

УДК 539.3 : 534.1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПОВЕРХНОСТНОГО ИСТОЧНИКА В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Глушков Е. В.

На основании соотношений для потока энергии в упругой среде через поверхностные нагрузки и компоненты матрицы Грина получены формулы, удобные для расчета плотности и общего количества энергии, переносимой волнами разных типов через горизонтальную плоскость, боковую поверхность цилиндра и поверхность сферы большого радиуса, что позволяет провести полный расчет энергетического баланса вертикально-неоднородного полупространства.

При вибрационном просвечивании Земли важно знать распределение энергии между упругими волнами разных типов. Известные соотношения [1, 2] между энергией продольных, поперечных и релеевских волн получены для модели однородного упругого полупространства. Однако неоднородность земной коры обуславливает существенное перераспределение энергии между волнами разных типов и по разным направлениям. Аналогичная задача возникает при проектировании виброизолирующих покрытий из композитных материалов, многослойных конструкций, акустоэлектронных устройств на поверхностных волнах и т. п. Разработке методов ее решения посвящена данная работа.

1. Рассматривается упругое или вязкоупругое неоднородное полупространство ($-\infty \leq x, y \leq \infty, -\infty \leq z \leq 0$) с зависящими от глубины свойствами: $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. Здесь ρ — плотность, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ — коэффициенты Ляме среды, $\lambda_2 \leq 0$, $\mu_2 \leq 0$; $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ для упругой среды.

Установившиеся колебания среды $v = \text{Re} [ue^{-i\omega t}]$ вызваны поверхностными гармоническими нагрузками $\tau = \text{Re} [qe^{-i\omega t}]$, $(x, y) \in \Omega$, заданными в некоторой области Ω ; вне Ω поверхность среды свободна от напряжений; $u(x, y, z)$, $q(x, y)$ — комплексные амплитуды перемещений и поверхностных напряжений.

При изучении установившихся колебаний удобно брать в качестве меры изменения энергии в объеме ее изменение, осредненное за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ [3]

$$(1.1) \quad E = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial E_s}{\partial t} dt = \iint_S \rho_E dS$$

$$\rho_E = -\omega/2 \text{Im} (u \cdot \sigma), \quad \sigma = \lambda n \text{div} u + 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \mu (u \times \text{rot} u)$$

Здесь E_s — энергия, заключенная в некотором объеме среды, ограниченном поверхностью S , ρ_E — плотность потока энергии, σ — комплексная амплитуда вектора напряжений, возникающих на площадке с внешней нормалью n к поверхности S .

Перемещения среды u выражаются через поверхностные напряжения q [4]

$$(1.2) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z) Q(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = \{Q_1, Q_2, Q_3\} = \iint_{\Omega} q(x, y) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2, z) = \begin{vmatrix} -i(\alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N)/\alpha^2 & -i\alpha_1 \alpha_2 (M - N)/\alpha^2 & -i\alpha_1 P \\ -i\alpha_1 \alpha_2 (M - N)/\alpha^2 & -i(\alpha_1^2 N + \alpha_2^2 M)/\alpha^2 & -i\alpha_2 P \\ \alpha_1 S/\alpha^2 & \alpha_2 S/\alpha^2 & R \end{vmatrix}$$

Величины M, N, P, R, S — функции $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, z и определяются из краевых задач для систем дифференциальных уравнений с пере-

менными коэффициентами в случае непрерывно-неоднородных сред или с кусочно-постоянными — в случае многослойных.

Элементы матрицы K — функции, регулярные по α , z , имеют конечное число вещественных полюсов по переменной α и счетное число комплексных. Контуры интегрирования Γ_1 , Γ_2 , почти всюду совпадающие с вещественной осью и отклоняющиеся от нее только при обходе вещественных полюсов подынтегральных функций, выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения. Подробно о выборе контуров Γ_1 , Γ_2 и свойствах K см. [4].

Основная трудность при использовании представления (1.2) заключается в том, что при произвольной зависимости свойств среды от глубины невозможно выписать явный вид элементов матрицы K . Методы их построения, основанные на численном решении соответствующих краевых задач, подробно изложены ранее¹. Устойчивость этих методов обеспечивается предварительным выделением экспоненциальных и сильно осциллирующих составляющих решения в явном виде.

