

УДК 532.522:534.1

О ВОЗНИКНОВЕНИИ АУТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ ФОРМОВАНИИ ВОЛОКОН

Ярин А. Л.

Методом многих масштабов исследуются нелинейные взаимодействия, приводящие к возникновению автоколебаний радиуса волокна при формовании. Показано, что автоколебания возбуждаются мягко; рассчитаны их амплитуда и частота вблизи точки бифуркации. Численно исследуется поведение волокна при значениях кратности вытяжки, существенно превосходящих критическое значение.

Экспериментальные данные [1, 2] показывают, что процесс формования теряет устойчивость, когда кратность вытяжки достигает некоторой критической величины; возникают периодические колебания радиуса и скорости волокна. Это явление получило название «резонанс при вытягивании». В линейном приближении показано [2—5], что стационарная вытяжка неустойчива, если кратность вытяжки превосходит критическое значение, равное 20, 22. Численные расчеты [2] продемонстрировали в соответствии с экспериментальными данными, что потеря устойчивости сопровождается рождением цикла — возбуждением автоколебаний.

1. Асимптотическое исследование. В процессе формования жидкая нить (волокно) поступает из фильеры, утоньшается при движении и на некотором расстоянии L от фильеры наматывается на приемную бобину. В модельных условиях поведение жидкости в волокне соответствует ньютоновскому реологическому соотношению. Описание движения в жидкой нити естественно вести в квазиодномерном приближении, пренебрегая силами инерции, веса, поверхностного натяжения и трения о воздух (вязкость жидкости считается настолько большой, что является доминирующим фактором). Уравнения неразрывности и количества движения имеют вид [6—8]

$$(1.1) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial a^2 V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0$$

Приняты следующие обозначения; t — время, x — расстояние, отсчитываемое вдоль волокна от отверстия фильеры, a — радиус волокна, V — продольная скорость на оси волокна.

В общем случае граничными условиями для уравнений (1.1) будут

$$x = 0, \quad a = \zeta_1(t), \quad V = \zeta_2(t); \quad x = L, \quad V = \zeta_3(t)$$

где $\zeta_i(t)$ — произвольные функции времени. Иначе говоря, возможно изменение со временем по произвольному закону радиуса и скорости волокна на выходе из фильеры, а также скорости наматывания на бобину. В стационарных условиях эти величины — заданные постоянные: $\zeta_1 = a^0$, $\zeta_2 = V^0$ и $\zeta_3 = V^1$. При этом кратность вытяжки $E = V^1/V^0$, а ее критическое значение будем обозначать E_* . Выбирая в качестве масштабов для t , x , a , V соответственно L/V^1 , L , a^0/\sqrt{E} , V^1 , сохраняем безразмерные уравнения задачи в форме (1.1), а их стационарное решение [6] (отмечено чертой) в безразмерном виде записывается так:

$$(1.2) \quad \bar{a} = E^{1/2(1-x)}, \quad \bar{V} = E^{(x-1)}$$

Введем в рассмотрение возмущения решения (1.2)

$$a = \bar{a} (1 + \varepsilon\alpha), \quad V = \bar{V} (1 + \varepsilon\beta), \quad \varepsilon \ll 1$$

Соответственно уравнения (1.1) преобразуются к виду

$$(1.3) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{V} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\bar{V}}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \varepsilon \bar{V} \left(\beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = 0$$

$$2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{1}{\ln E} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \varepsilon \left(\alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\ln E} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{1}{\ln E} \alpha \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) = 0$$

