

УДК 532.516

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ЖИДКИХ СФЕР В ЛИНЕЙНОМ ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ

Зинченко А. З.

В рамках квазистационарных уравнений Стокса рассматривается гидродинамическое взаимодействие двух одинаковых, свободных от внешних сил жидких сферических частиц в линейном поле течения произвольного вида. Представлены численные результаты по расчету относительной скорости частиц и интенсивности силовых диполей на сферах. Получены дальние и ближние асимптотические разложения соответствующих гидродинамических функций. Результаты представляют интерес для структурной реологии эмульсий.

Ранее исследовалось гидродинамическое взаимодействие двух твердых сфер в линейном поле течения [1—4], а также двух капель в среде, которая вдали от частиц покоится [5—8]. Применяемые ниже методы исследования подобны изложенным в [5—8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим две свободные от внешних сил жидкие сферические частицы радиуса a , динамической вязкости μ' , погруженные в несжимаемую жидкость вязкости μ_e . Предполагаем применимость квазистационарных уравнений Стокса внутри капель и во внешней среде, а в качестве граничных условий на поверхностях сфер — непротекание жидкостей, непрерывность скорости и касательного напряжения. Поверхностное натяжение на границах раздела считается достаточно большим, что позволяет пренебречь отклонением формы частиц от сферической и не рассматривать граничное условие для нормальных напряжений. Окружающее поле течения имеет вид

$$v_\infty = v_0 + \Omega \times x + E \cdot x \quad (v_0, \Omega, E = \text{const})$$

Здесь Ω , E — соответственно завихренность и тензор скоростей деформаций невозмущенного течения; вектор x проведен из начала координат (см. фигуру). Скорости перемещения центров сфер должны быть определены из условия равенства нулю гидродинамических сил. Равенство нулю моментов сил относительно центров частиц удовлетворяется автоматически [7].

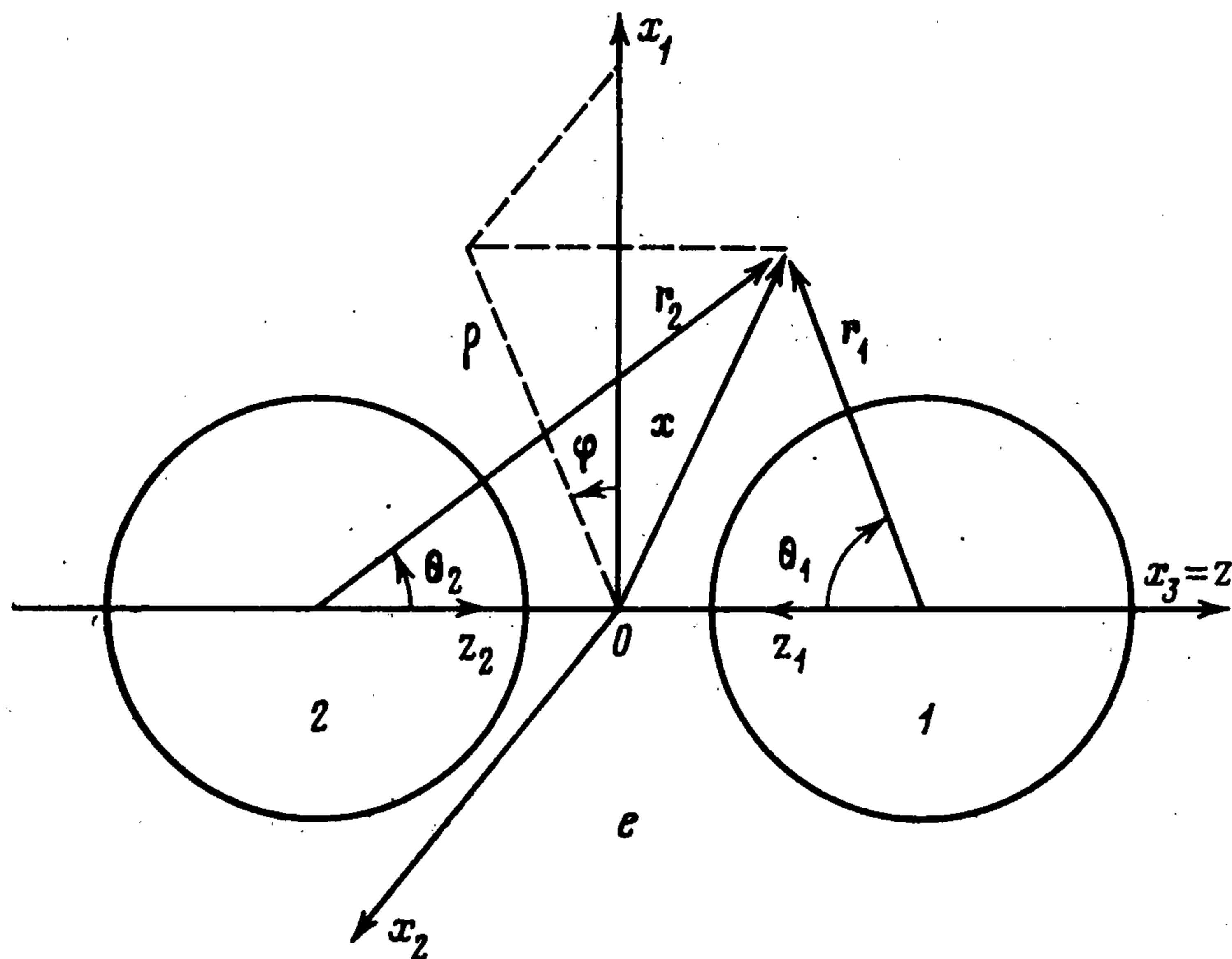
Согласно методике [9], для приложений этой задачи к расчету среднего напряжения в монодисперсной эмульсии необходимо определить скорость V движения сферы 1 относительно сферы 2, а также интенсивность силового диполя на сфере 1