2. Пусть S — плоскость $z = \text{const}$, параллельная поверхности среды и расположенная на глубине z . Из (1.1), (1.2) после использования равенства Парсеваля и замены

$$\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \alpha_2 = \alpha \sin \gamma; 0 \leq \gamma \leq 2\pi, \alpha \in \Gamma$$

имеем

$$(2.1) \quad E = \frac{\omega}{2} \frac{1}{4\pi^2} \text{Im} \int_{\Gamma} G(\alpha, z) \alpha d\alpha$$

$$G(\alpha, z) = \int_0^{2\pi} (\Sigma \cdot U) d\gamma =$$

$$= F_1 [\mu (M' + S) M^* + ((\lambda + 2\mu) S'/\alpha^2 - \lambda M) S^*] + F_2 \mu N' N^* + \\ + F_3 [\alpha^2 \mu (R + P') P^* + ((\lambda + 2\mu) R' - \alpha^2 \lambda P) R^*] + \\ + F_4 [\mu (M' + S) P^* + ((\lambda + 2\mu) S'/\alpha^2 - \lambda M) R^*] + \\ + F_5 [\mu (R + P') M^* + ((\lambda + 2\mu) R'/\alpha^2 - \lambda P) S^*]$$

$$F_1 = \int_0^{2\pi} Q_{12} Q_{12}^* d\gamma, \quad F_2 = \int_0^{2\pi} Q_{21} Q_{21}^* d\gamma$$

$$F_3 = \int_0^{2\pi} Q_3 Q_3^* d\gamma, \quad F_4 = \int_0^{2\pi} Q_{12} Q_3^* d\gamma, \quad F_5 = \int_0^{2\pi} Q_3 Q_{12}^* d\gamma$$

$$Q_{12} = (\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2)/\alpha^2, \quad Q_{21} = (\alpha_2 Q_1 - \alpha_1 Q_2)/\alpha^2$$

(U , Σ — преобразование Фурье от u , σ). Звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины, сопряженные функции берутся от сопряженных аргументов α_1^* , α_2^* , α^* , штрихом обозначены производные по z .

Функция $G(\alpha, z)$ комплекснозначна в некоторой ограниченной области изменения α и имеет на вещественной оси двукратные полюса ξ_k , расположенные правее зоны комплекснозначности. Поэтому E можно разбить на две составляющие

$$(2.2) \quad E = E_V + E_R$$

$$E_V = \frac{\omega}{2} \frac{1}{4\pi^2} \text{Im} \int_0^{\infty} G(\alpha, z) \alpha d\alpha, \quad E_R = \frac{\omega}{2} \frac{1}{4\pi} \sum_k \text{res} G(\alpha, z) \alpha |_{\alpha=\xi_k}$$

¹ Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Расчет энергии упругих волн, возбуждаемых поверхностными источниками в стратифицированном полупространстве. — Ростов-на-Дону. Деп. в ВИНТИ 26 дек. 1981, № 5827-81, с. 30.

Здесь κ — верхняя граница зоны комплекснозначности; для однородного полупространства $\kappa = \rho\omega^2/\mu$, для слоя конечной толщины $\kappa = 0$ и $E_V \equiv 0$. Ниже показано, что E_V — энергия объемных волн, проходящих через плоскость $z = \text{const}$, E_R — энергия, переносимая через эту плоскость волнами релеевского типа.

Остановимся на выборе контура Γ . Воспользуемся принципом предельного поглощения [5]. Предположим, что внутреннее трение среды θ отлично от нуля. При этом полюса ξ_k элементов матрицы K , которые при $\theta = 0$ расположены на положительной части вещественной оси, становятся комплексными, смещаясь в верхнюю полуплоскость. Возможно также смещение одного из полюсов ξ_k в нижнюю полуплоскость, это имеет место для нерегулярных полюсов, которым соответствуют «обратные» волны (см. [4]).

Подынтегральная функция $G(\alpha, z)$ α в окрестности некоторого полюса ξ_k содержит составляющие

$$c_k/(\alpha - \xi_k), d_k/(\alpha - \xi_k^*); c_k, d_k = \text{const}$$

Если $\theta \neq 0$, то $G(\alpha, z)$ не имеет вещественных особенностей и контур Γ совпадает с вещественной осью. Устремим θ к нулю, деформировав контур Γ в местах выхода ξ_k на вещественную ось так, чтобы не произошло пересечения полюса с контуром. Контур Γ можно деформировать, так как $G(\alpha, z)$ — аналитическая функция. Составляющие подынтегральной функции вида $c_k/(\alpha - \xi_k)$ для регулярных полюсов обходятся контуром Γ снизу, а составляющие $d_k/(\alpha - \xi_k^*)$ — сверху (ξ_k^* смещается вниз), для нерегулярных полюсов — наоборот. Следовательно,

$$(2.3) \quad E_R = \frac{\omega}{2} \frac{1}{4\pi} \sum_k j_k (c_k - d_k)$$

($j_k = 1$ для регулярных полюсов, $j_k = -1$ — для нерегулярных). Таким образом, под Γ надо понимать набор контуров, каждый из которых выбирается отдельно для различных составляющих $G(\alpha, z)$ α .