Поиск автоколебаний при формовании, возникающих вследствие потери устойчивости решения (1.2), сводится к исследованию задачи на собственные значения для системы (1.3) с граничными условиями

$$(1.4) \quad x = 0, \alpha = \beta = 0; \quad x = 1, \beta = 0$$

В этом случае возмущения вносятся между фильерой и бобиной: при $t = 0$ распределения радиуса и скорости вдоль волокна при заданном значении кратности вытяжки E отличаются от стационарных (1.2). Подобная ситуация может возникнуть, например, при увеличении скорости наматывания волокна на бобину в момент $t = 0$. Решая в линейном приближении задачу (1.3), (1.4), приходим к характеристическому уравнению для спектра собственных значений λ (решение ищется в виде $e^{\lambda t} F(x)$) [3—5]

$$(1.5) \quad - \int_0^1 \exp(\lambda E^{1-y} / \ln E) dy + \frac{\lambda}{\ln E} \int_0^1 \exp(\lambda E^{1-y} / \ln E) dy +$$

$$+ \frac{1}{\ln E} \left[\exp\left(\frac{\lambda}{\ln E}\right) - \exp\left(\frac{\lambda E}{\ln E}\right) \right] = 0$$

Все корни λ этого уравнения при $E < E_*$ имеют отрицательную действительную часть. При $E = E_* \approx 20,22$ уравнение (1.5) имеет два однократных чисто мнимых корня $\lambda = \pm i\omega = \pm i \cdot 0,693$. Вычисляя с помощью (1.5) величину $\operatorname{Re} \{\lambda\}$ вблизи точек $\lambda = \pm i\omega$, $E = E_*$, находим $\operatorname{Re} \{\lambda\} = 0,0053 (E - E_*)$. Следовательно, в линейном приближении при $E > E_*$ возмущения неограниченно нарастают, формование неустойчиво. Отметим, что характеристическое уравнение (1.5) при $20,22 < E < 49,98$ имеет всего два корня с $\operatorname{Re} \{\lambda\} > 0$; дальнейшее увеличение E ведет к появлению новых пар корней λ с положительной действительной частью.

Для того чтобы найти ограниченные незатухающие со временем решения задачи (1.3), (1.4), необходим учет нелинейных эффектов. В нелинейной постановке задача может быть аналитически решена вблизи критического значения E_* , когда $(E - E_*)$ — малая величина. В случае, когда $E \gtrsim E_*$, спектр линейной задачи (1.5) предсказывает медленное нарастание амплитуды колебаний по закону $\exp\{O[(E - E_*)t]\}$ и изменение их фазы на величину $O[(E - E_*)t]$; соответственно для комплексной амплитуды колебаний $A^{-1}dA/dt = O(E - E_*)$ — малая величина. Поэтому вводя в рассмотрение асимптотический ряд

$$(1.6) \quad E = E_* (1 + \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \dots), \quad E_i = O(1)$$

получаем, что изменение со временем искомого решения происходит не только в масштабе «быстрого» времени t , но и в масштабах набора «медленных» времен $T = \varepsilon t$, $T_1 = \varepsilon^2 t$, ... Слабая нелинейность системы (1.3) приводит к разделению процессов, происходящих в разных масштабах времени, в частности, рост и нелинейное ограничение амплитуды колебаний происходит в масштабах «медленных» времен. В качестве адекватной

техники отыскания автоколебательного решения нелинейной задачи используем метод многих масштабов [9], в котором времена t, T, T_1, \dots рассматриваются как независимые переменные. Этот метод подобно методу Крылова — Боголюбова — Митропольского [10] позволяет найти уравнения для амплитуды и фазы нелинейных колебаний в случае слабой нелинейности. Искомые функции представим в виде асимптотических рядов

$$(1.7) \quad \alpha = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \dots$$

Функции α_i и β_i порядка единицы; аргументами функций α, β, α_i и β_i служат x, t, T, T_1 .

Стационарное распределение скорости \bar{V} и входящий в (1.3) комплекс $1/\ln E$ представляются с учетом (1.6) в виде

$$(1.8) \quad \frac{1}{\ln E} = S_* + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots, \quad \bar{V}(x) = \bar{V}_*(x) + \varepsilon V_1(x) + \varepsilon^2 V_2(x) + \dots$$

$$S_* = \frac{1}{\ln E_*}, \quad S_1 = -\frac{E_1}{\ln^2 E_*}, \quad S_2 = \frac{1}{\ln^2 E_*} \left[\frac{E_1^2}{\ln E_*} - (E_2 - E_1^2/2) \right]$$

$$\bar{V}_* = E_*^{(x-1)}, \quad V_1 = \bar{V}_* E_1 (x-1),$$

$$V_2 = \left[\frac{(1-x)(2-x)}{2} E_1^2 + E_2 (x-1) \right] \bar{V}_*$$

Переходя в системе (1.3) к «быстрому» и «медленному» временам, с учетом (1.7) и (1.8) находим уравнения нулевого порядка по ε . Эти уравнения относительно α_0 и β_0 сводятся [3] к

$$(1.9) \quad \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial x^2} + E_*^{(1-x)} \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial x \partial t} = 0$$

