbf{x}), \ \alpha < 1 \tag{1.6}$$

где p_i, q_i ограничены, непрерывны по t, τ, кусочно непрерывны по $\mathbf{x}$, функция $\varkappa(\mathbf{x})$ ограничена и кусочно непрерывна. Известно [5], что при этих ограничениях существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)—(1.5). Из хода доказательства этого утверждения в [5] и известных результатов [6] о гладкости решения эллиптических систем следует локальная гладкость решения задачи ползучести по координатам $\mathbf{x}$ в подобластях регулярности правой части и реологических характеристик.

2. Для определенности, решение будем изучать в окрестности U правой вершины трещины $\mathbf{x}_B$. Предполагается, что функции E_*, G, p_i, q_i гладкие по совокупности аргументов t, τ, $\mathbf{x}$ при $t, \tau \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in U$. Функции f_i гладкие по $\mathbf{x}$ при $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in U$, функции $g_i^\pm$ гладкие по $\mathbf{x}$ при $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in U \cap \Gamma^\pm$, причем

$$g(t, \mathbf{x}_B) \equiv g_i^+(t, \mathbf{x}_B) = g_i^-(t, \mathbf{x}_B), \quad t \in [0, T] \tag{2.1}$$

(Под гладкостью здесь понимается наличие достаточного числа непрерывных производных, причем предполагается, что производные функций f_i, g_i по пространственным координатам кусочно непрерывны по t, как отображения отрезка $[0, T]$ в пространство непрерывных функций.) Тогда решение гладкое в области $U \setminus D_d$, где D_d — круг радиуса d с центром в $\mathbf{x}_B$, d произвольно. Выберем d так, чтобы $D_{2d} \subset U$, и введем срезающую гладкую функцию $\chi(\mathbf{x})$ так, чтобы $\chi = 1$ при $\mathbf{x} \in D_{d/2}$, $\chi = 0$ при $\mathbf{x} \notin D_d$. Пусть (r, θ) — полярные координаты с началом в $\mathbf{x}_B$ и полярной осью, направленной по отрезку Γ так, что на $\Gamma^\mp$ имеют место равенства $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ соответственно.

Введем обозначения для «замороженных» в вершине $\mathbf{x}_B$ трещины реологических характеристик

$$G^\circ(t) \equiv G[t + \varkappa(\mathbf{x}_B), \mathbf{x}_B], \quad E_*^\circ(t) = E_*[t + \varkappa(\mathbf{x}_B), \mathbf{x}_B]$$

$$\nu \equiv (E_* - 2G)/(2G + 2E_*), \qquad k \equiv 3 - 4\nu$$

$$\nu^\circ(t) \equiv \nu[t + \varkappa(\mathbf{x}_B), \mathbf{x}_B], \quad k^\circ(t) \equiv k[t + \varkappa(\mathbf{x}_B), \mathbf{x}_B]$$

$$R_i^\circ(t, \tau) \equiv R_i[t + \varkappa(\mathbf{x}_B), \tau + \varkappa(\mathbf{x}_B), \mathbf{x}_B]$$

Теорема. При сделанных предположениях справедливы асимптотические представления решения задачи ползучести ($\mathbf{l}$ — смещение тела как жесткого целого)

$$\mathbf{u}(t, r, \theta) = \left\| \begin{matrix} u_r(t, r, \theta) \\ u_\theta(t, r, \theta) \end{matrix} \right\| = r^{1/2}[C_1(t)\boldsymbol{\psi}^1(t, \theta) + C_2(t)\boldsymbol{\psi}^2(t, \theta) + \tag{2.2}$$

$$+ A_1(t)\boldsymbol{\xi}^1(\theta) + A_2(t)\boldsymbol{\xi}^2(\theta)]\chi(r) + \mathbf{o}(r) + \mathbf{l}(t, \mathbf{x})$$

$$\boldsymbol{\psi}^1(t, \theta) = \left\| \begin{matrix} \psi_r^1(t, \theta) \\ \psi_\theta^1(t, \theta) \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} [2k^\circ(t) - 1]\sin\theta/2 + \sin 3\theta/2 \\ [2k^\circ(t) + 1]\cos\theta/2 + \cos 3\theta/2 \end{matrix} \right\|$$

$$\boldsymbol{\psi}^2(t, \theta) = \left\| \begin{matrix} \psi_r^2(t, \theta) \\ \psi_\theta^2(t, \theta) \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} [2k^\circ(t) - 1]\cos\theta/2 + 3\cos 3\theta/2 \\ -[2k^\circ(t) + 1]\sin\theta/2 - 3\sin 3\theta/2 \end{matrix} \right\|$$

$$\boldsymbol{\xi}^1(\theta) = \left\| \begin{matrix} \xi_r^1(\theta) \\ \xi_\theta^1(\theta) \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} \sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{matrix} \right\|, \quad \boldsymbol{\xi}^2(\theta) = \left\| \begin{matrix} \xi_r^2(\theta) \\ \xi_\theta^2(\theta) \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} \cos\theta/2 \\ -\sin\theta/2 \end{matrix} \right\|$$

$$\mathbf{l}(t, \mathbf{x}) = \left\| \begin{matrix} l_1(t, \mathbf{x}) \\ l_2(t, \mathbf{x}) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1(t) + b(t)x_2 \\ a_2(t) - b(t)x_1 \end{matrix} \right\|$$