При определении c_k, d_k возникает опасность отнести функции вида $(f^*)^* = f$ к несопряженным. При разложении этих функций в ряд Лорана для комплексных ξ получаются различные представления, например

$$\alpha = \xi + (\alpha - \xi), (\alpha^*)^* = \xi^* + (\alpha - \xi^*)$$

(ξ и ξ^* при $\theta \neq 0$ смещаются в противоположных направлениях). Поэтому при выводе (2.3) нельзя пользоваться правилом $(f^*)^* = f$, все звездочки необходимо сохранять до конца.

Представление (2.2) позволяет: определить количество энергии объемных и релеевских волн, поступающее от поверхностных источников в среду; изучить ее распределение между различными объемами среды, заключенными между плоскостями $z = z_1, z = z_2$, например, между различными слоями многослойной среды; проследить за влиянием свойств неоднородной среды на зависимость количества энергии, проходящей через плоскость $z = \text{const}$, от z и т. п.

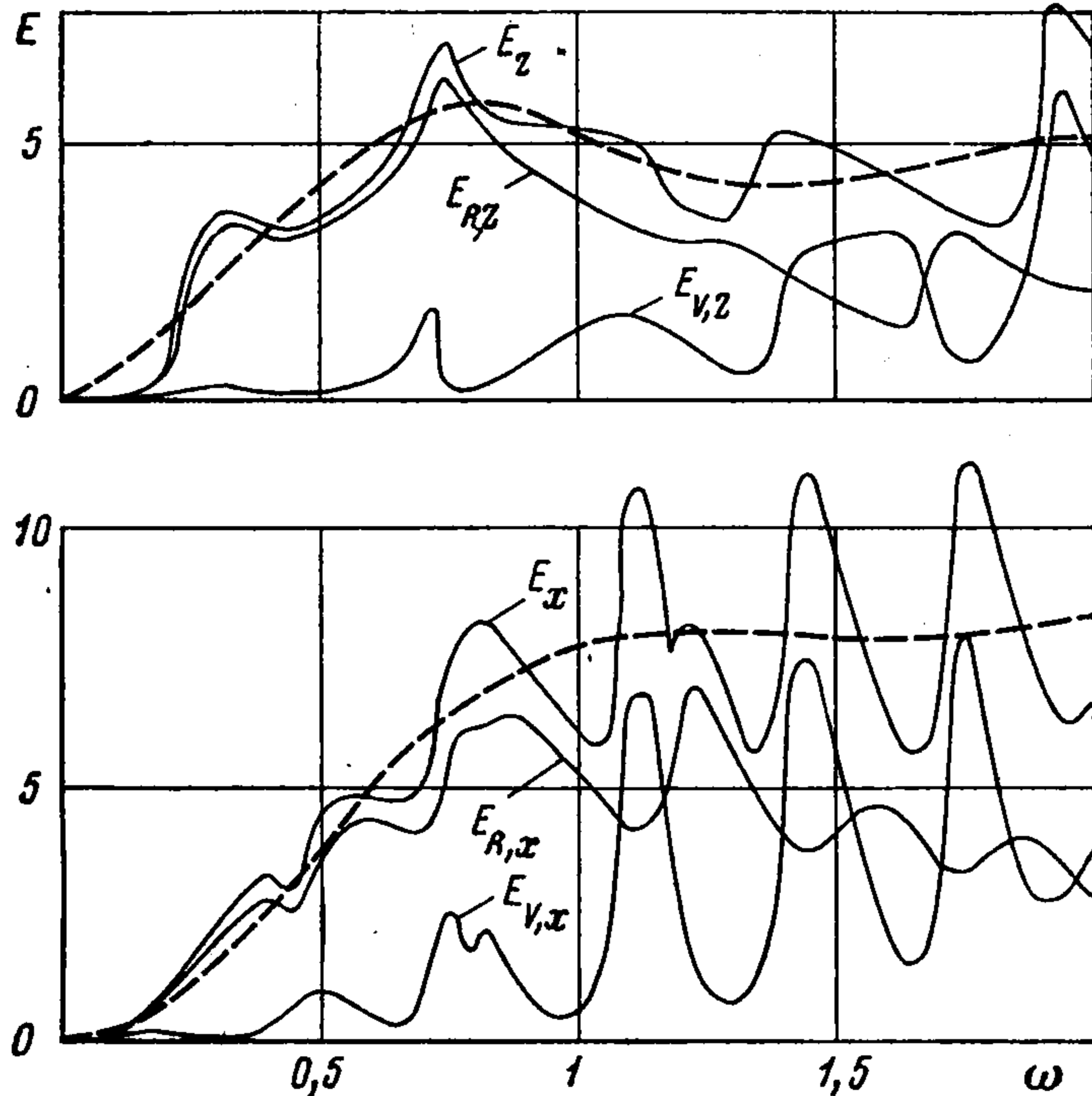
При проведении численных расчетов все физические величины были приведены к безразмерному виду. Поверхностные напряжения q и коэффициенты Ляме λ, μ отнесены к некоторому характерному значению модуля сдвига среды μ_0 , плотность ρ — к характерной плотности среды ρ_0 , линейные размеры — к характерному линейному размеру a . В этом случае в качестве частоты берется обобщенная частота $\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\rho_0}/\sqrt{\mu_0}$, силы задаются в $\mu_0 a^2$. Поток энергии за период $T = 2\pi/\bar{\omega}$ получается в единицах $E_0 = a^2 \mu_0^{3/2} \rho_0^{-1/2}$. В дальнейшем черта над ω опущена.

