Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 2, 1983

УДК 531/534

О ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

Седов Л. И.

С помощью теории, позволяющей индивидуализировать точки риманова пространства и введения соответствующих сопутствующих систем отсчета для гравитационного поля в классической общей теории относительности, получены выражения для плотности энергии поля как четырехмерного скаляра (не псевдоскаляра) и тензора энергии — импульса поля как тензора энергии импульса второго ранга (не псевдотензора).

Эти результаты относятся ко всем типам пустого пространства Римана по классификациям А. З. Петрова, Пенроуза и Ньюмена.

1. В физической теории гравитационного поля проблема определения энергии, импульса и внутренних напряжений в поле возникла со времени зарождения идей общей теории относительности. В прямом противоречии с основными принципами ковариантности законов физики и, в частности, представлениями об энергии как о четырехмерной скалярной характеристике индивидуализированных объектов многими авторами были предложены различные варианты выражений для псевдотензоров энергии — импульса на основе ряда физически неудовлетворительных решений проблемы о динамических характеристиках гравитационных полей (так, из всех предложенных формул для псевдотензоров энергии — импульса следует, что пустое пространство Минковского в соответствующих координатах обладает переменными энергией, импульсом, и в нем имеются внутренние напряжения).

В связи с указанной проблемой прежде всего необходимо явно подчеркнуть, что при введении понятия об энергии гравитационного поля, так же как и во всех других случаях исследования сплошных сред, требуется дать определение индивидуального трехмерного объема — локального элемента поля, соответствующего собственного времени и опереться по существу, как и всегда при введении моделей и определений энергии, на уравнение в вариациях для первого начала термодинамики.

Введение понятия об индивидуальных точках и о сопутствующих системах координат для индивидуализированных точек в римановом пространстве сводится к введению времениподобного векторного поля единичного вектора $\mathbf{u}$, определяемого самим римановым пространством и допускающего возможность трактовать его как поле четырехмерных скоростей

$$d\mathbf{r}/ds = \mathbf{u}$$

$$(ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j; \; d\mathbf{r} = dx^i \mathrm{Э}_i = \mathbf{u}ds; \quad i, j = 1, 2, 3, 4)$$

Огибающие линии векторного поля $\mathbf{u}$ представляют собой мировые линии точек, индивидуализированных постоянными интегрирования ξ^α, $\alpha = 1, 2, 3$ — координатами Лагранжа, появляющимися при определении законов движения $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$, ξ^4 переменно. Все динамические свойства риманова пространства и, следовательно, гравитационного поля можно рассматривать как механические свойства потоков точек, индивидуализированных лагранжевыми координатами [1].

Ниже ограничимся рассмотрением плотности энергии и тензора энергии — импульса гравитационного поля в пустоте, иначе говоря, в четырехмерном объеме риманова пространства, не содержащего масс вещества, электромагнитного поля или других полей.

В предыдущей работе [2] указанная проблема была полностью разрешена для общего вида пространства Римана, т. е. когда оно принадлежит к первому типу T_1 по А. З. Петрову [3, 4]. В предлагаемой статье дается распространение полученных ранее результатов на случай алгебраически вырожденных римановых пространств, которые имеются в конечных объемах. Эта теория потребовала дополнительного анализа, обусловленного, вообще говоря, наличием или отсутствием единственной сопутствующей риманову пространству системы отсчета, которую естественным путем можно построить для вырожденных типов пространств Римана. Последующие результаты можно отнести не только к классической общей теории относительности, но и ко многим другим обобщенным теориям, в которых физическое пространство моделируется псевдоримановым пространством.

По определению пустоты в римановом пространстве подразумевается, что компоненты тензора Риччи в пустоте равны нулю: $R_{ij} = 0$. Отсюда следует, что тензор Римана с компонентами R_{ijkl} в пустоте совпадает с тензором Вейля с компонентами W_{ijkl} согласно известному равенству

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + {}^1/_2\,(g_{ik}R_{jl} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk}) - \\ - {}^1/_6\,(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\,R$$

Многие последующие выводы связаны только со свойствами тензора Вейля, и поэтому они могут быть использованы в приложениях и в общих случаях, когда $R_{ij} \neq 0$ и тензор Вейля не равен тензору Римана. При этом следует учесть, что тензор Вейля является одной из главных геометрических характеристик риманова пространства и в общем случае.

Нижеследующие геометрические и динамические выводы основаны на использовании алгебраических свойств в точках и аналитических свойств в малой окрестности точек риманова пространства совокупности компонент тензора Вейля.

Прежде всего напомним определения и результаты, содержащиеся в работах А. З. Петрова [3, 4], Дебеве [5], Сакса [6], Ньюмена и Пенроуза [7].

В каждой точке четырехмерного псевдориманова пространства введем диадную симметричную матрицу **K** шестого ранга, составленную из компонент тензора Вейля, вообще говоря, отличных от нуля. Матрица **K** составлена из компонент тензора W_{ijkl} со следующими указанными индексами в строках и столбцах:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|c|c} & 14,\ 24,\ 34,\ 23,\ 31,\ 12 & kl \\ \hline 14 & & \\ 24 & & \\ 34 & & \\ 23 & & \\ 31 & & \\ 12 & & \\ \hline ij & & \end{array} = \begin{Vmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N} & -\mathbf{M} \end{Vmatrix}$$

где **M** и **N** — две симметричные матрицы третьего ранга.

Как известно [3, 4], в каждой точке риманова пространства матрицу **K** вещественным преобразованием координат можно привести локально к каноническому виду в соответствующей тетраде $Э_i$, образованной системой четырех ортонормированных единичных базисных векторов $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$, $Э_4$

$$(Э_1 \cdot Э_1 = Э_2 \cdot Э_2 = Э_3 \cdot Э_3 = -1;\ Э_4 \cdot Э_4 = +1 \text{ и } Э_i \cdot Э_j = 0 \quad \text{при } i \neq j)$$

из которых вектор $Э_4$ можно взять времениподобным и по условию направленным в сторону роста собственного времени для элемента $d\mathbf{r} = Э_4 ds$. Таким путем в пространстве типа T_1 по А. З. Петрову определяется векторное поле $\mathbf{u} = Э_4$ единственным образом.

В общем случае с помощью локальных линейных неголономных преобразований координат глобально получится, что канонические формы матриц **M** и **N** для типа T_1 имеют вид

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_1 - \beta_2 \end{Vmatrix}$$

Здесь α_1, α_2 и β_1, β_2 — инварианты тензора Вейля, причем $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\beta_1 \neq \beta_2$ или $\alpha_1 \neq -\alpha_2/2$, $\beta_1 \neq \beta_2/2$, $\alpha_2 \neq -\alpha_1/2$, $\beta_2 \neq \beta_1/2$, и поэтому диагональные члены в каждой из матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ различны между собой, что связано с отсутствием кратных корней у соответствующего векового уравнения. Из единственности, в общем случае, канонической матрицы $\mathbf{K}$ и единственности соответствующих векторов базиса $Э_4 = \mathbf{u}$ и их огибающих следует единственность сопутствующей системы отсчета.

Вырожденные типы получаются для кратных корней, для которых в случаях N, D и O канонические виды матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ сохраняют единственно определенный в каждом типе специальный вид, тогда как соответствующие тетрады А. З. Петрова и вектор $\mathbf{u} = Э_4$ не определяются единственным образом.

Для каждой системы тетрад, определенных как канонические для матриц компонент тензора Вейля в данном пространстве Римана векторным полям $\mathbf{u} = Э_4$ соответствуют семейства мировых линий, которые можно рассматривать как семейства линий, сопутствующих риманову пространству, которому отвечает единственно введенная каноническая матрица компонент тензора Вейля.

В типах T_1, T_2 и T_3 канонические тетрады по А. З. Петрову в каждой точке M риманова пространства определены единственным образом, поэтому в этих случаях сопутствующая система отсчета тоже получается единственной и она определена полностью тензором Вейля. В типах N, D и O для фиксированных канонических видов матрицы $\mathbf{K}$ по А. З. Петрову соответствующие ортонормированные тетрады $Э_i$ и соответственно векторы $Э_4 = \mathbf{u}$ определяются не единственным образом. В типе O это произвольные тетрады. В типах N и D в каждой точке M пространства Римана для возможных векторов $\mathbf{u}$ получаются семейства, зависящие соответственно от двух и от одного скалярных параметров.