(2.3) $$\sigma_{rr}(t, r, \theta) = 2G^\circ(t) r^{-1/2}[B_1(t)(5/2 \sin\theta/2 + 1/2 \sin 3\theta/2) + B_2(t)(5/2\cos\theta/2 + 3/2\cos 3\theta/2)]\chi(r) + o(1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(t, r, \theta) = 2G^\circ(t) r^{-1/2}[B_1(t)(3/2\sin\theta/2 - 1/2\sin 3\theta/2) + B_2(t)(3/2\cos\theta/2 - 3/2\cos 3\theta/2)]\chi(r) + o(1)$$

$$\sigma_{r\theta}(t, r, \theta) = 2G^\circ(t) r^{-1/2}[B_1(t)(-\cos\theta/2 + \cos 3\theta/2) + B_2(t)(\sin\theta/2 - 3\sin 3\theta/2)]\chi(r) + o(1)$$

В (2.2) коэффициенты $A_i(t)$ определяются через $C_i(t)$ из решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

(2.4) $$A_i(t) + \frac{2[1+\nu^\circ(t)]}{3}\int_0^t Z(t, \tau)A_i(\tau)\,d\tau - \int_0^t R_1^\circ(t, \tau)A_i(\tau)\,d\tau + \frac{8[1+\nu^\circ(t)]}{3}\int_0^t Z(t, \tau)[1-2\nu^\circ(\tau)]C_i(\tau)\,d\tau - 8\int_0^t R_1^\circ(t, \tau)[\nu^\circ(t) - \nu^\circ(\tau)]C_i(\tau)\,d\tau = 0$$

$$Z(t, \tau) = R_1^\circ(t, \tau) - R_2^\circ(t, \tau)$$

В (2.3) коэффициенты $B_i(t)$ выражаются через $C_i(t)$ формулами

$$B_i(t) = C_i(t) - \int_0^t R_1^\circ(t, \tau)C_i(\tau)\,d\tau$$

Формулы (2.2) допускают почленное дифференцирование.

Замечания 1°. Асимптотические представления напряжений (2.3) совпадают с соответствующими представлениями упругой задачи [7, 8].

2°. Если ядра объемной и сдвиговой релаксаций совпадают в вершине трещины и коэффициент Пуассона $\nu^\circ = \mathrm{const}$, то из (2.4) следует $A_i \equiv 0$ и представления (2.2) совпадают с соответствующими представлениями упругой задачи. В случае однородной области этот результат прямо следует из теорем Н. Х. Арутюняна [9—11].

Доказательство. Пусть B — банахово пространство, обозначим через $L^\infty(0, t; B)$ пространство отображений Z отрезка $[0, t]$ в B, наделенное нормой

$$|Z, B, t| = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|Z(\tau), B\|$$

Тогда из сделанных выше предположений следуют включения

$$f_i \in L^\infty[0, T;\ L_2(\Omega)],\ P_i \in L^\infty[0, T;\ L_2(S_p)],\ g_i^\pm \in L^\infty[0, T;\ L_2(\Gamma^\pm)]$$

Пусть $v_i \equiv u_i\chi$, тогда v_i совпадают с u_i в области $D_{d/2}$, равны нулю вне D_d, гладкие вне области $D_{d/2}$. Обозначим через $\sigma_{ij}(\mathbf{v})$ напряжения задачи ползучести, соответствующие перемещениям $\mathbf{v}$, т. е. полученные подстановкой $\mathbf{v}$ в (1.1), (1.3), и по определению положим $F_i \equiv -\sigma_{ij,j}(\mathbf{v})$, $Q_i^\pm = \sigma_{i2}^\pm(\mathbf{v})$. Очевидно, в круге $D_{d/2}$ справедливы равенства $\sigma_{ij}(\mathbf{v}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u})$, $F_i = f_i$, $Q_i^\pm = g_i^\pm$ и функции F_i, $Q_i^\pm$ гладкие вне круга $D_{d/2}$.

Граница ∂D_{2d} круга D_{2d} образует прямые углы с $\Gamma^\pm$, «скруглим» эти углы, вписав в них малые дуги, гладко касающиеся $\Gamma^\pm$ и ∂D_{2d}. Получившийся контур γ состоит из отрезков берегов трещины, дуг скругления и части границы ∂D_{2d}. Область, ограниченную контуром γ, обозначим ω.