причем функции α_0, β_0 , так же как α_i, β_i ($i > 0$), удовлетворяют граничным условиям (1.4). Решение уравнения (1.9), отвечающее незатухающим колебаниям, находится методом разделения переменных и имеет вид

$$(1.10) \quad \alpha_0 = A(T, T_1) e^{i\omega t} X(x) + A^*(T, T_1) e^{-i\omega t} X^*(x)$$

$$X(x) = \text{Ci}[g(x)] - \text{Ci}(\gamma) + i \{ \text{Si}[g(x)] - \text{Si}(\gamma) \}$$

$$g(x) = \omega S_* E_*^{1-x}, \quad \gamma = g(0)$$

Здесь в соответствии с (1.5) $\omega = 0,693$; звездочками отмечены комплексно-сопряженные функции; амплитуда A — произвольная функция «медленных» времен.

Остальные решения уравнения (1.9) со временем затухают. Соответствующее (1.10) решение для β_0 имеет вид

$$(1.11) \quad \beta_0 = A e^{i\omega t} Y(x) + A^* e^{-i\omega t} Y^*(x)$$

$$Y(x) = -2X + 2S_* \left\{ \frac{i\omega}{\bar{V}_*} X - S_*^{-1} \exp[ig(x)] + S_*^{-1} \exp(i\gamma) \right\}$$

Получив из (1.3) уравнения первого порядка по ε , преобразуем их с учетом (1.10) и (1.11) к виду

$$(1.12) \quad \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + E_*^{(1-x)} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial t} = Z e^{i\omega t} + Z^* e^{-i\omega t} + A^2 Z_1 e^{2i\omega t} +$$

$$+ A^{*2} Z_1^* e^{-2i\omega t} + A A^* Z_2$$

$$Z(x, T, T_1) = \left[-\frac{\partial A}{\partial T} + A i \omega E_1 (x-1) \right] \frac{X'}{\bar{V}_*}$$

$$Z_1(x) = \frac{f_1(x)}{2S_*} - \frac{1}{\bar{V}_*} \left[\bar{V}_*' \left(X'Y + \frac{1}{2} XY' \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{V}_* \left(X''Y + \frac{3}{2} X'Y' + \frac{1}{2} XY'' \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
Z_2(x) &= \frac{f_2(x)}{2S_*} - \frac{1}{\bar{V}_*} \left\{ \bar{V}_*' f_3(x) + \bar{V}_* [X''Y^* + X'Y^{*'} + X^{*''}Y + \right. \\
&+ X^{*'}Y' + \left. \frac{1}{2} (X^{*'}Y' + X^*Y'' + X'Y^{*'} + XY^{*''}) \right\} \\
f_1(x) &= XY' + 2X'Y + S_* (2X'Y' + XY'') \\
f_2(x) &= X^*Y' + XY^{*'} + 2(X'Y^* + X^{*'}Y) + \\
&+ S_* [2(X^{*'}Y' + X'Y^{*'}) + X^*Y'' + XY^{*''}] \\
f_3(x) &= X'Y^* + X^{*'}Y + \frac{1}{2} (X^*Y' + XY^{*'})
\end{aligned}$$

Здесь штрихами отмечены производные по x ; видно, что $Z_2(x)$ — действительная функция.