$$(1.1) \quad S_{jk} = \int_{S_1} \left\{ (\sigma_n)_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} (\sigma_n \cdot x) - \mu_e (v_j n_k + v_k n_j) \right\} dS$$

Здесь S_1 , n — поверхность сферы 1 и внешняя нормаль к ней; v — скорость жидкости; вектор напряжения σ_n вычисляется с внешней стороны поверхности [9]. В условиях свободного движения сфер справедливы общие представления [9]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} V &= l [\Omega \times p + (1 - B) E \cdot p + (B - A) (p \cdot E \cdot p) p] \\ S &= \frac{4}{3} \pi a^3 (2 + 5\lambda)(1 + \lambda)^{-1} \mu_e \{ (1 + K) E + [(E \cdot p) p + \\ &+ p (E \cdot p)] L + (p \cdot E \cdot p) [p p M - (2/3 L + 1/3 M) I] \}, \quad \lambda = \mu' / \mu_e \end{aligned}$$

Здесь l — расстояние между центрами сфер; ρ — единичный вектор линии центров, направленный от сферы 2 к сфере 1; \mathbf{I} — единичный тензор. Основной целью работы является вычисление и исследование скалярных функций A, B, K, L, M , характеризующих взаимодействие сфер и зависящих от λ, ε (εa — зазор между сферами). Достаточно рассмотреть три отдельные задачи (система координат x_1, x_2, x_3 введена, как показано на фигуре).



Задача 1. $\mathbf{v}_\infty = (E_{11}x_1, -E_{11}x_2, 0)$. Поток не оказывает силового воздействия на сферы. Решение дает значения K .

Задача 2. $\mathbf{v}_\infty = (Gx_3, 0, 0)$. Сдвиговое поле вызывает движение сфер со скоростями $(\pm V_1, 0, 0)$. Решение дает значения B и $K + L$.

Задача 3. $\mathbf{v}_\infty = (-1/2 E_{33}x_1, -1/2 E_{33}x_2, E_{33}x_3)$. Под действием этого деформационного осесимметричного течения сферы приобретают скорости $(0, 0, \pm V_1^*)$. Решение дает возможность вычислить A и $K + 4/3 L + 2/3 M$.

Отметим, что используемые ниже методы исследования задач 1 и 3 проще, чем применение общего представления [1] решения уравнений Стокса в бисферических координатах.