Функции $\mathbf{v}$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{v})$ — решение задачи ползучести в области ω при объемных нагрузках $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ и поверхностных нагрузках $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, причем $Q_i = \mp Q_i^\pm$ на $\gamma \cap \Gamma^\pm$, $Q_i = 0$ на $\gamma \setminus (\Gamma^+ \cup \Gamma^-)$.

Обозначим через $H(\Omega)$ пространство С. Л. Соболева, а норму функции v в $H^k(\Omega)$ — через $\| v; H^k(\Omega) \|$. Следуя [12, 13], обозначим через $V_\beta^k(\omega)$ пространство функций v в ω с нормой

$$\| v; V_\beta^k(\omega) \| = \sum_{j=0}^{k} \| r^{\beta+j-k} v; H^j(\omega) \|, \quad k = 0, 1, \ldots$$

где β — вещественное число. Через $V_\beta^{k-1/2}(\gamma)$ будем обозначать пространство следов на γ функций из $V_\beta^k(\omega)$.

Для краткости запишем уравнения задачи ползучести в перемещениях в операторной форме

$$\mathbf{L}\mathbf{v} - \mathbf{L}^R\mathbf{v} + \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega; \quad \mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{B}^R\mathbf{v} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{x} \in \gamma \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{L}$ — оператор уравнений равновесия упругомгновенной задачи, $\mathbf{L}^R$ — оператор, содержащий все интегральные слагаемые, $\mathbf{B}\mathbf{v}$ — вектор упругомгновенных поверхностных напряжений, $\mathbf{B}^R\mathbf{v}$ — интегральные слагаемые вектора поверхностных напряжений.

Решение задачи (2.5), как обычно, ищем в виде ряда

$$\mathbf{v}(t, r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}^n(t, r, \theta) \tag{2.6}$$

коэффициенты которого удовлетворяют краевым задачам с параметром $t \in [0, T]$

$$\mathbf{L}\mathbf{v}^1 + \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega; \quad \mathbf{B}\mathbf{v}^1 = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{x} \in \gamma \tag{2.7}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{v}^n + \mathbf{F}^{n-1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega; \quad \mathbf{B}\mathbf{v}^n = \mathbf{Q}^{n-1}, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{2.8}$$

$$\mathbf{F}^{n-1} \equiv -\mathbf{L}^R\mathbf{v}^{n-1}, \quad \mathbf{Q}^{n-1} = \mathbf{B}^R\mathbf{v}^{n-1}$$

Известно [5], что при сделанных предположениях ряд (2.6) сходится в $L^\infty[0, T; H^1(\omega)]$ к обобщенному решению задачи (2.5).

Первое слагаемое ряда — это решение упругомгновенной задачи, а следующие слагаемые определяются из решения уравнений задачи упругости с правой частью, зависящей от предыдущего приближения; можно показать, что на каждом шаге выполнены условия равновесия, обеспечивающие при каждом t разрешимость задачи упругости.

Рассмотрим задачу (2.7) при любом $t \in [0, T]$ в предположении, что $\mathbf{F}$, $\mathbf{Q}$ — произвольные удовлетворяющие условиям равновесия воздействия, представимые в виде

$$\mathbf{F} = r^{-3/2} m (A_1 \zeta^1 + A_2 \zeta^2)\chi + \mathbf{F}^* \tag{2.9}$$

$$\zeta^1 = \left\| \begin{matrix} \zeta_r^1 \\ \zeta_\theta^1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sin\theta/2 \\ -\cos\theta/2 \end{matrix} \right\|, \quad \zeta^2 = \left\| \begin{matrix} \zeta_r^2 \\ \zeta_\theta^2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{matrix} \right\|$$

$$\mathbf{Q} = \left\| \begin{matrix} Q_r \\ Q_\theta \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} Q_r^* - \alpha_1 \chi \cos\theta/2 \\ Q_\theta^* - (2mA_2 r^{-1/2} + \alpha_2 \cos\theta/2)\chi \end{matrix} \right\|$$

$$\mathbf{F}^* \in \mathring{V}_{-\delta}(\omega), \quad \mathbf{Q}^* \in V_{-\delta}^{1/2}(\gamma), \quad \delta > 0, \quad m = m(t) \equiv \frac{G^\circ(t)}{2[1 - 2\nu^\circ(t)]}$$

(A_1, A_2, α_1, α_2 — постоянные). Решение определено с точностью до смещения тела как жесткого целого, поэтому наложим дополнительные ограничения

$$\int_\omega \mathbf{v}\, d\omega = 0, \quad \int_\omega \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\omega = 0 \tag{2.10}$$