Найдя решение уравнения (1.12), а также соответствующее β_1 и удовлетворив граничным условиям, получим

$$\begin{aligned}
(1.13) \quad k_1 \frac{\partial A}{\partial T} + k_2 E_1 E_* A &= 0 \\
k_1 &= \left(S_* - \frac{1}{i\omega} \right) (e_1 - e_2) + S_* X(1) - S_* (e_1 - E_* e_2) \\
k_2 &= \frac{1}{E_*} (-i\omega S_* + 1) [S_* e_1 + (1 - S_*) e_2] + \\
&+ \frac{S_*}{E_*} (-2i\omega S_* + 1) X(1) + i\omega S_* [S_* e_1 / E_* + (1 - S_*) e_2] + \\
&+ S_* (e_1 - e_2) / E_* \\
e_1 &= \exp(i\gamma / E_*), \quad e_2 = \exp(i\gamma)
\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}
(1.14) \quad \alpha_1 &= B(T, T_1) e^{i\omega t} X(x) + B^*(T, T_1) e^{-i\omega t} X^*(x) + \\
&+ A^2 e^{2i\omega t} F_1(x) + A^{*2} e^{-2i\omega t} F_1^*(x) + AA^* F_2(x) \\
\beta_1 &= B(T, T_1) e^{i\omega t} Y(x) + B^*(T, T_1) e^{-i\omega t} Y^*(x) + \\
&+ A^2 e^{2i\omega t} Y_2(x) + A^{*2} e^{-2i\omega t} Y_2^*(x) + AA^* Y_3(x)
\end{aligned}$$

Здесь B — произвольная функция «медленных» времен; кроме того,

$$\begin{aligned}
(1.15) \quad P(x) &= -S_* \{ \text{Ci}[2g(x)] - \text{Ci}(2\gamma) + \text{Si}[2g(x)] - \text{Si}(2\gamma) \} \\
b_1 &= \left\{ -2 \int_0^1 Z_1(\xi) P_\xi^{*'} [P(1) - P(\xi)] d\xi + 4i\omega S_* \int_0^1 Z_1(\xi) P_\xi^{*'} \times \right. \\
&\times [P(1) - P(\xi)] d\xi + 2S_* P'(1) \int_0^1 Z_1(\xi) P_\xi^{*'} d\xi + \\
&+ 2S_* \left[X'Y + \frac{1}{2} XY' \right] \Big|_{x=1} - \int_0^1 f_1(y) dy \Big\} / \{ 2P(1) - 4S_* i\omega P(1) - \\
&- 2S_* P'(1) + 2S_* P'(0) \} \\
b_2 &= \frac{1}{2} \left[-2 \int_0^1 \int_0^y Z_2(\xi) d\xi dy + 2S_* \int_0^1 Z_2(\xi) d\xi + 2S_* f_3(1) - \right. \\
&\left. - \int_0^1 f_2(y) dy \right] \\
F_1(x) &= \int_0^x Z_1(\xi) P_\xi^{*'} [P(x) - P(\xi)] d\xi + b_1 P(x) \\
F_2(x) &= \int_0^x \int_0^y Z_2(\xi) d\xi dy + b_2 x
\end{aligned}$$

$$Y_2(x) = -2F_1 + \frac{4S_*i\omega}{V_*} F_1 + 2S_*F_1' + 2S_* \left(X'Y + \frac{1}{2} XY' \right) -$$

$$- \int_0^x f_1(y) dy - 2S_*F_1'(0)$$

$$Y_3(x) = -2F_2 + 2S_*F_2' + 2S_*f_3(x) - \int_0^x f_2(y) dy - 2S_*F_2'(0)$$

Заметим, что штрихом, сопровождаемым индексом ξ , у функций под интегралами в (1.15) обозначены производные по ξ ; число b_2 и функции $F_2(x)$ и $Y_3(x)$ — действительные.

Вычисляя с помощью (1.13) коэффициенты k_1 и k_2 , находим: $k_1 = -2,34 - i \cdot 5,37$, $k_2 = 0,155 - i \cdot 0,034$. Следовательно, функцией A , определяемой (1.13), будет

$$(1.16) \quad A(T, T_1) = C(T_1) \exp[(0,106 - i \cdot 0,538) TE_1]$$

($C(T_1)$ — произвольная функция). Выражение (1.16), естественно, описывает линейное поведение спектра (1.5) при переходе через критическое значение $E = E_*$. Поскольку ищется ограниченное автоколебательное решение, величина E_1 с учетом (1.16) должна быть равна нулю. Таким образом, амплитуда A искомого автоколебательного решения должна зависеть только от T_1 .