В каждой рассматриваемой точке риманова пространства M можно привести целый трехмерный конус изотропных направлений. Среди них в общем случае можно выделить шесть направлений, определенных изотропными векторами через базисные векторы, взятые в тетрадах А. З. Петрова $\overset{*}{\mathbf{Q}}_{\alpha\pm} = Э_4 \pm Э_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, и соответственно построить шесть семейств изотропных мировых линий, которые тоже можно рассматривать как линии, направленные в будущее и «сопутствующие» в совокупности данному риманову пространству. Однако эти линии могут переходить друг в друга при преобразованиях базиса.

Кроме этих сопутствующих пространству изотропных линий по определению можно ввести еще в каждой точке пространства главные изотропные направления, касающиеся изотропных векторов, компоненты которых удовлетворяют уравнениям [1]

$$Q_{[i}W_{j]kl[m}Q_{n]}Q^kQ^l = 0 \tag{1.1}$$

в которых векторы $\mathbf{Q} = Q^i Э_i$, удовлетворяющие условиям изотропности $g_{pq}Q^pQ^q = 0$, определяются с точностью до постоянного множителя.

В общем случае таких различных направлений в невырожденных случаях типа T_1 четыре, и соответственно получатся четыре изотропные сопутствующие линии, как огибающие главных изотропных векторов $\mathbf{Q}$. Эти линии также могут переходить друг в друга при соответствующих пре-

[1] С естественным путем введения главных изотропных направлений и уравнений (1.1) можно ознакомиться по работам [5—11].

образованиях координат. Направления $\mathbf{Q}^*_{\alpha\pm}$ и направления главных изотропных векторов $\mathbf{Q}$ вообще различны.

Если некоторые решения уравнения (1.1) сливаются, то риманово пространство будет алгебраически вырожденным. Если только два из них сливаются в одно, то, по определению, риманово пространство будет типа T_2. Если три решения для $\mathbf{Q}$ в уравнении (1.1) сливаются в каждой точке и соответственно сливаются три главных изотропных направления, то получим пространство типа T_3. В случае слияния всех четырех решений получим пространство типа N. Если сливаются сразу отдельно по два главных направления, то пространству приписывается тип D и, наконец, пространство Римана будет типа O, если все компоненты тензора Вейля равны нулю.

Во всех определенных выше типах канонические виды матриц $\mathbf{K}$ известны [4].

При сохранении инвариантным канонического вида матрицы $\mathbf{K}$ преобразования, переводящие систему ортонормированных базисов $Э_i$ в систему ортонормированных базисов $\overline{Э}_i$, могут представлять собой только преобразования Лоренца вида

$$\overline{Э}_i = L_i^k Э_k \tag{1.2}$$

Непосредственной проверкой можно показать, что в типах T_1, T_2 и T_3 это преобразование может быть только тождеством. Следовательно, в этих типах тетрады $Э_i$ и векторное поле $\mathbf{u} = Э_4$ определены однозначно и сопутствующая система отсчета, т. е. система мировых линий, огибающая векторы $\mathbf{u}$ характеризуют вместе с инвариантами тензора Вейля пространство Римана и все его свойства при $R_{ij} = 0$, в том числе и динамические свойства римановых пространств для пустоты.

Тензор Вейля имеет только четыре независимых алгебраических инварианта. В качестве этих инвариантов можно взять четыре функции, фигурирующие в канонических матрицах, через которые выражаются все компоненты тензора Вейля в канонических матрицах. Из известных видов матриц $\mathbf{K}$ для тензора Вейля следует, что в типах T_3, N, O инвариантные компоненты тензора Вейля либо известные постоянные, которые можно принять согласно каноническим видам матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ равными единице, либо это нули. Поэтому любые функции инвариантов тензора Вейля в этих случаях можно рассматривать как постоянные, однако значения этих постоянных могут зависеть от типа и от вида взятых функций инвариантов.

В типах N, D, O тетрады $Э_i$ по А. З. Петрову неинвариантны при условии инвариантного определения соответствующего канонического вида матриц $\mathbf{K}$, а следовательно, и матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Как известно, в этих случаях существуют группы преобразований ортонормированных базисов $Э_i$, L_O, L_N и L_D, оставляющих матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, определенные по А. З. Петрову, инвариантными. В частности, для типа O такая группа преобразований совпадает с полной группой преобразований Лоренца, отвечающих переходу между двумя произвольными времениподобными фиксированными направлениями вектора $\mathbf{u} = Э_4$. (В этом случае при $R_{ij} = 0$ пространство является пространством Минковского.) Поэтому L_O содержит три действительных параметра, L_N — два, а L_D — один, меняющие сопутствующие системы отсчета.

В перечисленных случаях векторное поле $\mathbf{u} = Э_4$ в соответствующих тетрадах не определяется однозначно, следовательно, и сопутствующие системы отсчета не определяются только каноническим видом матрицы $\mathbf{K}$ однозначно. Однако ниже будет показано, что в этих случаях дело обстоит так же, как и в специальной теории относительности, где роль геометрически сопутствующих систем отсчета пространству Минковского определена неоднозначно и принадлежит инерциальным системам отсчета. В случае O семейство сопутствующих мировых линий представляет собой систему времениподобных параллельных прямых линий.

Неединственность в типах O, N и D по существу связана с наличием в этих пространствах совокупностей эквивалентных глобальных систем отсчета, являющихся прямыми аналогами инерциальных систем отсчета в специальной теории относительности.

Для канонических матриц в случаях слившихся главных изотропных направлений $\mathbf{Q}$ при определенном выборе нумерации векторов $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$ в любой тетраде, отвечающей канонической матрице $\mathbf{K}$, будет выполняться равенство

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}^*_{1+} = Э_4 + Э_1 \tag{1.3}$$

Поэтому в любой тетраде $Э_i$, полученной из какой-либо одной канонической допустимым преобразованием Лоренца для компонент $Э_1, Э_4$ и $\mathbf{Q}_1$, взятых в тетрадах А. З. Петрова, верны формулы $Э_1 (1, 0, 0, 0)$, $Э_4$ $(0, 0, 0, 1)$ и $\mathbf{Q}_1$ $(1, 0, 0, 1)$.

В типе D для двух слившихся главных изотропных направлений $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$, выделяющих инвариантный плоский элемент π в канонических тетрадах, отвечающий базисным векторам $Э_4$, $Э_1$, кроме равенства (1.3) для одного направления $\mathbf{Q}_1$, можно принять, что для другого направления $\mathbf{Q}_2$ выполняется равенство

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}^*_{1-} = Э_4 - Э_1 \tag{1.4}$$

Формулы (1.3) и (1.4) следуют из свойств решений уравнений (1.1), записанных для канонических матриц в вырожденных типах D [4].

Рассмотрим проблему конструирования сопутствующих систем отсчета для вырожденных типов O, N и D псевдоримановых пространств, в которых единичный вектор $Э_4$, отвечающий каноническим ортонормированным тетрадам А. З. Петрова, не определен единственным способом.

В связи со сказанным выше напомним фактические канонические виды для матриц $\mathbf{K}$ и данные о произволе в неоднозначно определенных соответствующих канонических тетрадах в типах O, N и D.

В типе O имеем $W_{ijkl} = 0$ во всех системах координат и, следовательно, во всех тетрадах вообще. Отсюда также следует, что все инварианты тензора Вейля в типе O можно принять равными нулю. Как известно, в пустоте, когда выполняется еще равенство $R_{ij} = 0$, соответствующее псевдориманово пространство вырождается в пространство Минковского.

Пользуясь произволом канонических тетрад в пространстве Минковского, можно рассматривать в этом пространстве любые системы отсчета, зависящие от выбора полей векторов $\mathbf{u}$, для задания которых необходимо, вообще говоря, ввести функции — закономерности их распределения, не связанные по своему существу только с геометрической природой пространства Минковского. Очевидно, что такой природы поля векторов $\mathbf{u}$, связанные не только с характеристиками пространства, можно рассматривать в любых типах пространства Римана при различных соответствующих тензорах Вейля [12—14]. Однако в развиваемой здесь теории рассматриваются векторные поля для $\mathbf{u}$, определяющиеся в каждой точке пространства алгебраически только через компоненты метрического тензора g_{ij} и компоненты тензора Вейля W_{ijkl}.

В типе O во всех точках пространства имеем $W_{ijkl} = 0$. Поэтому можно принять, что каждая сопутствующая пространству Минковского система отсчета определяется вполне выделением одной произвольной начальной тетрады, так как нет никаких оснований, связанных с природой пространства Минковского для относительного изменения тетрад в соседних точках по сравнению с выбранной начальной. Отсюда следует, что после выбора начальной тетрады все тетрады в соседних и вообще во всех других точках пространства Минковского должны быть одинаковыми. В этом случае поле касательных единичных векторов $\mathbf{u}$ локальным и глобальным образом можно строить исходя из заданной любой одной тетрады в произвольно заданной точке путем поступательного смещения вектора $\mathbf{u}$ во все соседние бесконечно близкие точки.