Имеет место следующий результат, вытекающий из [12, 13] (достаточно подробная интерпретация результатов [12, 13] об общих эллиптических краевых задачах в областях с коническими точками применительно к теории упругости содержится в [14, 15]). Задача (2.7), (2.10) при условиях (2.9) однозначно разрешима, и решение представимо в виде

$$\mathbf{v} = r^{1/2}(C_1\boldsymbol{\psi}^1 + C_2\boldsymbol{\psi}^2 + A_1\boldsymbol{\xi}^1 + A_2\boldsymbol{\xi}^2)\chi + \mathbf{l}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in V^2_{-\delta}(\omega) \tag{2.11}$$

$$l_1(\mathbf{x}) = a_1 + bx_2, \; l_2(\mathbf{x}) = a_2 - bx_1$$

где C_1, C_2, a_1, a_2, b — постоянные, и справедлива оценка

$$|||\mathbf{v}||| \equiv \sum_{i=1}^{2}(|C_i| + |a_i|) + |b| + \|\mathbf{w}, V^2_{-\delta}(\omega)\| \leqslant \tag{2.12}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{2}|A_i| + |\alpha_i| + \|\mathbf{F}^*, \overset{\circ}{V}_{-\delta}(\omega)\| + \|\mathbf{Q}^*, V^{1/2}_{-\delta}(\gamma)\|\Big)$$

Здесь и далее буквой C обозначаются различные постоянные, зависящие только от области ω, числа δ и коэффициентов операторов. Отметим, что $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ — смещение тела как жесткого целого, так что на $\mathbf{l}$ операторы $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^R$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^R$ обращаются в нуль.

Рассмотрим первый шаг итерационного процесса. Ввиду гладкости $\mathbf{F}$ имеет место включение $\mathbf{F} \in V_{-\delta}{}^{\circ}(\omega)$ при любом $\delta < 1$. Ввиду (2.1) разность $Q_i^{\pm} - g_i$ имеет порядок $o(r)$, и поэтому принадлежит $V_{-\delta}{}^{1/2}(\gamma)$ при любом $\delta < 1$. Следовательно, правые части в (2.7) имеют вид (2.9)

$$A_1 = A_2 = 0, \quad \alpha_i = g_i(t), \quad Q_r{}^* = -Q_1 + \alpha_1\chi\cos\theta/2, \quad Q_\theta{}^* = -Q_2 + \alpha_2\chi\cos\theta/2$$

Согласно (2.11), (2.12), при $\forall t \in [0, T]$ решение $\mathbf{v}^1$ представимо в виде

$$\mathbf{v}^1 = r^{1/2}(C_1{}^1\boldsymbol{\psi}^1 + C_2{}^1\boldsymbol{\psi}^2)\chi + \mathbf{l}^1 + \mathbf{w}^1 \tag{2.13}$$

$$l_1{}^1 = a_1{}^1 + b^1x_2, \; l_2{}^1 = a_2{}^1 - b^1x_1$$

и справедлива оценка

$$|||\mathbf{v}^1(t, \cdot)||| \equiv \sum_{i=1}^{2}(|C_i{}^1(t)| + |a_i{}^1(t)|) + |b^1(t)| +$$

$$+ \|\mathbf{w}^1(t, \cdot), V^2_{-\delta}(\omega)\| \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{2}|g_i(t)| + \|\mathbf{F}(t, \cdot), \overset{\circ}{V}_{-\delta}(\omega)\| +$$

$$+ \|\mathbf{Q}^*(t, \cdot), V^{1/2}_{-\delta}(\gamma)\|\Big)$$

Из этой оценки следует, что

$$|||\mathbf{v}^1, t||| \leqslant CI(t), \quad I(t) \equiv \sum_{i=1}^{2}|g_i, R^1, t| + |\mathbf{F}, \overset{\circ}{V}_{-\delta}(\omega), t| + \tag{2.14}$$

$$+ |\mathbf{Q}^*, V^{1/2}_{-\delta}(\gamma), t|$$

Конечность введенной в (2.14) величины I следует из предположений о кусочной непрерывности нагрузок по времени.

Прежде чем рассмотреть второй шаг итерационного процесса, приведем вспомогательные выкладки.

Обозначим через $\mathbf{L}^\circ$, $L^{R\circ}$, B°, $B^{R\circ}$ главные части операторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^R$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^R$ с замороженными в $\mathbf{x}_B$ коэффициентами. Можно проверить, что для функций специального вида — $v_r = \varphi_r(t, \theta)r^{1/2}$, $v_\theta = \varphi_\theta(t, \theta)r^{1/2}$ — имеют место соотношения

$$\mathbf{L}^\circ\mathbf{v} = \left\|\begin{matrix} L_r{}^\circ\mathbf{v} \\ L_\theta{}^\circ\mathbf{v}\end{matrix}\right\| = r^{-3/2}G^\circ\left\|\begin{matrix}\varphi_r{}^{\cdot\cdot} - {}^3/_2\alpha\varphi_r + \beta_-\varphi_\theta{}^{\cdot} \\ 2\alpha\varphi_\theta{}^{\cdot\cdot} - {}^3/_4\varphi_\theta + \beta_+\varphi_r{}^{\cdot}\end{matrix}\right\| \tag{2.15}$$