На фиг. 1 приведена зависимость от частоты энергии, поступающей в среду от нормальной (индекс z) и касательной (индекс x) нагрузки, равномерно распределенной в круге единичного радиуса; $E_{V,z}, E_{V,x}$ — часть энергии, идущая на объемные, $E_{R,z},$

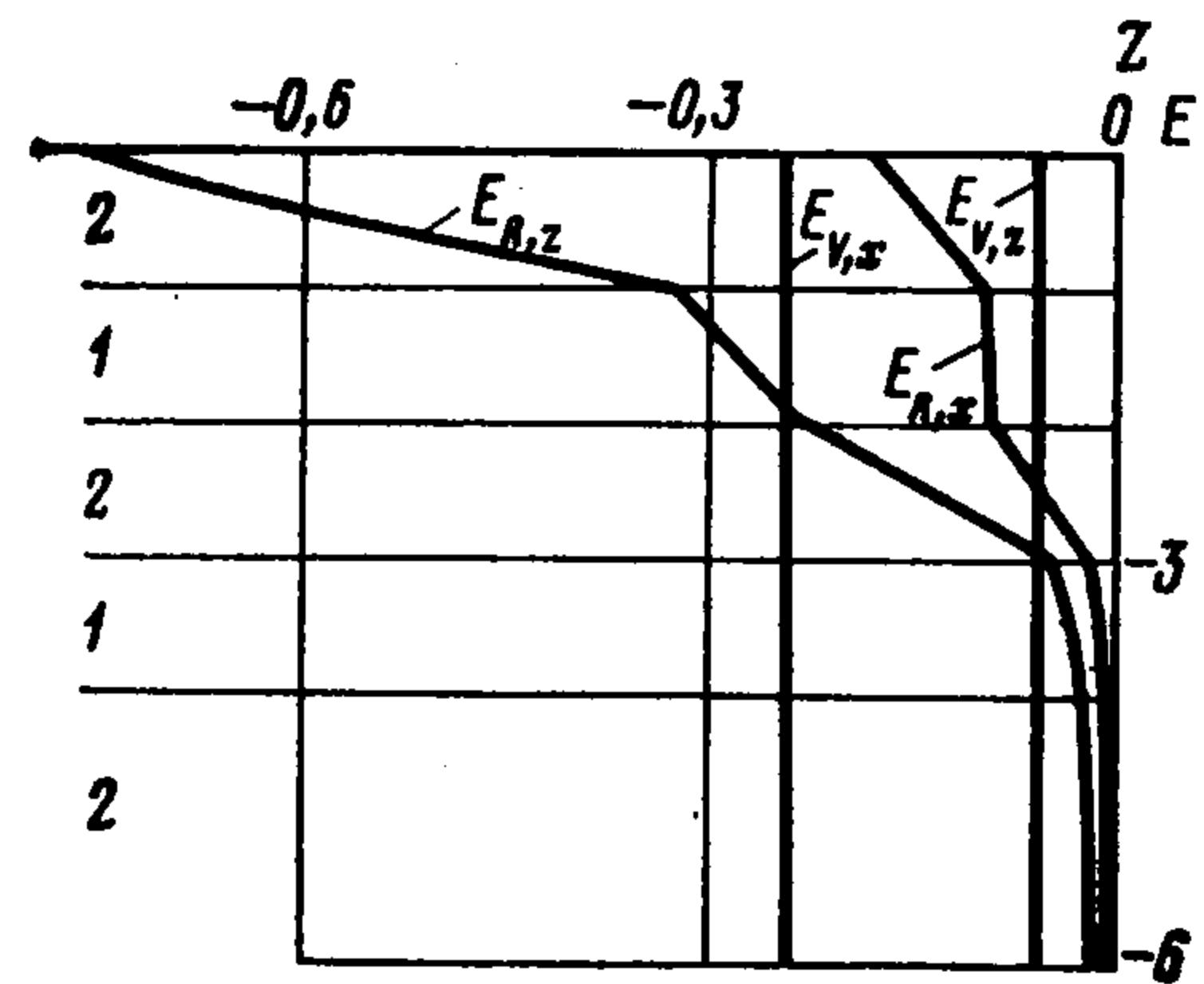
$E_{R,x}$ — на релеевские волны. Среда — упругое двуслойное полупространство толщины $h = 4$ с параметрами верхнего слоя $\lambda_1 = 0,08$, $\mu_1 = 0,08$, $\rho_1 = 0,5$ (среда 1) и нижнего полупространства $\lambda_2 = 10$, $\mu_2 = 1$, $\rho_2 = 1$ (среда 2), что соответствует следующему соотношению скоростей распространения продольных $v_{p,i}$ и поперечных $v_{s,i}$ ($i = 1, 2$) волн:

$$\frac{v_{s,1}}{v_{p,1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{v_{s,2}}{v_{p,2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{v_{p,1}}{v_{p,2}} = \frac{1}{5}$$

Штрихами на фиг. 1 дано значение энергии, поступающей в однородное полупространство со свойствами верхнего слоя.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 2 изображена зависимость от глубины z энергии объемных и релеевских волн, проходящих через плоскость $z = \text{const}$ в пятислойном полупространстве с толщинами верхних слоев $h_i = 1$ ($i = 1, \dots, 4$) и с регулярным чередованием свойств слоев (среда 2 — среда 1) $\omega = 0,5$. Видно, что энергия релеевских волн $E_{R,z}$, $E_{R,x}$ убывает по z , так как происходит отток энергии в горизонтальном направлении, в то время как энергия объемных волн остается постоянной.

3. Пусть S — боковая поверхность цилиндра радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2} \gg 1$, заключенная между плоскостями $z_1, z_2 = \text{const}$

$$(3.1) \quad E_R = \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \rho_R r d\varphi dz; \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

(ρ_R — плотность потока энергии через боковую поверхность цилиндра).
Перемещения u имеют асимптотическое представление²

$$(3.2) \quad u(x, y, z) = \sum_k a_k e^{i\zeta_k r} / \sqrt{r} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty$$

$$a_k(x, y, z) = \sqrt{\frac{i\zeta_k}{2\pi}} \text{res } K(-\alpha \cos \varphi, -\alpha \sin \varphi, \alpha, z) |_{\alpha=\zeta_k} \cdot B_k$$

где для осесимметричной функции $q(x, y)$

$$B_k = Q(\xi_k)$$

для неосесимметричной функции $q(x, y)$, $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

$$B_k = \int_{\Omega} \int q(\xi, \eta) e^{i\zeta_k(\rho-r)} \sqrt{\frac{r}{\rho}} d\xi d\eta$$

² Здесь и далее используются результаты работы, приведенной в сноске на стр. 95.

Исходя из (3.2) можно получить асимптотическое представление вектора напряжений σ , входящего в выражение для плотности энергии (1.1), если учесть, что

$$\mathbf{u} = \sum_k \mathbf{u}_k + O(r^{-3/2}), \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{a}_k e^{i\zeta_k r} / \sqrt{r}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = i \sum_k \zeta_k \mathbf{u}_k + O(r^{-3/2}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \sum_k \mathbf{u}_k' + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty$$

Производные (\mathbf{u}_k') по z вектора \mathbf{u}_k выражаются через M', N', P', R', S' — производные элементов матрицы K , которые определяются одновременно с самими функциями M, N, P, R, S .

Для вектора $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ имеем

$$\sigma = \sum_k (\lambda n \operatorname{div} \mathbf{u}_k + 2\mu i \zeta_k \mathbf{u}_k + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}_k)) + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_k = i \zeta_k (u_{k,1} \cos \varphi + u_{k,2} \sin \varphi) + u_{k,3}'$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_k = \mathbf{i} (i \zeta_k u_{k,3} - u_{k,2}') + \mathbf{j} (u_{k,1}' - i \zeta_k u_{k,3}) +$$

$$+ \mathbf{k} i \zeta_k (u_{k,2} - u_{k,1}); \quad \mathbf{u}_k = \{u_{k,1}, u_{k,2}, u_{k,3}\}$$

Подынтегральная функция в (3.1) при $r \rightarrow \infty$ — величина порядка единицы, так как $\mathbf{u}, \sigma \sim r^{-1/2}$ при $r \rightarrow \infty, z = \text{const}$.