Таким образом, получим, что системы отсчета, сопутствующие пространству Минковского, представляют собой любые семейства времениподобных параллельных прямых.

Очевидно, что такие системы отсчета в специальной теории относительности представляют собой инерциальные системы отсчета, которые можно рассматривать как главные геометрические характеристические особенности пространства Минковского.

Очевидно, что алгоритм выделения характеристических сопутствующих систем отсчета в типе O из неоднозначно определяемых векторных полей $\mathbf{u}$, взятых из тетрад А. З. Петрова, получается благодаря отсутствию влияния каких-либо дополнительных геометрических параметров.

В типе N для неоднозначно определенных канонических тетрад А. З. Петрова в любой точке пространства канонического вида матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ в $\mathbf{K}$ имеют вид [4]

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Отсюда ясно, что в любых конкретных решениях типа N все скалярные инварианты тензора Вейля представляют собой одни и те же постоянные по точкам пространства скаляры.

Пусть $Э_i$ — некоторые произвольно выбранные ортонормированные векторы для тетрады А. З. Петрова, определенные в каждой точке пространства N. Тогда известно [6—11], что в любой точке пространства канонический вид матрицы $\mathbf{K}$ для всех решений типа N сохраняется инвариантным в тетраде $\bar{Э}_i$, определенной преобразованием

$$\bar{Э}_4 = Э_4 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)(Э_4 + Э_1) + aЭ_2 + bЭ_3 \tag{1.5}$$

$$\bar{Э}_1 = Э_1 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2)(Э_4 + Э_1) - aЭ_2 - bЭ_3$$

$$\bar{Э}_2 = Э_2 + a(Э_4 + Э_1), \quad \bar{Э}_3 = Э_3 + b(Э_4 + Э_1)$$

В этом преобразовании a и b — любые вещественные функции точек пространства. В каждой фиксированной точке пространства для любых двух параметров a и b преобразования (1.5) являются преобразованиями Лоренца.

Можно проверить, что при преобразованиях (1.5) для изотропного вектора $\mathbf{Q}$ в каждой канонической тетраде верно инвариантное равенство

$$(1.6) \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{u} + Э_1 = \overline{\mathbf{u}} + \overline{Э}_1$$

в каждой точке пространства. Компоненты вектора $\mathbf{Q}$ (1, 0, 0, 1) в неоднозначно определенных тетрадах А. З. Петрова определены однозначно канонической матрицей $\mathbf{K}$. Изотропный вектор $\mathbf{Q}$ представляет собой в типе N слившиеся четыре главные изотропные направления.

Во всяком конкретном решении типа N в каждой точке пространства и в любой системе координат компоненты изотропного вектора $\mathbf{Q}$ можно найти с помощью алгебраических операций. Для получения всех допустимых полей векторов $\mathbf{u}$ необходимо кроме частно заданного поля канонических тетрад $Э_i$ в каждой точке пространства задать еще две произвольные скалярные функции точек пространства a и b, входящие в формулы преобразования (1.5).

Для решения проблемы определения сопутствующих пространству типа N систем отсчета заметим, что по сравнению с типом O в каждом конкретном пространстве типа N имеется еще геометрически существенное поле известных главных изотропных векторов $\mathbf{Q}$, причем кроме этого вектора нет каких-либо других существенных параметров в разных точках пространства и, в частности, в канонической матрице $\mathbf{K}$, одинаковой во всех точках и в любых пространствах типа N.

В каждой точке пространства N система канонических тетрад и множество им соответствующих базисных векторов характеризуется вполне единственным главным изотропным вектором $\mathbf{Q}$.

В каждой точке пространства N для группы преобразований (1.5) канонических тетрад, представляющей собой подгруппу преобразований Лоренца, геометрическое место концов вектора $\mathbf{u}$ образует двумерную поверхность ε.

На основании первой из формул преобразования (1.5) видно, что во всякой канонической тетраде с локальными декартовыми координатами x^1, x^2, x^3, x^4 уравнение поверхности ε, представляющей собой геометрическое место концов векторов $\mathbf{u}'$ (u^1, u^2, u^3, u^4), имеет вид

$$x^4 = 1 + {}^1/_2\,[(x^2)^2 + (x^3)^2], \quad x^1 = -{}^1/_2\,[(x^2)^2 + (x^3)^2]$$

Очевидно, что точки поверхности ε принадлежат трехмерной гиперплоскости $x^4 = 1 - x^1$. В каждой канонической тетраде плоскость, перпендикулярная к векторам $Э_2$ и $Э_3$, содержит вектор $\mathbf{Q} = Э_4 + Э_1$.

Рассмотрим две любые, но бесконечно близкие точки P и P', и пусть $\mathbf{Q}(P)$ и $\mathbf{Q}'(P')$ — соответствующие им слившиеся главные изотропные векторы, а $Э_i$ и $Э_i'$ — какие-либо две им соответствующие системы канонических тетрад.

Для бесконечно близких точек P и P' все тетрады и вектор $\mathbf{Q}'$ можно перенести параллельно самим себе из точки P' в точку P и использовать для описания всех векторов одну фиксированную декартову систему координат тетрады $Э_i$ в точке P.

Если $\mathbf{Q}(P) = \mathbf{Q}'(P')$ для любых P', то очевидно, что любые двумерные множества ε и ε' одинаковы и после перенесения их в точку P в системе базисов $Э_i$ точно совпадут. В этом случае все векторы $Э_4 = \mathbf{u}$, зависящие от параметров a и b в преобразовании (1.5) и определяющие ε, можно так же, как и в типе O, взять в каждой точке пространства одинаковыми, но теперь уже с ограничением, заключающимся в том, что концы этих векторов $\mathbf{u}$ должны принадлежать двумерному множеству ε. Таким образом определенные в каждой точке пространства в зависимости от двух параметров $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ векторы $\mathbf{u}$, так же как и в типе O, определяют собой сопутствующие системы отсчета, для которых будет выполняться очевидное равенство

$$\nabla_i u^i = 0 \tag{1.7}$$

Если $\mathbf{Q}(P) \neq \mathbf{Q}'(P')$, то после перенесения канонических тетрад из точки P' в точку P получим различные семейства тетрад. Как известно, преобразование одной ортонормированной тетрады в другую ортонормированную тетраду всегда можно осуществить с помощью преобразования Лоренца. Однако преобразование одной канонической тетрады в точке P' в другую каноническую тетраду в точке P, вообще говоря, не является преобразованием Лоренца типа (1.5), так как при преобразовании типа (1.5) всегда $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$, тогда как это противоречит исходному допущению, что $\mathbf{Q}(P) \neq \mathbf{Q}'(P')$.

В связи с этим двумерные поверхности ε и ε', хотя и одинаковы, но ориентированы различно. Поверхности ε в точках P и P', перенесенные из P' в P, могут иметь общие точки, в которых векторы $\mathbf{u}$ одинаковы, но в этом случае векторы $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$ и $Э_1'$, $Э_2'$, $Э_3'$ различны согласно, в частности, равенству (1.6), когда $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}'$.

В общем случае множества ε и ε' совпадают для точек P и P', принадлежащих одной и той же огибающей слившихся главных изотропных векторов $\mathbf{Q}$, которые, как известно [9], для типа N являются геодезическими в римановом пространстве при $R_{ij} = 0$.

Рассмотрим теперь построение сопутствующих систем отсчета только на основании геометрических характеристик самого пространства, как огибающих векторов $\mathbf{u}$, когда $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}'$. Напомним, что компоненты вектора $\mathbf{u}$ в соответствующей канонической тетраде равны $0, 0, 0, +1$, а в произвольной системе координат эти компоненты определены известным неголономным преобразованием координат к данной канонической тетраде.

В каждой точке пространства типа N с помощью множества канонических тетрад, определяемых преобразованиями (1.5), можно при фиксированном векторе $\mathbf{Q}$ ввести единственным образом двумерную поверхность ε, одинаково ориентированную относительно всех канонических тетрад в каждых точках пространства. От направления вектора $\mathbf{Q}$ зависит только ориентация эквивалентных тетрад с точки преобразований (1.5) и ориентация поверхности ε в точках пространства.