Отделив из (1.3) уравнения порядка ε^2 , преобразуем их с учетом (1.8), (1.10), (1.11), (1.14) и равенства $E_1 = 0$ к виду

$$(1.17) \quad \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} + E_*^{(1-x)} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial t} = \varphi_1 e^{i\omega t} + \varphi_1^* e^{-i\omega t} + \psi$$

$$\varphi_1(x, T, T_1) = \left[-\frac{\partial A}{\partial T_1} + Ai\omega E_2(x-1) - \frac{\partial B}{\partial T} \right] \frac{X'}{V_*} + A^2 A^* \varphi_2(x)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{f_4(x)}{2S_*} + \frac{f_5(x)}{2} - \frac{1}{V_*} \frac{\partial}{\partial x} [V_* f_6(x)]$$

$$f_4(x) = X^* Y_2' + XY_3' + F_2 Y' + F_1 Y^* + 2F_2' Y + 2F_1' Y^* +$$

$$+ 2X' Y_3 + 2X^* Y_2$$

$$f_5(x) = 2X' Y_3' + 2X^* Y_2' + 2Y' F_2' + 2F_1' Y^* + XY_3'' +$$

$$+ X^* Y_2'' + F_2 Y'' + F_1 Y^{*''}$$

$$f_6(x) = Y F_2' + Y^* F_1' + Y_3 X' + Y_2 X^* + \frac{1}{2} (XY_3' +$$

$$+ X^* Y_2' + F_2 Y' + F_1 Y^*)$$

Функция $\psi(x, t, T, T_1)$ включает в себя квадратичные и кубические гармоники по t , а также не зависящий от t член.

Ищем незатухающее решение уравнения (1.17) и соответствующему распределению β_2 , удовлетворяющее граничным условиям. В результате получаем, что должно быть $\partial B / \partial T = 0$, а также

$$(1.18) \quad k_1 \frac{dA}{dT_1} + k_2 E_2 E_* A + A^2 A^* \times$$

$$\times \left\{ -W(1) + [i\omega W(1) + W'(1)] S_* + \frac{R}{2} \right\} = 0$$

$$W(x) = S_*^2 \int_0^x \varphi_2(\xi) X_\xi^* [X(x) - X(\xi)] d\xi$$

$$R = 2S_* f_6(1) - \int_0^1 [f_4(y) + S_* f_5(y)] dy$$

Вводя в рассмотрение модуль и аргумент комплексной амплитуды $A = re^{iv}$ и вычисляя коэффициент при нелинейном члене в (1.18)

$$(1.19) \quad \frac{d\rho}{dT_1} = 0,106E_2\rho - 0,143\rho^3, \quad \frac{d\nu}{dT_1} = -0,538E_2 - 1,721\rho^2$$

Видно, что имеет место нормальная бифуркация рождения цикла. Автоколебания радиуса волокна («резонанс при вытягивании») возникают лишь в случае, когда $E > E_*$ ($E_2 > 0$), т. е. возбуждение автоколебаний мягкое. Относительное возмущение радиуса волокна $\alpha^0 = \varepsilon\alpha = 2\varepsilon\rho \operatorname{Re} \{X e^{i(\omega t + \nu)}\}$. Следовательно

$$(1.20) \quad \alpha^0|_{x=1} = 2\varepsilon\rho [-0,705 \cos(0,693t + \nu) + 1,39 \sin(0,693t + \nu)]$$