$$\mathbf{L}^{R^\circ}\mathbf{v}=\left\|\begin{matrix}L_r^{R^\circ}\mathbf{v}\\ L_\theta^{R^\circ}\mathbf{v}\end{matrix}\right\|=r^{-3/2}G^\circ\left\|\begin{matrix}N\varphi_r{}^{\cdot\cdot}-{}^3/_2\alpha N\varphi_r+\beta_-N\varphi_\theta{}^{\cdot}\\ 2\alpha N\varphi_\theta{}^{\cdot\cdot}-{}^3/_4N\varphi_\theta+\beta_+N\varphi_r{}^{\cdot}\end{matrix}\right\|+$$

$$+r^{-3/2}\frac{E_*}{6}\left\|\begin{matrix}{}^3/_2S\varphi_r+S\varphi_\theta{}^{\cdot}\\ -3S\varphi_r{}^{\cdot}-2S\varphi_\theta{}^{\cdot\cdot}\end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{B}^\circ\mathbf{v}=\left\|\begin{matrix}B_r{}^\circ\mathbf{v}\\ B_\theta{}^\circ\mathbf{v}\end{matrix}\right\|=-r^{-1/2}\cos\frac{\theta}{2}G^\circ\left\|\begin{matrix}\varphi_r{}^{\cdot}-{}^1/_2\varphi_\theta\\ \gamma\varphi_r+2\alpha\varphi_\theta{}^{\cdot}\end{matrix}\right\|,\quad\theta=0,\,2\pi$$

$$\mathbf{B}^{R^\circ}\mathbf{v}=\left\|\begin{matrix}B_r^{R^\circ}\mathbf{v}\\ B_\theta^{R^\circ}\mathbf{v}\end{matrix}\right\|=-r^{-1/2}\cos\frac{\theta}{2}G^\circ\left\|\begin{matrix}N\varphi_r{}^{\cdot}-{}^1/_2N\varphi_\theta\\ \gamma N\varphi_r+2\alpha N\varphi_\theta{}^{\cdot}\end{matrix}\right\|+$$

$$+r^{-1/2}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{E_*}{6}\left\|\begin{matrix}0\\ 3S\varphi_r+2S\varphi_\theta{}^{\cdot}\end{matrix}\right\|,\quad\theta=0,\,2\pi$$

$$\alpha=\frac{1-\nu^\circ}{1-2\nu^\circ},\quad\beta_\pm=\frac{1\pm2k^\circ}{2(1-2\nu^\circ)},\quad\gamma=\frac{2-\nu^\circ}{1-2\nu^\circ}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по θ, а N, S — интегральные операторы, задаваемые формулами

$$(2.16)\qquad N\varphi(t,\theta)=\int_0^t R_1{}^\circ(t,\tau)\,\varphi(\tau,\theta)\,d\tau,\quad S\varphi(t,\theta)=\int_0^t Z(t,\tau)\,\varphi(\tau,\theta)\,d\tau$$

Заметим, что второе выражение (2.15) для $\mathbf{L}^{R^\circ}$ состоит из двух слагаемых, первое из которых может быть формально получено из первого выражения (2.15) для $\mathbf{L}^\circ$ заменой функций φ_r, φ_θ на функции $N\varphi_r$ и $N\varphi_\theta$; то же относится и к последним двум представлениям (2.15) для $\mathbf{B}^{R^\circ}$ и $\mathbf{B}^\circ$. Это обстоятельство облегчает выкладки.

Пусть $C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные функции времени. Вычисления с использованием (2.15) показывают, что

$$(2.17)\qquad \mathbf{L}^{R^\circ}(r^{1/2}C_1\psi^1)=r^{-3/2}MC_1\zeta^1,\quad \mathbf{B}^{R^\circ}(r^{1/2}C_1\psi^1)=0$$

$$\mathbf{L}^{R^\circ}(r^{1/2}C_2\psi^2)=r^{-3/2}MC_2\zeta^2,\quad \mathbf{B}^{R^\circ}(r^{1/2}C_2\psi^2)=\left\|\begin{matrix}0\\ 2r^{-1/2}MC_2\end{matrix}\right\|$$

$$\left(M\varphi(t)=\frac{4G^\circ(t)}{1-2\nu^\circ(t)}\left[N\nu^\circ\varphi(t)-\nu^\circ(t)\,N\varphi(t)\right]+\frac{E_*(t)}{3}S\varphi(k^\circ-1)(t)\right)$$

Запись $Ng\varphi(t)$ означает, что задаваемый формулой (2.16) оператор N вычисляется на произведении функций g, φ.

Справедливо утверждение, доказываемое так же, как и лемма 1 в [5].