Каждой индивидуальной точке соответствующей поверхности ε среди эквивалентных тетрад отвечает единственным образом определенная тетрада и соответственно векторы $\mathbf{u}$ и $Э_1$, удовлетворяющие соотношению (1.6). Очевидно, что индивидуализация, иначе говоря, выделение точки поверхности ε, равносильно выделению канонической тетрады и векторов $\mathbf{u}'$ и $Э_1'$ и сводится к фиксированию значений параметров a и b, взятых из частного локального преобразования вида (1.6). Если для всех точек пространства с известными векторами $\mathbf{Q}$ поставить в соответствие точки поверхности ε, или значения параметров a и b, определенные из локального частного преобразования (1.5), то получим векторные поля $\mathbf{Q}$, $\mathbf{u}'$ и $Э_1$, связанные равенством (1.6). Такого рода индивидуализация зависит от исходной тетрады, входящей в формулы (1.5). Однако замечательно, что внутренние свойства поверхности ε не зависят от выбора $\mathbf{u}$ в исходной тетраде.

Ориентация поверхности ε в различных точках пространства различна и определяется полностью главным образом изотропным вектором $\mathbf{Q}$.

В качестве параметров, фиксирующих индивидуальные точки на различно ориентированных поверхностях ε в разных точках пространства, можно взять другие параметры, связанные взаимно-однозначными функциями с a и b. Существенно, что общее уравнение поверхности ε в любых канонических тетрадах одинаково в каждой точке пространства, а фиксированной точке на поверхности ε соответствуют определенные векторы $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{u}'$ и определенная каноническая тетрада. Однако надо учитывать, что в разных точках пространства P и P', когда $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}'$, системы тетрад различны и соответственно различны поверхности ε, ε', а единичные векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ различно ориентированы.

Как указано выше, всегда точки поверхности ε в исходной тетраде в данной точке можно индивидуализировать значениями параметров a и b, входящих в преобразование (1.5). В разных точках пространства при $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}'$ одинаковым индивидуальным точкам на ε и ε' будут соответствовать различные тетрады и различные векторы $\mathbf{u}'$.

Для построения различных сопутствующих систем отсчета в пространствах типа N естественно и достаточно принять, что всем точкам пространства соответствует одна и та же точка на поверхности ε, которая различным образом ориентирована в разных точках пространства. Отвечающие индивидуализированной точке поверхности ε канонические тетрады и векторы $\mathbf{u}'$ с фиксированными значениями параметров a, b образуют мировые линии и канонические тетрады во всех точках пространства.

Преобразование Лоренца для бесконечно близких тетрад определяются матрицами $\gamma_{ijl}dx^l$, где $\gamma_{ijl} = -\gamma_{jil}$ — символы Риччи, а dx^l — компоненты вектора бесконечно малого смещения

$$\mathbf{P}'\mathbf{P} = d\mathbf{r}\,(dx^1,\ dx^2,\ dx^3,\ dx^4)$$

В соответствии с этим получим во всем пространстве определенную систему отсчета.

Далее, если принять естественное допущение, что все точки поверхности ε равноправны, то значениям каждой пары параметров a и b, или, иначе, каждой индивидуальной точке ε, будет соответствовать своя сопутствующая система отсчета.

Таким путем получим, что в типе N можно ввести непрерывную совокупность сопутствующих систем отсчета, каждая из которых определяется значениями индивидуализирующих параметров точек ε, в частности значениями параметров a и b.

Для данного конкретного пространства типа N для всех сопутствующих систем отсчета согласно (1.6) каждый скалярный член в равенстве

$$\nabla_i u^i + \mathrm{div}_4 \mathcal{Э}_1 = \nabla_i Q^i \tag{1.8}$$

имеет одно и тоже значение и, в частности, существует инвариант $\nabla_i u^i$, который может зависеть от точек пространства и представляет собой характеристику рассматриваемого пространства типа N. В разных частных пространствах типа N эта характеристика как функция точек пространства может быть различной.

Очевидно, что если в некоторой области во всех близких точках P и P' направления векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ одинаковы, но канонические тетрады могут быть различными, то верны равенства

$$\nabla_i u^i = 0, \quad \operatorname{div}_4 Э_1 = \nabla_i Q^i$$

В разных пространствах типа N соотношение между скалярами $\nabla_i u^i$ и $\operatorname{div}_4 Э_1$ связано с распределением изотропных векторов $\mathbf{Q}$.

Описанная выше конструкция построения сопутствующих систем отсчета для риманова пространства в типе N представляет собой прямое и естественное обобщение уже примененного раньше способа введения сопутствующих систем отсчета в других типах.

В самом деле, например, в типе T_1 каноническая тетрада и вектор $\mathbf{u}$ определены единственным образом, поэтому сопутствующая система отсчета тоже единственна.

В типе N вектор $\mathbf{u}$ не определяется единственным образом каноничностью матрицы $\mathbf{K}$, но единственность достигается фиксированием точки поверхности ε, или, что то же, прямо фиксированием вектора $\mathbf{u}'$, полученного из группы преобразований (1.5). Теперь, в случае N, таким путем можно строить много сопутствующих систем, имея в виду использование различных точек поверхности ε. Принадлежность фиксированных точек поверхности ε, или, иначе, концов векторов $\mathbf{u}'$ поверхности ε, является некоторым ограничением, которого нет в типе O.

Так же как в типе T_1, можно в типе N выразить инвариант $\nabla_i u'^i$ через характеристики сопутствующей системы отсчета. В самом деле, если обозначить $Э_i'$ и $Э_i$ ортонормированные базисы для взятой сопутствующей системы в бесконечно близких точках P' и P для канонических тетрад, то соответствующее преобразование Лоренца имеет вид

$$Э_i' = (\delta_i^j + \gamma^j{}_{\cdot il} y^l)\, Э_j$$

где y^l — декартовы координаты точки P' в тетраде для точки P, а γ_{ijl} — символы Риччи.

Для вектора $\mathbf{u}'$ в тетраде для точки P можно написать [2]

$$\mathbf{u}' = Э_4' = (\delta_4^j + \gamma^j{}_{\cdot 4l} y^l) Э_j$$

Отсюда получим

(1.9) $$\nabla_i u^i = \gamma^i{}_{\cdot 4i}$$

Из сказанного следует, что величина $\gamma^i{}_{\cdot 4i}$ — скаляр, имеющий в каждой фиксированной точке одно и то же значение во всех введенных выше сопутствующих системах отсчета.

Обратимся теперь к типу D.

В типе D для неоднозначно определенных канонических тетрад по А. З. Петрову канонический вид матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ в матрице $\mathbf{K}$ следующий:

(1.10) $$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{Vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta \end{Vmatrix}$$

Инварианты α и β в конкретных решениях могут зависеть от точек пространства.

Попарно слившиеся главные изотропные направления $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ определяют плоскость π. В каждой точке пространства можно ввести плоскость π и определенные неоднозначно лежащие в плоскости π, перпендикулярные между собой единичные векторы $Э_4$ и $Э_1$. Их можно рассматривать вместе с соответствующими единичными векторами $Э_2$ и $Э_3$ как ортонормированную систему базисных тетрад А. З. Петрова, в которых отмеченная выше матрица $\mathbf{K}$ и соответственно матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ (1.10) инварианты.

Неединственность канонических тетрад по А. З. Петрову связана с наличием группы преобразований Лоренца, зависящей от одного параметра v/c, переводящей тетраду $Э_i$ в тетрады $\overline{Э}_i$ и сохраняющей в типе D инвариантной каноническую матрицу компонент тензора Вейля. Как известно [9], эти преобразования при соответствующей указанной выше нумерации ортонормированных векторов базиса $Э_i$ и $\overline{Э}_i$ имеют следующий вид (c — скорость света):

$$\text{(1.11)}\qquad \overline{Э}_4=\frac{Э_4+(v/c)\,Э_1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},\quad \overline{Э}_2=Э_2$$

$$\overline{Э}_1=\frac{(v/c)\,Э_4+Э_1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},\quad \overline{Э}_3=Э_3;\quad -c<v<c$$

Каждое такое преобразование Лоренца отвечает прямолинейному поступательному движению вдоль направления $Э_1$ с трехмерной скоростью v поступательного движения в плоскости π системы $\overline{Э}_1$, $\overline{Э}_4$ относительно системы $Э_1$, $Э_4$.

Формулы (1.11) дают преобразование от канонических ортонормированных единичных базисов $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$, $Э_4$ к каноническим ортонормированным единичным базисам $\overline{Э}_1$, $\overline{Э}_2$, $\overline{Э}_3$, $\overline{Э}_4$.