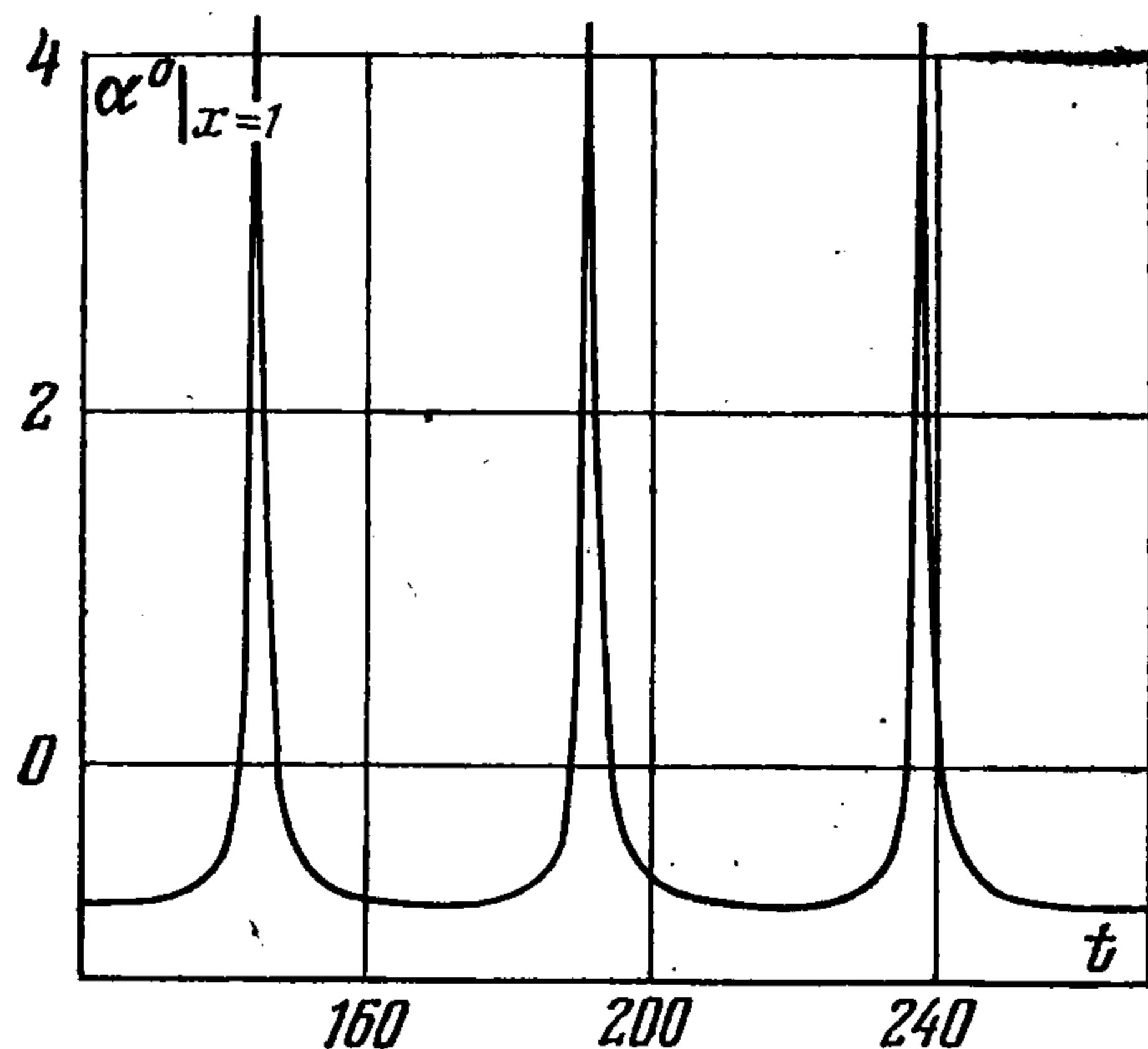
В соответствии с (1.19) и (1.20) в конечном сечении волокна при значении E , несколько большем E_* , установятся автоколебания со следующими характеристиками:

$$(1.21) \quad (\alpha^0|_{x=1})_{\max} = 0,594\sqrt{E - E_*} = M, \quad (\alpha^0|_{x=1})_{\min} = -M$$