Если S — нижняя полусфера радиуса $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg 1$, то (ρ_V — плотность потока энергии через полусферу)

$$(3.3) \quad E_V = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \rho_V R^2 \sin \psi d\psi d\varphi$$

Для $\psi \neq \pi/2, R \rightarrow \infty$ асимптотическое представление \mathbf{u} имеет вид

$$\mathbf{u} = \sum_{s=1}^2 \mathbf{u}_s + O(R^{-2}), \quad R \rightarrow \infty, \quad \mathbf{u}_s = \mathbf{b}_s e^{iR\kappa_s} / R$$

$$\mathbf{b}_s = \frac{i \cos \psi}{2\pi} K_s(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}) Q(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}) \boldsymbol{\kappa}_s$$

$$\alpha_{1,s} = -\kappa_s \sin \psi \cos \varphi, \quad \alpha_{2,s} = -\kappa_s \sin \psi \sin \varphi, \quad s = 1, 2$$

Предполагается, что матрица K имеет при $z \rightarrow -\infty$ представление

$$K(\alpha_1, \alpha_2, z) \sim \sum_{s=1}^2 K_s(\alpha_1, \alpha_2) e^{\sigma_s z}, \quad z \rightarrow -\infty$$

$$\sigma_s = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_s^2}, \quad \kappa_1^2 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\rho(z) \omega^2}{\lambda(z) + 2\mu(z)}, \quad \kappa_2^2 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\rho(z) \omega^2}{\mu(z)}$$

что справедливо, если λ, μ, ρ при $z \rightarrow -\infty$ стремятся к постоянным значениям или растут не более чем степенным образом.

Имеем

$$\sigma = \sum_{s=1}^2 \sigma_s + O(R^{-2}), \quad R \rightarrow \infty$$

$$\sigma_s = (\lambda n d_s + 2i\mu \kappa_s \mathbf{b}_s + \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_s)) e^{iR\kappa_s} / R$$

$$d_s = i\kappa_s [\sin \psi (b_{s,1} \cos \varphi + b_{s,2} \sin \varphi) + b_{s,3} \cos \psi]$$

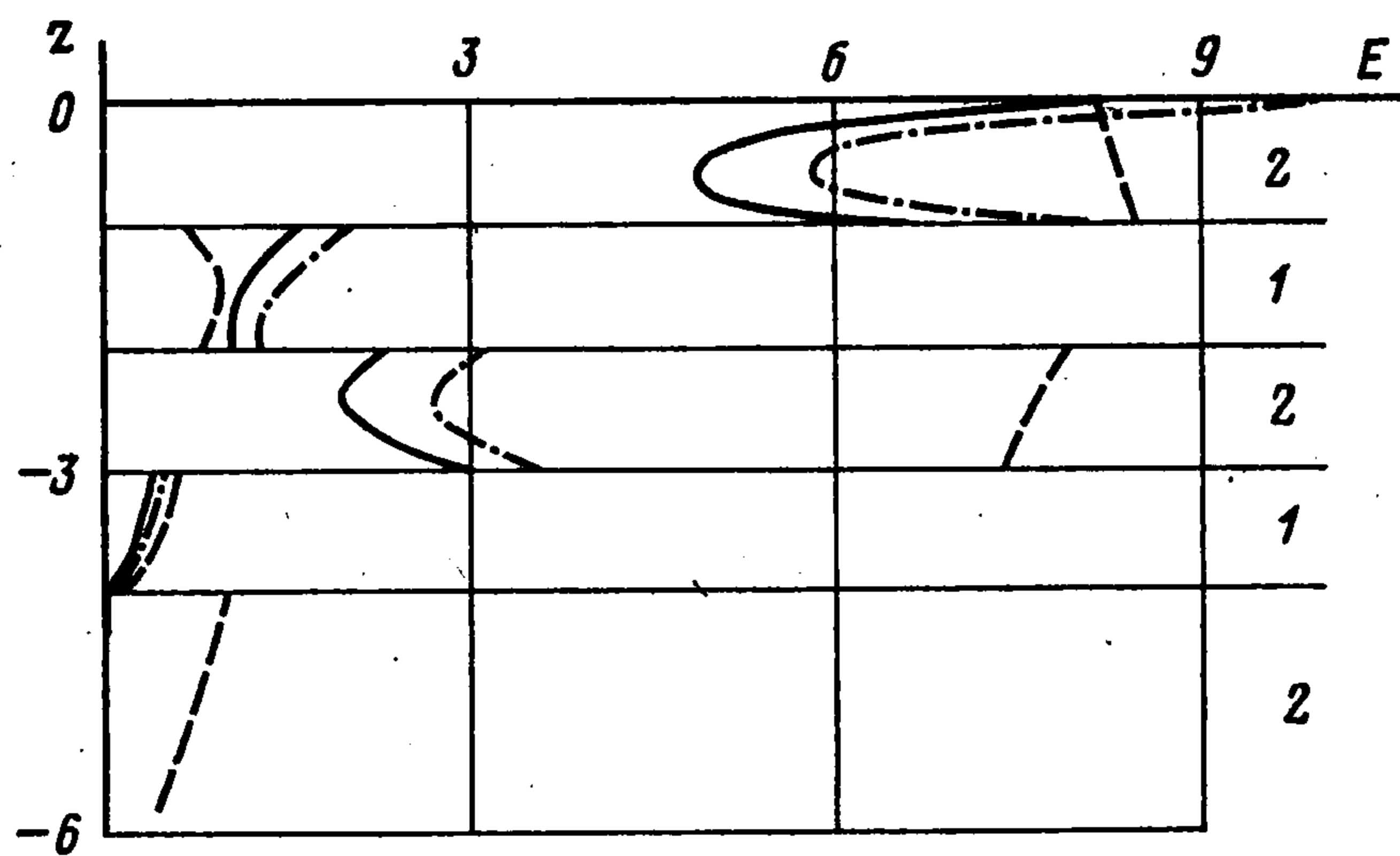
$$\mathbf{r}_s = [\mathbf{i} (b_{s,3} \sin \varphi \sin \psi - b_{s,2} \cos \psi) + \mathbf{j} (b_{s,1} \cos \psi -$$