Введем теперь изотропные векторы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$, направленные по главным слившимся изотропным направлениям, определенные формулами

$$\text{(1.12)}\qquad \mathbf{Q}_1=\mathbf{u}+Э_1,\quad \mathbf{Q}_2=\mathbf{u}-Э_1$$

Так же как и векторы $\mathbf{u}$ и $Э_1$, векторы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ расположены в плоскости π. Плоскость π, направления векторов $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ и α, β в матрице $\mathbf{K}$ определены компонентами метрического тензора и соответственно компонентами тензора Вейля однозначно. Для разных канонических тетрад в силу преобразований (1.11) векторы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ определены неоднозначно, так как из формул (1.11) и (1.12) следуют равенства

$$\text{(1.13)}\qquad \overline{\mathbf{Q}}_1=\overline{\mathbf{u}}+\overline{Э}_1=(\mathbf{u}+Э_1)\lambda=\lambda\mathbf{Q}_1$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_2=\overline{\mathbf{u}}-\overline{Э}_1=(\mathbf{u}-Э_1)\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{Q}_2,\quad \lambda=\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

где скалярный параметр λ согласно преобразованию (1.11) равносилен параметру v/c и может принимать различные значения от нуля до $+\infty$.

Из формул (1.12) следует тождественно выполняющееся в каждой точке пространства скалярное равенство: $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\overline{\mathbf{Q}}_1\overline{\mathbf{Q}}_2=2$. При $v/c=0$ и соответственно при $\lambda=1$ из (1.11) имеем $\overline{Э}_4=Э_4$ и $\overline{Э}_1=Э_1$. Таким образом, формулы преобразования (1.11) связаны с исходными векторами $Э_4$ и $Э_1$ со значением $\lambda=1$.

Рассмотрим теперь геометрическое место концов векторов $\overline{\mathbf{u}}=\overline{Э}_4$ для тетрад А. З. Петрова в фиксированной точке пространства. Так как эта система тетрад и соответственно векторов $\overline{\mathbf{u}}$ зависит только от одного параметра, то это геометрическое место, являющееся в типе D упрощенным примером множества ε (двумерного в типе N), представляет собой кривую, расположенную в плоскости π. Очевидно, что в разных точках пространства D плоскость π различна, но эта кривая в каждой и известной плоскости π будет одна и та же.

Легко установить, что множество ε для типа D представляет собой в плоскости π гиперболу с известными асимптотами, отвечающими двум слившимся изотропным направлениям. Эта гипербола расположена так, что вектор $\bar{u}$ может быть любым единичным вектором, направленным в будущее между изотропными направлениями, определяемыми векторами $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$.

В каждой точке пространства типа D гиперболы, так же как и главные слившиеся изотропные направления и их содержащую плоскость π, можно указать непосредственно, когда компоненты метрического тензора в типе D известны в некоторой произвольно выбранной системе координат. С помощью этой системы координат в некоторой произвольной выделенной точке P можно задать произвольно некоторый времениподобный единичный вектор $\mathbf{u}_0$, лежащий в плоскости π, направленный в будущее и расположенный между слившимися изотропными направлениями $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$.

После условного фиксирования вектора $\mathbf{u}_0$, отвечающего значениям $v/c = 0$ или $\lambda = 1$, индивидуализацию точек гиперболы можно определить значениями λ или соответствующими значениями v/c в преобразованиях Лоренца (1.11), сохраняющих канонический вид матрицы $\mathbf{K}$.

Исходя из намеченного таким путем вектора $\mathbf{u}_0$ и соответствующей ему канонической тетрады T можно построить аналогичные канонические тетрады T' и векторы $\mathbf{u}_0'$ во всех точках P' данного пространства D и получить таким образом соответственно сопутствующую этому пространству систему отсчета. Более детально такое построение в малом можно произвести следующим образом. Пусть в двух бесконечно близких точках P и P' имеем плоскость π и π' и соответствующие гиперболы. Наряду с единичным вектором $\mathbf{u}_0$ в плоскости π и канонической тетрадой T с базисными векторами Э_i ($\text{Э}_4 = \mathbf{u}_0$) возьмем в точке P' плоскости π' произвольный единичный вектор $\mathbf{u}_0^*$ с соответствующей ему канонической тетрадой T^*, с базисными векторами Э_i^* ($\text{Э}_4^* = \mathbf{u}_0^*$). Перенесем тетраду T^* и ее базисные векторы Э_i^* из точки P' в бесконечно близкую точку P. Обозначим через L_{ij} элементы матриц $\mathbf{L}$ бесконечно малого преобразования Лоренца, связывающие векторы Э_i^* тетрады T^* с векторами Э_i тетрады T. Имеем

$$\text{Э}_i^* = L_i^k \text{Э}_k = E_i^s \Pi_s^k \text{Э}_k$$

где матрица Π_s^k определяет трехмерный поворот, а матрица преобразования E_i^s — поступательное движение вида (1.11). Как известно, матрицу $\mathbf{L} = \| L_i^k \|$ для бесконечно малого преобразования Лоренца можно представить в виде

$$L = \| \delta_i^k + \gamma_{\cdot il}^{k}\, dx^l \| = E\Pi = \| \Pi_s^k E_i^s \| = \| E_i^s \Pi_s^k \|$$

в котором

$$(1.14) \qquad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma_{\cdot 1l}^{4}\, dx^l \\ 0 & 1 & 0 & \gamma_{\cdot 2l}^{4}\, dx^l \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_{\cdot 3l}^{4}\, dx^l \\ \gamma_{\cdot 4l}^{1}\, dx^l & \gamma_{\cdot 4l}^{2}\, dx^l & \gamma_{\cdot 4l}^{3}\, dx^l & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\Pi = \begin{Vmatrix} 1 & \gamma_{\cdot 1l}^{2}\, dx^l & \gamma_{\cdot 1l}^{3}\, dx^l & 0 \\ \gamma_{\cdot 2l}^{1}\, dx^l & 1 & \gamma_{\cdot 2l}^{3}\, dx^l & 0 \\ \gamma_{\cdot 3l}^{1}\, dx^l & \gamma_{\cdot 3l}^{2}\, dx^l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

где вектор $\mathbf{PP}' = d\mathbf{r} = dx^l Э_l = dx^k Э_k^*$, $\gamma^k{}_{.il}$ — символы Риччи, причем $\gamma_{kil} = -\gamma_{ikl}$.

Матрица П определяет бесконечно малый чисто пространственный поворот, совмещающий между собой плоскости π и π' и соответствующие гиперболы, а матрица E определяет относительное поступательное движение вдоль гиперболы базисов $Э_1$, $Э_4 = \mathbf{u}_0$ и $Э_1^*$, $Э_4^* = \mathbf{u}^*$ и зависит только от выбора $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}^*$.

Обозначим через $\| E_j{}^{*i} \| = E^*$ матрицу бесконечно малого преобразования Лоренца в плоскости π', обратного преобразованию E: $E_j{}^{*i} E_i{}^s = \delta_j{}^s$. Если теперь положить

$$(1.15) \qquad Э_j' = E_j{}^{*i} \overset{*}{Э}_i = E^*{}_j{}^i E_i{}^s \Pi_s{}^k Э_k = \Pi_j{}^k Э_k$$

то независимо от выбора первоначального вектора $\mathbf{u}^*$ и базисов $Э_i^*$ в плоскости π' каноническую тетраду $Э_i'$ и вектор $Э_4' = \mathbf{u}'$, взятые в точке P', можно рассматривать как соответствующие тетраде T и вектору $\mathbf{u}_0$ в точке P. Тетрады T и T' связаны бесконечно малым поворотом, при котором совмещаются плоскости π и π'. Эти повороты зависят только от вектора $d\mathbf{r}$ и не зависят от выбора первоначального вектора $\mathbf{u}_0$ и, следовательно, от значений параметров v/c или λ, индивидуализирующих точки на гиперболах в плоскостях π и π'.

В силу (1.14) и (1.15) получается, что для бесконечно близких точек P и P' в соответствующих канонических тетрадах верно равенство $u^i = u'^i$. Поэтому с точностью до малых высшего порядка в малой области вблизи точки P компоненты u^i, взятые в соседних канонических тетрадах, одинаковы и

$$(1.16) \qquad \partial u^i / \partial x^k = 0, \ \mathrm{div}_4 \mathbf{u} = \nabla_i u^i = 0$$

Очевидно, что равенства (1.16) верны в любой точке P пространства D и для каждой сопутствующей системы отсчета, построенной из любой точки P с любым указанного вида начальным единичным вектором $\mathbf{u}_0$.