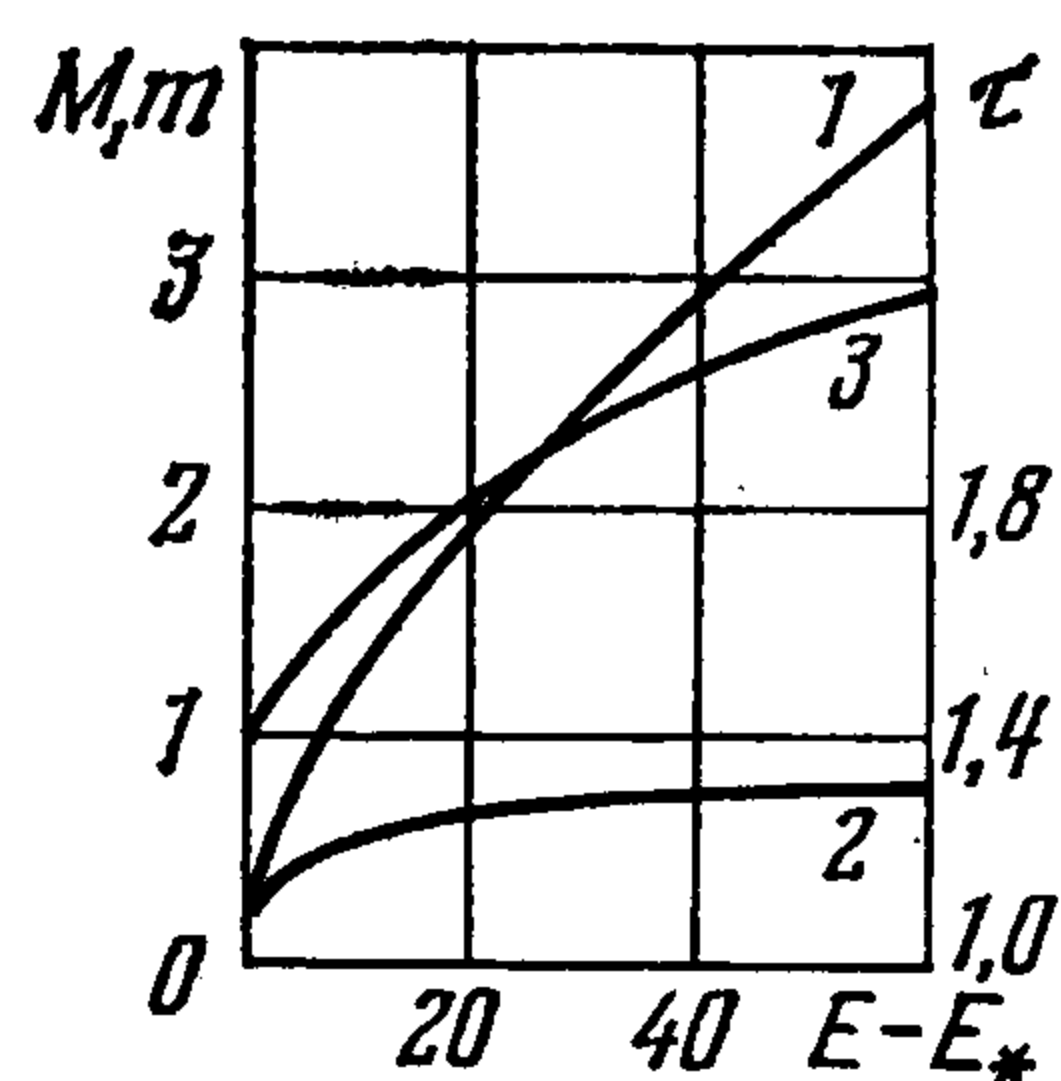
$$\omega^0 = 0,693 - 0,09(E - E_*)$$

Здесь ω^0 — круговая частота автоколебаний.