$$- b_{s,3} \cos \varphi \sin \psi) + \mathbf{k} \sin \psi (b_{s,2} \cos \varphi - b_{s,1} \sin \varphi)] i\kappa_s$$

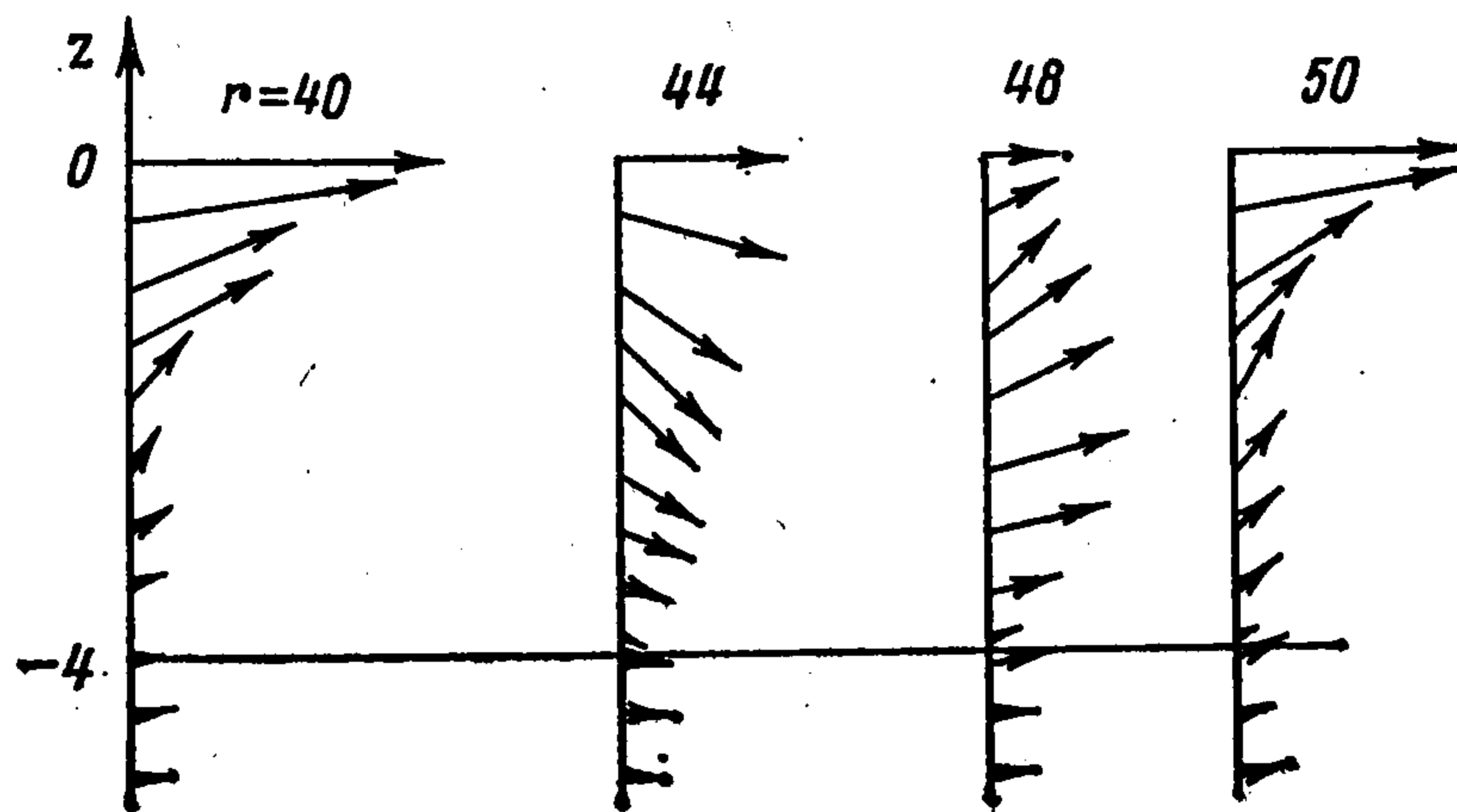
$$\mathbf{b}_s = \{b_{s,1}, b_{s,2}, b_{s,3}\}$$

Здесь $\mathbf{u}, \sigma \sim R^{-1}, R \rightarrow \infty$, поэтому подынтегральная функция в (3.3) $\rho_V R^2 \sim 1, R \rightarrow \infty$.