Лемма. Пусть $\mathbf{w}\in L^\infty[0,\,T;\,V_{-\delta}{}^2(\omega)]$, $\varphi\in L^\infty(0,\,T,\,R^1)$. Тогда при $\forall t\in[0,\,T]$ имеют место оценки (α — показатель из условий (1.6))

$$(2.18)\qquad \|\mathbf{L}^R(\mathbf{w})(t,\cdot),\,\overset{\circ}{V}_{-\delta}(\omega)\|\leqslant C\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\|\mathbf{w}(\tau,\cdot),\;V_{-\delta}^2(\omega)\|\,d\tau$$

$$(2.19)\qquad \|\mathbf{B}^R(\mathbf{w})(t,\cdot),\,V_{-\delta}^{1/2}(\gamma)\|\leqslant C\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\|\mathbf{w}(\tau,\cdot),\;V_{-\delta}^2(\omega)\|\,d\tau$$

$$(2.20)\qquad |S\varphi(t)|\leqslant C\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}|\varphi(\tau)|\,d\tau,\quad |M\varphi(t)|\leqslant C\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}|\varphi(\tau)|\,d\tau$$

Для второго шага итерационного процесса (2.7), (2.8) необходимо вычислить $\mathbf{F}^1$, $\mathbf{Q}^1$ и представить их в виде, аналогичном (2.9):

$$(2.21)\qquad \mathbf{F}^1=r^{-3/2}m\,(A_1{}^1\zeta^1+A_2{}^1\zeta^2)\,\chi+\mathbf{F}^{*1},\quad \mathbf{Q}^1=\left\|\begin{matrix}Q_r{}^1\\ Q_\theta{}^1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}Q_r{}^{*1}\\ Q_\theta{}^{*1}-2A_2{}^1r^{-1/2}\chi\end{matrix}\right\|$$

Учитывая (2.13), (2.17), из определения $\mathbf{F}^1$ получим

$$(2.22)\qquad \begin{aligned} \mathbf{F}^1 &= -\mathbf{L}^R(r^{1/2}\Sigma^1\chi + \mathbf{l}^1 + \mathbf{w}^1) = \\ &= -\mathbf{L}^R(r^{1/2}\Sigma^1\chi) - \mathbf{L}^R(\mathbf{w}^1) + \mathbf{L}^{R_0}(r^{1/2}\Sigma^1)\chi - \\ &- \mathbf{L}^{R_0}(r^{1/2}\Sigma^1)\chi = -r^{-3/2}(MC_1{}^1\zeta^1 + MC_2{}^1\zeta^2)\chi + \mathbf{F}^{*1} \\ \mathbf{F}^{*1} &= -\mathbf{L}^R(\mathbf{w}^1) + \mathbf{L}^{R_0}(r^{1/2}\Sigma^1)\chi - \mathbf{L}^R(r^{1/2}\Sigma^1\chi), \quad \Sigma^1 = C_1{}^1\psi^1 + C_2{}^1\psi^2 \end{aligned}$$

Положим $A_i{}^1 \equiv -m^{-1}MC_i{}^1$. При $\delta < {}^1/_2$ справедливо неравенство

$$(2.23)\qquad \| \mathbf{F}^{*1}(t, \cdot), \overset{\circ}{V}_{-\delta}(\omega) \| < C\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} ||| \mathbf{v}^1(\tau, \cdot) ||| \, d\tau$$

Оценка первого слагаемого в выражении для $\mathbf{F}^{*1}$ вытекает из (2.18). Ввиду гладкости коэффициентов разность истинных и замороженных в вершине трещины реологических характеристик имеет порядок r, поэтому разность старших членов вторых двух слагаемых имеет порядок $r^{-1/2}$, т. е. принадлежит пространству $V_{-\delta}{}^\circ$ при $\delta < + {}^1/_2$. Следовательно, по лемме, разность $\mathbf{L}^{R^\circ} - \mathbf{L}^R$ в выражении для $\mathbf{F}^{*1}$ также не превосходит правой части (2.23).

Учитывая (2.13), (2.17), из определения $\mathbf{Q}^1$ получим

$$(2.24)\qquad \begin{aligned} \mathbf{Q}^1 &= \mathbf{B}^R(r^{1/2}\Sigma^1\chi + \mathbf{l}^1 + \mathbf{w}^1) = \mathbf{B}^R(r^{1/2}\Sigma^1\chi) + \\ &+ \mathbf{B}^R(\mathbf{w}^1) + \mathbf{B}^{R_0}(r^{1/2}\Sigma^1)\chi - \mathbf{B}^{R_0}(r^{1/2}\Sigma^1)\chi = \\ &= \left\| \begin{matrix} 0 \\ 2r^{-1/2}MC_2{}^1\chi \end{matrix} \right\| + \mathbf{Q}^{*1} \\ \mathbf{Q}^{*1} &= \mathbf{B}^R(\mathbf{w}^1) + \mathbf{B}^R(r^{1/2}\Sigma^1\chi) - \mathbf{B}^{R_0}(r^{1/2}\Sigma^1)\chi \end{aligned}$$

Следующее неравенство обосновывается так же, как и (2.23) (с использованием (2.19) вместо (2.18))

$$(2.25)\qquad \| \mathbf{Q}^{*1}(t, \cdot), V_{-\delta}^{1/2}(\gamma) \| \leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} ||| \mathbf{v}^1(\tau, \cdot) ||| \, d\tau$$