В малом с точностью до малых первого порядка включительно по dx^l | в тетрадах, различающихся между собой в точках P и P', имеем согласно (1.15) $du^i/ds = 0$, где ds — элемент в метрической форме. Однако поле единичных векторов $\mathbf{u}$, построенное шаг за шагом с учетом нелинейных членов указанным способом с помощью канонических тетрад в конечной области пространства D, не получается с помощью параллельного перенесения выбранного исходного вектора $\mathbf{u}_0$ в некоторой точке P. В малом в соседних тетрадах имеем одинаковые u^i, поэтому $du^i/ds = 0$. Однако в общем случае в различных точках одной и той же мировой линии для некоторой сопутствующей системы отсчета ускорение $d\mathbf{u}/ds \neq 0$. Это легко установить, когда известны компоненты метрического тензора данного решения типа D. В связи с этим очевидно, что соответствующие мировые линии сопутствующих систем, на которых ускорения отличны от нуля, не являются геодезическими.

2. Рассмотрим еще некоторые общие выводы и различные представления метрической формы, касающиеся любым образом заданного поля четырехмерных скоростей $\mathbf{u}$ и сопутствующих им систем координат.

В глобальном виде метрическую форму в общем случае для неизотропных векторов $\mathbf{u}$ можно записать так:

$$(2.1) \qquad ds^2 = g_{44}(\eta^i)(d\eta^4)^2 + 2g_{\alpha 4}(\eta^i) d\eta^\alpha d\eta^4 + g_{\alpha\beta} d\eta^\alpha d\eta^\beta$$

или

(2.2) $$ds^2 = c^2dt^2 + 2g_{\hat{\alpha 4}}d\xi^\alpha dt + g_{\hat{\alpha\beta}}d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Здесь η^4, η^α и t, ξ^α, $\alpha = 1, 2, 3$ — лагранжевы координаты, связанные преобразованием вида

(2.3) $$t = f(\eta^\alpha, \eta^4),\ \xi^\beta = \Phi^\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3);\ \alpha,\ \beta = 1, 2, 3$$

Очевидно, что формулы (2.1) и (2.2) отвечают одному и тому же семейству мировых линий, определяемых одним и тем же заданным единичным векторным полем **u**.

Легко видеть, что вдоль каждой мировой линии при ξ^α и η^α постоянных дифференциал dt глобальной временной переменной равен приращению собственного времени. Выбор функции $f(\eta^\alpha, \eta^4)$ определяет также начало отсчета собственного времени на каждой мировой линии, а функции $\Phi^\beta(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ могут быть произвольными.

В общем случае компоненты g_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$, зависят от η^1, η^2, η^3 и η^4, а компоненты $g_{\hat{\alpha 4}}$ и $g_{\hat{\alpha\beta}}$ — от всех ξ^i.

Семейство сопутствующих мировых координатных линий $\xi^\alpha = \mathrm{const}$ или $\eta^\alpha = \mathrm{const}$ в виде зависимости координат η^i от t можно получить из (2.1) и (2.2) с помощью формулы (2.3).

Движение идеальной среды со скоростью **u** назовем стационарным, если в некоторой системе координат η^i все компоненты метрического тензора g_{ij} зависят только от η^1, η^2 и η^3 и, следовательно, не зависят от временной координаты η^4. Соответствующая форма метрики (2.1) и соответствующее движение могут указывать на наличие стационарности, но в форме метрики (2.2) для этого же движения компоненты $g_{\hat{\alpha 4}}$ и $g_{\hat{\alpha\beta}}$ могут зависеть от ξ^α и t.

В общем случае с помощью преобразований (2.3), сохраняющих систему отсчета, невозможно обратить в нуль все компоненты $g_{\hat{\alpha 4}}$. В самом деле, векторы четырехмерной скорости **u** и четырехмерного ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/ds$ представляют собой инвариантные геометрические характеристики данных сопутствующих мировых линий. С другой стороны, в системе координат, отвечающей форме метрики (2.2), в локальной инерциальной собственной системе координат с ортонормированными базисными векторами $\bar{Э}_\alpha$, $\bar{Э}_4$ в любой точке M имеем $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_\alpha \bar{Э}^\alpha + \bar{u}_4 \bar{Э}^4$, где $\bar{u}_\alpha = \bar{u}^k g_{\hat{\alpha k}} = g_{\hat{\alpha 4}}$, так как

(2.4) $$\bar{u}^4 = 1,\ \bar{u}^\beta = 0$$

а ввиду инерциальности тетрады $\bar{Э}_i$ получим

(2.5) $$\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{ds} = \frac{d\bar{u}_\alpha}{ds}\bar{Э}^\alpha = \frac{\partial g_{\hat{\alpha 4}}(t, \xi^\alpha)}{c\,\partial t}\bar{Э}^\alpha$$

Поэтому, если мировые линии негеодезические, то ускорение $\mathbf{a} \neq 0$, и, следовательно, согласно (2.5) обязательно в сопутствующей системе отсчета $g_{\hat{\alpha 4}} \neq 0$. Если компоненты $g_{\hat{\alpha 4}}$ в (2.2) не зависят от глобального времени t, то мировые линии геодезические. Если $g_{ij}(\eta^\alpha)$ зависит только от η^α, то имеет место стационарность, но мировые линии $\eta^\alpha = \mathrm{const}$, вообще говоря, не являются геодезическими.

Если мировые линии геодезические, то $dg_{\hat{\alpha 4}}/dt = 0$, но и в этом случае компоненты $g_{\hat{\alpha 4}}$ можно преобразованием вида (2.3) обратить в нуль только при выполнении условия интегрируемости

(2.6) $$\frac{\partial g_{\hat{\alpha}4}}{\partial \xi^{\beta}} - \frac{\partial g_{\hat{\beta}4}}{\partial \xi^{\alpha}} = 0$$

иначе говоря, если соответствующее поле скоростей с компонентами u_α — безвихревое.

Располагая полем скоростей $\mathbf{u}$, можно в каждой точке пространства определить и вычислить различные механические характеристики потока соответствующей идеальной среды, отвечающей полю скоростей $\mathbf{u}$ в каждой точке пространства.

Дадим теперь кинематическую интерпретацию инварианта $\nabla_i u^i$. В введенной выше локально инерциальной тетраде, отвечающей формуле (2.4), имеем

(2.7) $$ds^2 = dx^{4^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}, \quad dx^4 = c\,dt$$

$$\nabla_i u^i = \frac{\partial u^4}{\partial x^4} + \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3}$$

Введем теперь трехмерную скорость $\mathbf{v}$ точек, $\mathbf{v} = v^\alpha \overline{\mathcal{E}}_\alpha$ в трехмерном пространстве в локальной собственной системе координат, введенной в в точке M. По определению, в точке M имеем $u_\alpha = 0$ и $v_\alpha = 0$; в соседних бесконечно близких точках M', вообще говоря, $u_\alpha \neq 0$ и $v_\alpha \neq 0$.

Учтем известные формулы

(2.8) $$\frac{dt}{ds} = u^4 = \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

где c — скорость света. На основании (2.8) из формулы (2.7) в точке M получим

(2.9) $$\nabla_i u^i\, dV_4 = \frac{1}{c}\operatorname{div}_{x^\alpha}\mathbf{v}\, dV_4 = \frac{dV_3' - dV_3}{dV_3 c\, dt}\, dV_4 = dV_3' - dV_3$$

так как можно принять, что $dV_3 ds = dV_4 = dV_3 c dt$, где $ds = c dt$ и dt — элемент приращения собственного времени на мировой линии, проходящей через точку M. Здесь dV_3— бесконечно малый элемент трехмерного объема, ортогональный к мировой линии в точке M, а dV_3' — тот же деформированный «жидкий объем» на той же мировой линии при его смещении в течение собственного времени dt. В общем случае для dV_3 можно воспользоваться формулой вида

(2.10) $$dV_3 = \left| g_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha 4} g_{\beta 4}}{g_{44}} \right|^{1/2} d\eta^1\, d\eta^2\, d\eta^3$$

где под корнем стоит известный детерминант. Соответствующая формула верна и для dV_3'.