2. Решение задачи 1. Применим метод многократных отражений, аналогично [8], что эквивалентно построению точного решения. Перейдем к безразмерным переменным, относим скорости к $E_{11}l$, длины — к l . Поле скоростей в области e (между сферами) ищем в виде

$$\mathbf{v}^e = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^{**}, \quad \mathbf{v}^*, \mathbf{v}^{**} \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{x}| \rightarrow \infty)$$

Граничные условия для \mathbf{v}^* таковы: поле $\mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}^*$ (\mathbf{v}^*) имеет нулевую нормальную компоненту на сфере 1 (2); внутри сферы 1 (2) существует стоксово течение, которое имеет на границе такие же скорость и касательное напряжение, как и поле $\mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}^*$ (\mathbf{v}^*). Для формулировки граничных условий для \mathbf{v}^{**} сферы меняем местами. Достаточно рассмотреть поле \mathbf{v}^* , которое по методу отражений ищем в виде

$$(2.1) \quad \mathbf{v}^* = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{v}_-^{1,2k-1} + \mathbf{v}_-^{2,2k})$$

Каждое поле $\mathbf{v}_-^{i,j}$ удовлетворяет уравнениям Стокса, регулярно всюду вне i -й сферы и исчезает в бесконечности.

Вычисления ведутся в последовательности

$$(2.2) \quad v_+^{i,j} \rightarrow v_-^{i,i+1} \rightarrow v_+^{i+1,j+1} \rightarrow v_-^{i+1,j+2} \rightarrow v_+^{i,j+2} \rightarrow \dots$$

Здесь начальное поле $v_+^{1,0} = v_\infty$, а через $v_+^{i+1,j}$ ($j \geq 1$) обозначено разложение поля $v_-^{i,j}$ в окрестности $(i+1)$ -й сферы (индексы $i, i+1$ приведены по модулю 2). Переход от $v_+^{i,j}$ к $v_-^{i,j+1}$ определяется граничными условиями, как в [8].

Введем две сферические системы координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$, $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$, как показано на фигуре. Угол φ_i соответствует положительному вращению вокруг оси z_i ($\varphi_2 = -\varphi_1 = \varphi$). Используя общее решение Ламба [10] уравнений Стокса, искомые поля представим в виде

$$(2.3) \quad v_{\pm}^{i,j} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\text{rot} (r_i \chi_k^{i,j}) + \nabla \Phi_k^{i,j} + \frac{(k+3) \nabla (r_i^2 p_k^{i,j})}{2(k+1)(2k+3)} - \frac{r_i p_k^{i,j}}{k+1} \right]$$

$$p_k^{i,j} = \zeta A_k^{i,j} \cos 2\varphi_i, \quad \Phi_k^{i,j} = \zeta B_k^{i,j} \cos 2\varphi_i$$

$$\chi_k^{i,j} = \zeta C_k^{i,j} \sin 2\varphi_i, \quad \zeta = r_i^k P_n^2(\cos \theta_i)$$

Здесь $k = n$ для поля $v_+^{i,j}$ и $k = -(n+1)$ для $v_-^{i,j}$; P_n^2 — присоединенная функция Лежандра. Выбор специальной формы сферических гармоник диктуется видом v_∞ .

Как и в [8], формулы перехода от $v_+^{i,j}$ к $v_-^{i,j+1}$ имеют вид

$$(2.4) \quad C_{-(n+1)}^{i,j+1} = \frac{(n-1)(1-\lambda)}{n+2+\lambda(n-1)} C_n^{i,j} \alpha^{2n+1}, \quad \alpha = \frac{a}{l}$$

$$A_{i-(n+1)}^{i,j+1} = -\frac{n(2n-1)}{(n+1)(1+\lambda)} \left\{ \frac{\lambda}{2} A_n^{i,j} \alpha^{2n+1} + \right.$$

$$\left. + [2 + \lambda(2n+1)] B_n^{i,j} \alpha^{2n-1} \right\}$$

$$B_{-(n+1)}^{i,j+1} = \frac{n}{2(n+1)(1+\lambda)} \left\{ \frac{2-\lambda(2n+1)}{2(2n+3)} A_n^{i,j} \alpha^{2n+3} - \right.$$