2. Численный расчет. В работе также было проведено численное решение исходной системы уравнений неразрывности и количества движения относительно возму-



Фиг. 1



Фиг. 2

щений $\alpha^0 = \varepsilon\alpha$ и $\beta^0 = \varepsilon\beta$ (см. (1.3)). Производные по x в уравнении неразрывности аппроксимировались на нижнем временном слое по уголкового схеме. Это позволяло найти распределение α^0 по x на верхнем слое, после чего прогонкой с помощью уравнения количества движения определялось распределение β^0 на верхнем временном слое. Распределения по x аппроксимировались в 100 точках на промежутке $0 \leq x \leq 1$.

Начальные и граничные условия выбирались в виде

$$t = 0, \quad \alpha^0 = 2\delta \operatorname{Re} \{X\}, \quad \beta^0 = 2\delta \operatorname{Re} \{Y\}$$

$$x = 0, \quad \alpha^0 = \beta^0 = 0; \quad x = 1, \quad \beta^0 = 0$$

Расчеты показали, что в конечно-разностной аппроксимации критическое значение параметра E оказывается несколько завышенным: $\approx 25,5$ вместо аналитического результата 20,22. Это завышение затрудняет количественное сравнение вблизи критического значения E результатов численных расчетов и асимптотической теории пункта 1; остается возможность лишь качественного сопоставления.

Независимо от амплитуды начального возмущения (использовались значения $0,01 \leq \delta \leq 0,6$; должно быть $\alpha^0 > -1$) при $E \leq 25,5$ наблюдалось затухание колебаний, а при $E > 25,5$ — устанавливались автоколебания с амплитудой, не зависящей от δ . Режим возбуждения автоколебаний мягкий и, таким образом, имеет место нормальная бифуркация рождения цикла, что соответствует выводам пункта 1.

В заключение остановимся на результатах численного исследования поведения формируемого волокна при значениях кратности вытяжки E , существенно превосходящих E_* . Величина кратности вытяжки в расчетах увеличивалась до значения $E =$

$= 700$. Всему исследованному диапазону отвечают автоколебания (т. е. решение с предельным циклом), причем с ростом E увеличиваются как период, так и амплитуда колебаний. Результаты для $E = 95$; $\delta = 0,6$ представлены на фиг. 1. На фиг. 2 показано изменение с ростом $(E - E_*)$ следующих величин: $M = (\alpha^0|_{x=1})_{\max}$ — кривая 1; $m = -(\alpha^0|_{x=1})_{\min}$ — кривая 2, а также отношения τ продолжительности периода автоколебаний ко времени $(E - 1)/\ln E$, в течение которого в стационарных условиях жидкая частица достигает бобины от фильеры — кривая 3. Асимптотическое поведение кривых на фиг. 2 при $(E - E_*) \rightarrow 0$ описывается результатами (1.21).

Автор признателен В. С. Берману и В. М. Ентову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weinberger C. B., Cruz-Saenz G. F., Donnelly G. J.* Onset of draw resonance during isothermal melt spinning: a comparison between measurements and predictions.— *AICHE Journal*, 1976, v. 22, № 3, p. 441—448.
2. *Ishihara H., Kase S.* Studies on melt spinning. V. Draw resonance as a limit cycle.— *J. Appl. Polym. Sci.*, 1975, v. 19, № 2, p. 557—565.
3. *Pearson J. R. A., Matovich M. A.* Spinning a molten threadline. Stability.— *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1969, v. 8, № 4, p. 605—609.
4. *Gelder D.* The stability of fiber drawing processes.— *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1971, v. 10, № 3, p. 534—535.
5. *Kase S.* Studies on melt spinning. IV. On the stability of melt spinning.— *J. Appl. Polym. Sci.*, 1974, v. 18, № 11, p. 3279—3303.
6. *Matovich M. A., Pearson J. R. A.* Spinning a molten threadline. Steady-state viscous flows.— *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1969, v. 8, № 3, p. 512—520.
7. *Kase S., Matsuo T.* Studies on melt spinning. I. Fundamental equations on the dynamics of melt spinning.— *J. Polym. Sci., Pt. A*, 1965, v. 3, № 7, p. 2541—2554.
8. *Ентов В. М., Ярин А. Л.* Уравнения динамики струи капельной жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1980, № 5, с. 11—18.
9. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.IV.1982