Если движение со скоростями $\mathbf{u}$ стационарно, то все g_{ij} не зависят от η^4, и поэтому $dV_3' = dV_3$. Следовательно, если движение идеальной среды вдоль мировой линии стационарно, то на основании равенств (2.9) получим

(2.11) $$\nabla_i u^i = 0$$

Однако в этом случае, как и в общем случае после преобразования формулы (2.1) к виду (2.2), получим, что компоненты $g_{4\hat{\alpha}}$ и $g_{\hat{\alpha}\beta}$ будут зависеть не только от ξ^α, но и от $\xi^4 = t$, поэтому в стационарных движениях

$$u^{\wedge k} \nabla_{\hat{k}} u^{\wedge i} \neq 0, \quad d\mathbf{u}/ds = \mathbf{a} \neq 0$$

Для стационарных движений верно равенство (2.11), но мировые линии, вообще говоря, не являются геодезическими. Очевидно, что для стационарных движений в пространствах любых типов по классификации А. З. Петрова для любых сопутствующих систем отсчета в каждой точке пространства верно равенство $\nabla_i u^i = 0$.

3. Всевозможные решения типа D в вакууме для компонент метрического тензора g_{ij} известны и опубликованы в работе [15]. Из общих свойств симметрии пространства типа D в вакууме следует, что всегда можно указать такую систему координат, в которой компоненты g_{ij} зависят только от двух координат. Если g_{ij} зависят только от x^1 и x^2, то всякая сопутствующая система координат и соответствующее этой системе отсчета поле скоростей $\mathbf{u}$ стационарны. Отсюда следует, что для определения стационарного поля скоростей $\mathbf{u}$ в типе D достаточно, руководствуясь свойствами симметрии, привести метрику (2.1) к виду, в котором компоненты g_{ij} не зависят от x^4.

Выше для пространств типа D были построены серии сопутствующих систем отсчета, зависящих от одного параметра. Очевидно, что для всех мировых линий в этих системах в любых координатах верно равенство $\nabla_i u^i = 0$. Отсюда следует, что в решениях типа D, таких, как решение Шварцшильда, Керра вне гравитационной сферы, где движение установившееся, в построенных сопутствующих системах отсчета имеем $\nabla_i u^i = 0$.

В типах T_1, T_2, T_3 векторное поле $\mathbf{u}$ и сопутствующие системы отсчета определены единственным образом [3, 4, 16], в типах D, N и O векторные поля $\mathbf{u}$ и сопутствующие системы отсчета не определены единственным образом, но во всех случаях величина $\nabla_i u^i$ в каждой точке пространства определена единственным способом.

Формула (2.9) дает простую геометрическую интерпретацию для изменения субстационального трехмерного объема с точки зрения потока индивидуализированных точек с четырехмерной скоростью $\mathbf{u}$, что является инвариантной характеристикой пространства Римана и геометрически инвариантным свойством гравитационных полей в пустоте в общей теории относительности.

Из единственности определения $\nabla_i u^i$ следует единственность изменения $dV_3' - dV_3$ вдоль введенных выше сопутствующих мировых линий.

Все предыдущие выводы касаются внутренних геометрических свойств пространства Римана, связанных с тензором Вейля. Введенные сопутствующие системы определены с помощью тензора четвертого ранга Вейля, обладающего известными свойствами симметрии и известными типами канонических матриц в различных вырожденных случаях. Таким образом, выше развита чисто математическая, геометрическая теория для четырехмерного псевдориманова пространства и введены инвариантные системы отсчета, определяемые тензором Вейля. Полученные выше результаты представляют математический интерес сами по себе и не связаны с какими-либо допущениями или утверждениями физической природы. Но найденные системы отсчета можно рассматривать как обобщение инерциальных систем отсчета для пространства Минковского, а их характеристики можно положить в основу физических допущений, связанных с определением энергии и тензора энергии импульса гравитационных полей, рассматриваемых в римановом пространстве, когда тензор Риччи равен нулю, т. е. $R_{ij} = 0$.

4. Для получения выводов динамической природы целесообразно исходить из интегрального базового вариационного уравнения, представляющего собой для бесконечно малого элемента объема пространства, среды и соответствующих полей прямое следствие вариационной формулировки в малом первого и второго начал термодинамики [17—22]

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda\, dV_4 + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{4.1}$$

Лагранжиан Λ представляет собой скалярную функцию, которую можно рассматривать как полную, со знаком минус, удельную энергию рассматриваемой системы, член δW^* обусловлен наличием необратимых эффектов и внешними объемными взаимодействиями, а определенный из уравнения (4.1) виртуальный функционал δW представляет собой поверхностный интеграл по граничной поверхности Σ, ограничивающей произвольную область объема V_4 при интегрировании непрерывных характерных функций физических явлений.

Обычно в проблемах определения энергии и тензора энергии — импульса гравитационного поля в общей теории относительности (ОТО) не уделяется должного внимания следующим вопросам:

1) самому физическому смыслу вариационного уравнения (4.1), которое, как правило, используется в постулируемых формулировках частного вида;

2) анализу возможных выражений для плотности лагранжиана при фиксированных уравнениях Эйлера;

3) связи вариационного уравнения с уравнением энергии для бесконечно малых индивидуализированных объектов и вопросам об индивидуализации элементов рассматриваемой системы вообще;

4) физическому смыслу тензора энергии—импульса как физической характеристике, фигурирующей в уравнении энергии для индивидуализированных бесконечно малых объемов;

5) смыслу дивергентного члена в выражении для лагранжиана, не влияющего на уравнения Эйлера, но влияющего на выражение для тензора энергии импульса.

Как известно, уравнения Эйлера, выводимые из (4.1), остаются неизменными, если включить в Λ аддитивный член вида $-\nabla_i \Omega^i$, иначе, если вместо Λ взять

$$\Lambda' = \Lambda - \nabla_i \Omega^i \tag{4.2}$$

где Ω^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — некоторые функции координат, для которых формально математически образованное выражение $\nabla_i \Omega^i$ может вообще и не быть скаляром. Для скалярности этого выражения достаточно, чтобы Ω^i представляли собой компоненты некоторого вектора $\mathbf{\Omega} = \Omega^i Э_i$.

Если $\nabla_i \Omega^i \neq 0$, то физически это значит, что можно ввести добавочную плотность энергии в рассматриваемой системе, которую в ОТО можно ввести как долю, соответствующую плотности энергии поля и представляющую собой физическую характеристику четырехмерного пространства Римана, моделирующего физическое пространство в природе. По основному физическому смыслу энергии, связанному с ковариантностью законов физики, величины Λ и $\nabla_i \Omega^i$ должны быть четырехмерными скалярами.

Важно, что скалярная плотность доли энергии $\nabla_i \Omega^i$ должна представляться геометрическими свойствами, и ее можно ввести в разных примерах ОТО, вообще говоря, независимо от Λ, определяющего уравнения Эйлера и содержащего энергию вещества, электромагнитного поля и другие члены, обусловленных геометрией риманова пространства, которые обращаются в нуль в пустоте.

Так, например, в классической ОТО для Λ очень часто принимается формула

$$\Lambda = -\frac{R}{2\varkappa} - U_m$$

где R — полная кривизна четырехмерного риманова пространства, а U_m — удельная энергия вещества, отнесенная к четырехмерному объему, $\varkappa$ — гравитационная постоянная. В силу уравнений Эйлера в пустоте, т. е. когда $U_m = 0$, получается, что $R = 0$ и $\Lambda = 0$. Так как уравнение (4.1) при $\delta W^* \neq 0$ представляет собой вариационную формулировку первого начала термодинамики, в котором, как уже было отмечено выше, $-\Lambda$ является удельной локальной энергии, равенство $\Lambda = 0$ при $\delta W^* = 0$ противоречит основным физическим представлениям о наличии энергии у гравитационного поля и представлениям о перенесении энергии гравитационными волнами.

Естественным выходом, восстанавливающим физический смысл первого начала термодинамики применительно к гравитационному полю в пустоте, является добавление к Λ в уравнении (4.1) инвариантно определенного члена вида $-\nabla_i\Omega^i$. Его присутствие определяет добавочную энергию $-\nabla_i\Omega^i dV_3$ и обуславливает появление добавочного члена δW_Ω, несущего в себе добавочное слагаемое в первоначальном выражении для тензора энергии — импульса, определяемого через Λ и δW^* в базовом уравнении (4.1). При этом основные уравнения Эйлера останутся без всякого изменения.

Наличие в первом интеграле в (4.1) добавочного члена $\int\limits_{V_4} \nabla_i\Omega^i dV_4$ не сказывается на уравнениях Эйлера, так как этот интеграл преобразуется в поверхностный по Σ, а при выводе уравнений Эйлера можно все вариации на Σ полагать равными нулю. Вектор $\Omega = \Omega^i Э_i$ вообще может зависеть от ряда добавочных внутренних параметров, влияющих на притоки энергии через Σ. Соответствующие внутренние параметры можно вводить в физических теориях, в которых вакуум наделяется некоторыми усложненными свойствами.