$$\left. - \lambda(2n-1) B_n^{i,j} \alpha^{2n+1} \right\}$$

Представление поля $v_-^{i,j}$ в виде $v_+^{i+1,j}$ в окрестности $(i+1)$ -й сферы дает соотношения

$$(2.5) \quad A_n^{i+1,j} = \sum_{m=2}^{\infty} g_n^m A_{-(m+1)}^{i,j}, \quad g_n^m = \frac{(n+m)!}{(m-2)!(n+2)!}$$

$$C_n^{i+1,j} = \sum_{m=2}^{\infty} \left[\frac{2}{mn(n+1)} g_n^m A_{-(m+1)}^{i,j} + \frac{m}{n+1} g_n^m C_{-(m+1)}^{i,j} \right]$$

$$B_n^{i+1,j} = \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{A_{-(m+1)}^{i,j}}{m(2m-1)} \left\{ \frac{(n-2)[(m-2)(n-1)-(m+1)]}{n(2n-1)} g_{n-1}^m - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{m-2}{2} g_n^m \right\} + g_n^m B_{-(m+1)}^{i,j} + \frac{2}{n} g_n^m C_{-(m+1)}^{i,j} \right\}$$

Начальное условие $v_+^{1,0} = v_\infty$ дает

$$(2.6) \quad A_n^{1,0} = C_n^{1,0} = 0 \quad (n \geq 2), \quad B_2^{1,0} = 1/6, \quad B_n^{1,0} = 0 \quad (n \geq 3)$$

С помощью (2.1)–(2.6) можно определить v^* и, меняя сферы местами, также v^{**} . Для результирующего поля v^e вектор напряжения на сфере \uparrow определяется общими формулами [10]. Вычисляя интеграл (1.1), находим

$$(2.7) \quad K = \frac{1}{A_{-3}^{1,1}} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{-3}^{1,2k+1} + A_{-3}^{2,2k})$$

Аналитическое вычисление первых отражений по схеме (2.2)—(2.7) дает дальнейшее асимптотическое представление

$$(2.8) \quad K = -\frac{2\lambda}{1+\lambda} \alpha^5 + \frac{2+5\lambda}{3(1+\lambda)} \left[\frac{\lambda-1}{\lambda+4} + \frac{2+7\lambda}{8(1+\lambda)} \right] \alpha^8 + O(\alpha^{10}),$$

$\alpha \rightarrow 0$

Последующие отражения дают

$$(2.9) \quad K = \sum_{n=5}^{\infty} c_n (2\alpha)^n \quad (c_6 = c_7 = c_9 = c_{11} = 0)$$

Коэффициенты $c_n(\lambda)$ при $n \leq 172$ вычислялись по схеме (2.2)—(2.7) при помощи ЭВМ аналогично [8].

Расчеты показали удовлетворительную скорость сходимости ряда (2.9) при любом λ даже для касающихся частиц. Например, при $\lambda = \infty$ и $\varepsilon = 0$ вычисленные с помощью (2.9) при $n \leq 76$ и $n \leq 172$ значения K равны соответственно $-0,04717$ и $-0,04721$ и до трех значащих цифр совпадают со значением [4], найденным с помощью точного решения в тангенциально-сферических координатах.

Значения $-K \times 10^4$ приведены в табл. 1. При $\varepsilon \geq 1$ и $\lambda \geq 0,5$ относительная погрешность формулы (2.8) не превышает 0,6%.

При $\lambda = 0$ из (2.4), (2.5) можно получить

$$(2.10) \quad \gamma_n^{i+1, j} = (n-1)(n+2) \sum_{m=3}^{\infty} \frac{g_n^{m-1} \alpha^{2m-1}}{(n+m-1)(m-1)} \gamma_m^{i, j-1},$$

$n \geq 2, j \geq 1$

$$\gamma_n^{i, j} = (n-1)(n+2) B_n^{i, j} + \frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)} A_{n-2}^{i, j} +$$

$$+ (n-1)(n-2) C_{n-1}^{i, j}$$

Из (2.4), (2.6)—(2.7), (2.10) следует неожиданное равенство нулю всех коэффициентов c_n и функции K при $\lambda = 0$.