Итак, правые части $\mathbf{F}^1$, $\mathbf{Q}^1$ на втором шаге итерационного процесса представлены в виде (2.9)

$$(2.26)\qquad A_i = A_i{}^1 \equiv -m^{-1}MC_i{}^1, \ \alpha_i = 0, \ i = 1, 2, \ \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{*1}, \ \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^{*1}$$

Из (2.26) и (2.20) заключаем, что

$$(2.27)\qquad |A_i{}^1(t)| \leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} |C_i{}^1(\tau)| \, d\tau, \quad i = 1, 2$$

Представления для $\mathbf{v}^2$ и оценки для $||| \mathbf{v}^2(t, \cdot) |||$ следуют из (2.11), (2.12):

$$(2.28)\qquad \begin{aligned} &\mathbf{v}^2 = r^{1/2}(C_1{}^2\psi^1 + C_2{}^2\psi^2 + A_1{}^1\xi^1 + A_2{}^1\xi^2)\chi + \mathbf{l}^2 + \mathbf{w}^2 \\ &l_1{}^2 = a_1{}^2 + b^2x_2, \quad l_2{}^2 = a_2{}^2 - b^2x_1 \end{aligned}$$

$$(2.29)\qquad \begin{aligned} &||| \mathbf{v}^2(t, \cdot) ||| \equiv \sum_{i=1}^2 (|C_i{}^2(t)| + |a_i{}^2(t)|) + |b^2(t)| + \\ &+ \| \mathbf{w}^2(t, \cdot), V_{-\delta}^2(\omega) \| \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^2 |A_i{}^1(t)| + \| \mathbf{F}^{*1}(t, \cdot), V_{-\delta}^0(\omega) \| + \\ &+ \| \mathbf{Q}^{*1}(t, \cdot), V_{-\delta}^{1/2}(\gamma) \| \Big) \end{aligned}$$

Собирая вместе оценки (2.23), (2.25), (2.27) и (2.29), получим неравенство

$$(2.30)\qquad ||| \mathbf{v}^2(t, \cdot) ||| \leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} ||| \mathbf{v}^1(\tau, \cdot) ||| \, d\tau$$

Рассмотрим третий шаг итерационного процесса. Формула (2.28) по сравнению с (2.13) содержит два слагаемых нового типа, а именно в главной части присутствуют вектора ξ^i, $i = 1, 2$. Вычисления с использованием (2.15) показывают, что

$$\mathbf{L}^{R^\circ}(r^{1/2}A_1\xi^1) = r^{-3/2}DA_1\zeta^1, \quad \mathbf{B}^{R^\circ}(r^{1/2}A_1\xi^1) = 0 \tag{2.31}$$

$$\mathbf{L}^{R^\circ}(r^{1/2}A_2\xi^2) = r^{-3/2}DA_2\zeta^2, \quad \mathbf{B}^{R^\circ}(r^{1/2}A_2\xi^2) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 2r^{-1/2}DA_2{}^1 \end{matrix} \right\|$$

Здесь D — интегральный оператор вида

$$D\varphi(t) = -mN\varphi(t) + \frac{E_*(t)}{6} S\varphi(t) \tag{2.32}$$

Дальнейшие выкладки являются дословным повторением сказанного о втором шаге процесса с той разницей, что в аналогичном (2.21) представлении правых частей $\mathbf{F}^2$, $\mathbf{Q}^2$ коэффициенты $A_i{}^2$ выражаются формулой

$$A_i{}^2 = -m^{-1}(MC_i{}^2 - DA_i{}^1), \quad i = 1, 2 \tag{2.33}$$

Равенство (2.33) обобщает (2.26); при его выводе кроме (2.17) используется еще и (2.31).

В результате получим представление для $\mathbf{v}^3$ и оценку для $|||\, \mathbf{v}^3(t, \cdot)\, |||$ через $|||\, \mathbf{v}^2(t, \cdot)\, |||$:

$$\mathbf{v}^3 = r^{1/2}(C_1{}^3\psi^1 + C_2{}^3\psi^2 + A_1{}^2\xi^1 + A_2{}^2\xi^2)\chi + \mathbf{l}^3 + \mathbf{w}^3 \tag{2.34}$$

$$|||\, \mathbf{v}^3(t, \cdot)\, ||| \leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\, |||\, \mathbf{v}^2(\tau, \cdot)\, |||\, d\tau \tag{2.35}$$