На основании уравнения (4.1) можно написать

$$-\delta \int\limits_{V_4} \nabla_i\Omega^i dV_4 + \delta W_\Omega = 0$$

Отсюда, если Ω^i зависит только от лагранжевых координат ξ^i, то $\delta\Omega^i = 0 = \partial\Omega^i + \delta x^j \nabla_j \Omega^i$ и верна формула

$$\delta W_\Omega = \int\limits_{\Sigma} P_j^{\ k} \delta x^j n_k \, d\sigma = \delta \int\limits_{V_4} \nabla_i\Omega^i dV_4$$

В этом случае определение δW_Ω сводится к определению $P_j^{\ k}$, компонент тензора, если $\nabla_i\Omega^i$ — скаляр. После проведения варьирования и соответствующих преобразований в рассматриваемом случае для слагаемой части компонент тензора энергии—импульса $P_j^{\ k}$ за счет δW_Ω (см. [17]) получим

(4.3) $\qquad P_j^{\ k} = \nabla_i\Omega^i \delta_j^k - \nabla_j\Omega^k$

В общем случае легко проверить, что

(4.4) $\qquad \nabla_k P_j^{\ k} = (\nabla_j\nabla_k - \nabla_k\nabla_j)\Omega^k = R^k_{\cdot mjk}\Omega^m = -R_{mj}\Omega^m.$

В пустоте, где $R_{mj} = 0$, получим $\nabla_k P_j^{\ k} = 0$. Из равенства (4.3) следует

(4.5) $\qquad P_4^{\ 4} = \nabla_\alpha\Omega^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$

Если положить $\Omega = I\mathbf{u}$, где I — некоторая функция от инвариантов тензора Вейля, то в сопутствующей вектору $\mathbf{u}$ системе отсчета получим

$$(4.6)\qquad \nabla_i \Omega^i = \nabla_i (Iu^i) = \frac{dI}{ds} + I\nabla_i u^i, \quad \nabla_4 \Omega^4 = \frac{dI}{ds} + I\nabla_4 u^4$$

Поэтому на основании (4.5), (4.6) в сопутствующей системе отсчета вектору $\mathbf{u}$ вдоль мировых линий верны равенства

$$(4.7)\qquad P_4{}^4 = \nabla_i (Iu^i) = I\nabla_i u^i = I\nabla_\alpha u^\alpha, \ \partial u^4/\partial t = 0$$

Из выражения (4.3) для $P_j{}^k$ и из дополнительного допущения о том, что в сопутствующей системе координат для индивидуализированных бесконечно малых объемов, стягивающихся в точку, вместе с равенством (4.7) должно быть

$$(4.8)\qquad P_4{}^4 = \nabla_i \Omega^i = \nabla_i I u^i = \frac{dI}{ds} + I\nabla_i u^i$$

Для согласования (4.7) и (4.8) требуется, чтобы вдоль каждой мировой линии выполнялось равенство

$$(4.9)\qquad dI/ds = 0$$

В этом случае получим

$$(4.10)\qquad P_4{}^4 dV_4 = I\nabla_\alpha u^\alpha dV_4 = I\,(dV_3' - dV_3)$$

так как $du^4/d\xi^4 = 0$.

Таким образом, из равенства (4.9) следует, что

$$(4.11)\qquad I\,(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = I\,(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$$

Очевидно, что равенство (4.11) будет выполнено в любых лагранжевых системах координат, если компоненты метрического тензора не зависят от η^4. В противном случае на основании (4.9) в каждом из типов T_1, T_2 и D, так же как и в типах T_3, N и O, надо взять в качестве инварианта I постоянный скаляр. Как было указано выше, в типах T_3, N, O инвариант I не может отличаться от постоянной.

Из (4.8) и (4.9) следует, что удельную рассчитанную на единицу четырехмерного объема энергию гравитационного поля в пустоте можно определить формулой

$$(4.12)\qquad P_4{}^4 = \varepsilon = \nabla_i I u^i = I\nabla_\alpha u^\alpha$$

где I — некоторая постоянная не только по временной координате, но, вообще говоря, и по пространственным координатам.

Из формулы (4.3) и (4.12) вытекает формула для тензора энергии импульса гравитационного поля в пустоте

$$P_j{}^k = I\,(\nabla_i u^i \delta_j{}^k - \nabla_j u^k) = I\nabla_i\,(u^i \delta_j{}^k - \delta_j{}^i u^k)$$

В макроскопической теориях о тензоре энергии—импульса при наличии вещества и электромагнитного поля можно опереться и на изложенные выше результаты.

В результате развитой выше математической и физически корректной теории для риманова пространства введены определенные самим пространством сопутствующие системы отсчета и формулы для компонент тензора энергии—импульса во всех возможных примерах гравитационных полей в пустоте.

Полученные формулы позволяют написать условия на сильных разрывах, могущих возникнуть внутри гравитационных полей, и могут использоваться для формулировок граничных условий.

Кроме введенных выше канонических сопутствующих систем, определенных только алгебраическими свойствами компонент тензора Вейля в каждом типе, можно вводить много других систем отсчета, отвечающих другим векторным полям $\mathbf{u}$.

Однако определение всяких других векторных полей $\mathbf{u}$ связано либо с использованием производных по x^i высшего порядка от компонент метрического тензора, либо с использованием каких-либо параметров, природа которых не определяется только и непосредственно локальными свойствами тензора Вейля для риманова пространства. Такого рода дополнительные параметры могут привести к существенным неравенствам $\nabla_i u^i \neq 0$ для сопутствующих систем отсчета в пространстве в типе D и Минковского, что однако никак нельзя рассматривать как характеристику этих пространств.

В заключение автор благодарит Г. А. Алексеева и А. В. Жукова, оказавших помощь при обсуждении результатов теории алгебраической классификации тензора Вейля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 6, с. 1311—1314.
2. *Седов Л. И.* О локальном уравнении энергии в гравитационном поле.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3, с. 568—571.
3. *Петров А. З.* Об одновременном приведении тензора и бивектора к каноническому виду.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1950, т. 110, кн. 3, с. 5—17.
4. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.
5. *Debever R.* Sur le tenseur de super-énergie.— C. r. Acad. sci., 1959, v. 249, No. 15, p. 1324—1326.
6. *Sachs R.* Gravitational waves in general relativity.— Proc. Roy. Soc. (London), 1961, v. A265, No. 1318, p. 309—338.
7. *Pirani F. A. E.* Introduction to gravitational radiation theory.— In: Lecture on General Relativity. 1964. V. 1. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1965, p. 249—373.
8. *Penrose R.* A spinor approach to general relativity.— Ann. Phys., 1960, v. 10, No. 2, p. 171—210.
9. *Newman E. T.*, *Penrose R.* An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients.— J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 566—578. Errata: J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 998.
10. *Алексеев Г. А.*, *Хлебников В. И.* Формализм Ньюмэна — Пэнроуза и его применение в общей теории относительности.— Физ. элементар. частиц и атом. ядра, 1978, т. 9, № 5, с. 790—870.
11. *Фролов В. П.* Метод Ньюмэна — Пэнроуза в общей теории относительности.— Тр. ФИАН им. П. Н. Лебедева, 1977, т. 96, с. 72—180.
12. *Мизнер Ч.*, *Торн К.*, *Уилер Дж.* Гравитация (пер. с англ.). М.: Мир, 1977, т. 1. 474 с.; т. 3. 510 с.
13. *Хокинг С.*, *Эллис Д.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977. 431 с.
14. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.
15. *Kinnersley W.* Type D vacuum metrics.— J. Math. Phys., 1969, v. 10, No. 7, p. 1195—1203.
16. *Жуков А. В.* О векторах и идеальных системах отсчета, определяемых тензором Вейля в гравитационном поле.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 1, с. 55—58.
17. *Седов Л. И.* О тензоре энергии импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах.— Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3, с. 519—522.
18. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— Успехи матем наук, 1965, т. 20, № 5, с. 121—180.
19. *Седов Л. И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 5, с. 771—785.
20. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
21. *Седов Л. И.* Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 3—14.
22. *Желнорович В. А.*, *Седов Л. И.* О вариационном выводе уравнений состояния для материальной среды и гравитационного поля.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5., с 771—780.

Москва

Поступила в редакцию
17.XII.1982