3. Решение задачи 2. Для построения точного решения с некоторыми упрощениями применим метод [7]. Введем бисферические координаты ξ, η , связанные с цилиндрическими ρ, z соотношениями

$$(3.1) \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \mu}, \quad \rho = \frac{c \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \mu}, \quad \mu = \cos \xi$$

Сферы 1 и 2 являются координатными поверхностями $\eta = \eta_1 > 0$ и $\eta = -\eta_1$ соответственно, если положить $\operatorname{ch} \eta_1 = 1 + \varepsilon/2$, $c = a \operatorname{sh} \eta_1$. Удовлетворяя уравнению Стокса $\operatorname{rot}(\Delta \mathbf{v}) = 0$, ищем цилиндрические компоненты скорости в области между сферами и внутри сфер в виде

$$(3.2) \quad v_\rho = V_1 (\rho F/c + \chi + \psi) \cos \varphi$$

$$v_\varphi = V_1 (\chi - \psi) \sin \varphi, \quad v_z = V_1 (zF/c + 2\Phi) \cos \varphi$$

$$F = \zeta \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) P_n^1(\mu), \quad \Phi = \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\eta) P_n^1(\mu)$$

$$\chi = \zeta \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n(\eta) P_n^2(\mu), \quad \psi = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\eta) P_n(\mu), \quad \zeta = (\operatorname{ch} \eta - \mu)^{1/2}$$

Здесь $P_n^m(\mu)$, $P_n(\mu)$ — присоединенная функция и полином Лежандра, а $f_n, \varphi_n, \chi_n, \psi_n$ — линейные комбинации функций $\exp[(n+1/2)\eta]$,

Таблица 1

λ	$\varepsilon=1$	0,25	0,1	0,01	0
0,5	27	113	161	204	209
1	40	166	234	292	299
2	53	216	300	368	377
5	66	259	354	429	439
10	71	275	373	450	459
∞	77	290	389	463	472

$\exp [-(n + 1/2)\eta]$. Введем дополнительные функции $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ с помощью преобразования [7]

$$(3.3) \quad \begin{aligned} 3(2n + 1)f_n &= (2n + 1)\alpha_n + 2(n + 2)\beta_n + 2(n - 1)\gamma_n \\ 6(2n + 1)\chi_n &= -(2n + 1)\alpha_n - (2n + 7)\beta_n - (2n - 5)\gamma_n \\ 6(2n + 1)\psi_n &= -(2n + 1)n(n + 1)\alpha_n - (n + 1)(n + 2) \cdot \\ &\quad \cdot (2n + 3)\beta_n - n(n - 1)(2n - 1)\gamma_n \end{aligned}$$

Отличия от случая [7] обусловлены симметрией задачи и неоднородностью окружающего течения. Положим

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \alpha_n^e &= 2J_n^e \operatorname{sh} (n + 1/2) \eta + 2\psi_n^\infty \\ (\beta_n^e, \gamma_n^e) &= 2(L_n^e, N_n^e) \operatorname{sh} (n + 1/2) \eta - \psi_n^\infty \\ \varphi_n^e &= 2B_n^e \operatorname{ch} (n + 1/2) \eta, f_n^e = C_n^e \operatorname{sh} (n + 1/2) \eta \\ (\alpha_n^i, \beta_n^i, \gamma_n^i, \varphi_n^i) &= (\pm J_n, \pm L_n, \pm N_n, B_n) \exp [-(n + 1/2)|\eta|] \\ \psi_n^\infty &= \sqrt{2} (Gc/V_1)(2n + 1) \exp [-(n + 1/2)|\eta|] \operatorname{sign} \eta \end{aligned}$$