Следующие шаги процесса рассматриваются точно так же, как третий шаг, поэтому справедливы следующие утверждения, полностью аналогичные (2.34), (2.33), (2.35): решение $\mathbf{v}^n$ представимо в виде

$$\mathbf{v}^n = r^{1/2}(C_1{}^n\psi^1 + C_2{}^n\psi^2 + A_1^{n-1}\xi^1 + A_2^{n-1}\xi^2)\chi + \mathbf{l}^n + \mathbf{w}^n, \quad n = 3, 4, \ldots$$

$$l_1{}^n = a_1{}^n + b^n x_2, \quad l_2{}^n = a_2{}^n - b^n x_1$$

где коэффициенты $A_i{}^{n-1}$ определяются рекуррентными формулами

$$A_i{}^{n-1} = -m^{-1}(MC_i{}^{n-1} + DA_i{}^{n-2}), \quad i = 1, 2, \quad n = 3, 4, \ldots \tag{2.36}$$

и имеет место оценка

$$|||\, \mathbf{v}^n(t, \cdot)\, ||| = \sum_{i=1}^{2}(\,|C_i{}^n(t)| + |a_i{}^n(t)|\,) + |b^n(t)| + \|\, \mathbf{w}^n(t, \cdot), V^2_{-\delta}(\omega)\, \| \leqslant \tag{2.37}$$

$$\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\, |||\, \mathbf{v}^{n-1}(\tau, \cdot)\, |||\, d\tau, \quad n = 3, 4, \ldots$$

Неравенства (2.30), (2.37) являются основными соотношениями для доказательства теоремы.

Из (2.30), (2.14) заключаем, что

$$|||\, \mathbf{v}^2(t, \cdot)\, ||| \leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\, d\tau I(T) = \frac{Ct^\beta}{\beta} I(T), \quad \beta \equiv 1 - \alpha \tag{2.38}$$

Введем интеграл

$$I_n(t) = \int_0^t \tau^{n\beta}(t-\tau)^{-\alpha}\, d\tau = D_n t^{(n+1)\beta}, \quad D_n \equiv \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(n\beta+1)}{\Gamma[(n+1)\beta+1]} \tag{2.39}$$

Подставляя (2.38) в (2.37) при $n = 3$ и используя определения (2.39), находим

$$|||\, \mathbf{v}^3(t, \cdot)\, ||| \leqslant \frac{C}{\beta} I(T)\int_0^t \tau^\beta (t-\tau)^{-\alpha}\, d\tau = \frac{C}{\beta} D_1 t^{2\beta} I(T)$$

Последовательно применяя (2.37) для $n = 4, 5, \ldots$, придем к оценке

(2.40) $$|||\mathbf{v}^n(t, \cdot)||| \leqslant \frac{C}{\beta} D_1 D_2 \ldots D_{n-2} I(T) = \\ = \frac{C\Gamma(\beta+1)[C\Gamma(\beta)]^{n-2}}{\beta\Gamma[(n-1)\beta+1]} t^{(n-1)\beta} I(T)$$

По лемме 5 в [5], ряд с общим членом, равным правой части в (2.40), сходится при любом t. Отсюда следует сходимость рядов с общими членами C_i^n, a_i^n, b^n, A_i^n, $\mathbf{w}^n$, что доказывает представление (2.2), причем

(2.41) $$C_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1^n(t), \quad A_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_i^n(t), \quad a_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i^n(t), \ i = 1, 2$$
$$b(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n(t), \quad \mathbf{o}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{w}^n(t)$$

Для доказательства (2.4) просуммируем (2.36) по $n = 3, 4, \ldots$ и прибавим (2.26), с учетом (2.41) получим уравнение

(2.42) $$A_i = -m^{-1}(MC_i + DA_i), \ i = 1, 2$$

Используя определения операторов (2.16), (2.32) и обозначение m в (2.9), можно проверить, что уравнения (2.42) и (2.4) совпадают.

Формулы (2.3) получаются прямой подстановкой (2.2) в (1.1), (1.3). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Распространение трещин в упруговязких телах.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970, № 7, с. 20—35.
2. *Варданян Г. С., Шеремет В. Д.* О некоторых теоремах в плоской задаче линейной теории ползучести.— Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1973, № 4, с. 60—76.
3. *Cherepanov G. P.* Mechanics of Brittle Fracture. Mc. Graw-Hill, N. Y., 1979, p. 950.
4. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, с. 569—571.
5. *Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А.* Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел с односторонними связями. Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 31—48.
6. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations, satisfying general boundary conditions II.— Communs Pure and Appl. Math., 1964, v. 17, No. 1, p. 35—92.
7. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
8. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— J. Appl. Mech., 1952, v. 19, No. 4, p. 526—528.
9. *Арутюнян Н. Х.* Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона.— Докл. АН Арм. ССР, 1947, т. 7, № 5, с. 203—209.
10. *Харлаб В. Д.* К общей линейной теории ползучести.— Изв. ВНИИГ, 1961, т. 68, с. 217—240.
11. *Трапезников Л. П., Шойхет Б. А.* Применение вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно к доказательству некоторых теорем линейной теории ползучести.— Изв. ВНИИГ, 1975, т. 109, с. 177—181.
12. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
13. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Math. Nachr., 1977, B. 76, S. 29—60.
14. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
15. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
8.I.1982