Итак, в силу использованных асимптотических представлений ρ_V — плотность энергии объемных, ρ_R — релеевских волн. Так как $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ —



Фиг. 3



Фиг. 4

соответственно продольные и поперечные волны, то $\rho_{V,p} = 1/2 \omega \operatorname{Im}(\sigma_1, u_1)$ и $\rho_{V,s} = 1/2 \omega \operatorname{Im}(\sigma_2, u_2)$ — плотность энергии продольных и поперечных волн соответственно.

В упругом неоднородном полупространстве с точностью до слагаемых, стремящихся к нулю при $R, r \rightarrow \infty$, энергия через боковую поверхность цилиндра переносится релеевскими, а через поверхность нижней полусферы — объемными волнами. Действительно, можно показать, что для волн релеевского типа при $R \rightarrow \infty, \psi > \pi/2$ справедливо $u \sim e^{-cR}, c > 0$, а для объемных волн при $r \rightarrow \infty, z = \text{const}$ имеем $u \sim r^{-2/2}$. Отсюда $\rho_V r \sim r^{-2}, r \rightarrow \infty, \rho_R R^2 \sim e^{-cR}, R \rightarrow \infty$.

Проведенные расчеты показали, что энергия объемных волн E_V , вычисленная по формуле (3.3) путем интегрирования плотности энергии продольных и поперечных волн по поверхности нижней полусферы, совпадает с величиной E_V , полученной интегрированием от нуля до ∞ (формула (2.2)), а энергия релеевских волн E_R , рассчитанная по (3.1) интегрированием плотности энергии релеевских волн по боковой поверхности цилиндра, совпадает с величиной E_R , полученной как сумма вычетов (см. (2.2)).

В дальней от источника зоне с использованием (3.1), (3.3) можно построить выражения для плотности энергии объемных ρ_V и релеевских ρ_R волн не только в направлении, определяемом нормалью к рассматриваемой поверхности, но и в двух ортогональных к этой нормали и между собой направлениях. Для этого достаточно в выражении для плотности энергии взять соответствующее направление нормали n . Три получившиеся величины являются проекциями вектора плотности энергии ρ на три выбранных направления. Этот вектор (вектор Умова) определяет количество и направление переноса энергии через данную точку среды.

На фиг. 3 изображена зависимость плотности энергии релеевских волн ρ_R от глубины z при $r \gg 1$ в том же пятислойном полупространстве, что и для фиг. 2, $\omega = 0,5$, $\rho_{R,x}$ — касательный источник, $\rho_{R,z}$ — вертикальный. Сплошные линии соответствуют $r\rho_{R,x} \times 5 \times 10^2$, $\varphi = 0$, штриховые — $r\rho_{R,x} \times 5 \cdot 10^2$, $\varphi = \pi/2$, штрихпунктирные — $r\rho_{R,z} \times 10^2$. Видно, что в более жестких слоях (среда 2) плотность потока энергии больше, чем в мягких (среда 1), и растет в окрестности границ слоев, в то время как для однородного полупространства ρ_R монотонно убывает.

Результаты, приведенные на фиг. 3, не зависят от r . Это объясняется тем, что при $\omega = 0,5$ элементы матрицы K имеют только один полюс, дающий существенный вклад. Если число полюсов более одного, то картина распределения плотности энергии ρ_R по z различна для разных r , хотя общее количество энергии E_R , проходящей через боковую поверхность цилиндра, остается постоянным. Так, на фиг. 4 для различных расстояний r построены векторы $r\rho_R$ для касательного источника и направления $\varphi = \pi/2$. Среда — двуслойное полупространство, $h = 4$, $\omega = 0,5$.

Автор благодарит В. А. Бабешко, Ж. Ф. Зинченко, Н. В. Глушкову за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган С. Я. О сейсмической энергии, возбуждаемой источником, находящимся на поверхности. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 7, с. 1000—1013.
2. Miller G. F., Pursey H. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid. — Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955, v. 223, № 1192, p. 55—63.
3. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. — М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
4. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979. 320 с.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. 735 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
20.VII.1982