Индексами e, i ($i = 1, 2$) отмечаются величины, относящиеся к указанным на фигуре областям; верхний знак соответствует $i = 1$, нижний — случаю $i = 2$. Неоднородные члены в выражениях для $\alpha_n^e, \beta_n^e, \gamma_n^e$ после подстановки в (3.3) и затем в (3.2) дают невозмущенное течение v_∞ ; возмущение скорости, определяемое дополнительными членами, исчезает в бесконечности. Теперь для построения разностных уравнений, определяющих восемь независимых последовательностей $J_n^e, J_n, \dots, B_n^e, B_n$, непосредственно применимы результаты [7]. Условия соленоидальности течений во всех областях с учетом непрерывности скорости, а также граничные условия непротекания составляют систему трех линейных уравнений относительно $J_n^e, L_{n-1}^e, N_{n+1}^e$ (второе соотношение (1.8), второе равенство (1.10) и соотношение (1.12) при $i = 1, \delta_1 = 1$ из работы [7]), откуда находим выражения неизвестных через B_m^e, B_m ($n - 1 \leq m \leq n + 1$). В результате формулы (3.3) дают представление $f_n^e, \chi_n^e, \psi_n^e$ через B_m^e, B_m ($n - 2 \leq m \leq n + 2$); аналогичное представление $f_n^i, \chi_n^i, \psi_n^i$ через базисные переменные B_m^e, B_m получается из условий непрерывности скорости (формулы (1.9) работы [7]). Далее, подходящее преобразование граничных условий непрерывности касательных напряжений дает выражение C_n^e через B_m^e, B_m ($n - 1 \leq m \leq n + 1$) (использованное ниже для вычисления (3.5)—(3.6)) и сводит задачу к двум разностным уравнениям четвертого порядка относительно B_m^e, B_m (формулы (1.19), (1.16) работы [7] при $i = 1, \delta_1 = 1, \lambda_1 = \lambda$).

При произвольном значении V_1 единственные отличные от нуля x_1 -компоненты сил, действующих на сферы, имеют вид [7]

$$(3.5) \quad \mp \pi \mu_e a V_1 \operatorname{sh} \eta_1 4\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1) C_n^e$$

Приравнявая (3.5) нулю, получаем связь между V_1 и G и, тем самым, функцию B . Интеграл (1.1) для S_{13} в силу симметрии и теоремы Гаусса — Остроградского равен половине соответствующего интеграла по сфере большего радиуса с центром в начале координат. Поведение течения при $|x| \rightarrow \infty$ можно определить из (3.1)—(3.4), учитывая уравнение непрерывности и равенство нулю сил и моментов сил. Таким образом, в условиях свободного движения находим

$$(3.6) \quad S_{13} = -\frac{2\pi \mu_e V_1 c^2 \sqrt{2}}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)n(n + 1) C_n^e$$

Таблица 2

λ	$\varepsilon=1$	0,25	0,1	0,01	10^{-4}
0	0	0	0	0	0
	352	754	885	974	984
0,5	62	247	339	411	420
	414	714	783	823	828
1	97	393	545	670	685
	444	691	725	735	735
2	136	558	787	987	1014
	473	661	650	614	608
5	177	750	1090	1434	1488
	500	614	537	408	383
10	197	853	1268	1749	1843
	511	583	458	235	180
10^7	223	1001	1556	2461	3158
	524	527	312	-220	-744

Таблица 3

λ	$\varepsilon=1$	0,25	0,1	0,01	10^{-4}
0	9186	7606	6529	4586	2800
	821	2529	3836	6576	9437
0,5	8842	6676	5207	2503	384
	1095	3127	4620	7739	10457
1	8669	6215	4591	1862	226
	1241	3459	5018	7942	9895
2	8493	5743	3978	1330	130
	1393	3825	5457	8137	9492
5	8315	5252	3347	852	62
	1552	4235	5960	8381	9231
10	8233	5021	3049	641	35
	1626	4438	6218	8522	9155
∞	8133	4733	2676	381	4
	1717	4698	6558	8731	9100

Суммы рядов (3.5), (3.6) определялись численно через пределы рекуррентных последовательностей аналогично [7]. В табл. 2 для каждой пары λ , ε приведен столбец величин $B \cdot 10^4$, $-(K + L) \cdot 10^4$. Вычисления проводились на БЭСМ-6 в режиме удвоенной точности, что существенно для предельного перехода $\lambda \rightarrow \infty$ при малых ε ; при $\lambda = \infty$ предложенный метод непосредственно неприменим [7]. В случае твердых сфер для ряда значений η_1 [1] функция $B(\varepsilon)$ ($\varepsilon = 2(\operatorname{ch} \eta_1 - 1)$) табулирована [4]. Оказалось, что для тех же η_1 и $\lambda = 10^7$ расчет B предложенным методом дает полное совпадение с данными [4] вплоть до $\varepsilon = 0,0006$; вместе с тем этот метод существенно отличен от способа [1] вычисления для твердых сфер.

Рекуррентные формулы [8] метода отражений позволяют получить дальнейшие асимптотические представления

$$(3.7) \quad B = \frac{8\lambda(1+2\lambda)}{(2+3\lambda)(1+\lambda)} \alpha^5 + O(\alpha^8)$$

$$K + L = -\frac{2+5\lambda}{2(1+\lambda)} \alpha^3 + \frac{8\lambda}{1+\lambda} \alpha^5 + \frac{(2+5\lambda)^2}{4(1+\lambda)^2} \alpha^6 + O(\alpha^8)$$

Здесь первый член асимптотики $K + L$ соответствует результату [9]. Формулы (3.7) можно было бы улучшить дополнительными отражениями, однако опыт [8] показывает, что в данной задаче при $\lambda \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$ таким путем трудно добиться достаточной точности ввиду медленной сходимости, поэтому выше для расчета B и $K + L$ был применен более универсальный метод [7]. Вместе с тем методом многократных отражений можно доказать неожиданное равенство $B = 0$ при $\lambda = 0$. Теорема взаимности [10] показывает, что равенство $B = 0$ справедливо, если отсутствуют гармоники p_{-3} в представлении Ламба поля скоростей вблизи сфер при их мгновенном движении перпендикулярно линии центров в покоящейся на бесконечности среде. Отсутствие этих гармоник при $\lambda = 0$ можно установить с помощью рекуррентных формул [8], получив соотношение типа (2.10).

Анализ относительных траекторий частиц выходит за рамки работы. Отметим лишь, что интегралы относительного движения [4] и равенство $B = 0$ при $\lambda = 0$ показывают, что область замкнутых относительных траекторий центров двух сфер в установившемся сдвиговом течении, в которой парная функция распределения не определяется простыми соображениями [9], при малых λ оказывается значительно «тоньше», чем для твердых сфер [4], и совершенно исчезает при $\lambda = 0$.

4. Решение задачи 3. Используя общее решение [11] уравнения Стокса для функций тока Ψ в координатах ξ , η , а также симметрию задачи и регулярность течений внутри сфер, имеем

$$(4.1) \quad \Psi = c^2 \sqrt{2} (\operatorname{ch} \eta - \mu)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \psi_n(\eta) Q_n(\mu)$$

$$Q_n(\mu) = [P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)] / (2n+1)$$

$$\begin{aligned}\psi_n^i &= \pm \{A_n \exp [-(n - 1/2) |\eta|] + B_n \exp [-(n + 3/2) |\eta|]\} \\ \psi_n^e &= cE_{33} \operatorname{sh} \eta \exp [-(n + 1/2) |\eta|] + F_n \operatorname{sh} (n - 1/2) \eta + \\ &+ H_n \operatorname{sh} (n + 3/2) \eta\end{aligned}$$

Верхний знак в (4.1) соответствует $i = 1$, нижний — случаю $i = 2$. Первый член выражения для ψ_n^e после подстановки в ряд (4.1) дает функцию тока $\Psi_\infty = -1/2 E_{33} \rho^2 z$ невозмущенного течения; дополнительные члены определяют возмущение скорости, исчезающее в бесконечности.

Первое соотношение (4.1) формально имеет тот же вид, что и при движении капле в среде, покоящейся на бесконечности, что позволяет записать граничные условия с помощью результатов [5, 6] в виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned}\psi_n^e &= \psi_n^1 = R_n, \quad d\psi_n^e/d\eta = d\psi_n^1/d\eta \\ d^2(\psi_n^e - R_n)/d\eta^2 &= \lambda d^2(\psi_n^1 - R_n)/d\eta^2, \quad \eta = \eta_1 \\ R_n(\eta) &= \frac{V_1^*}{2} \left\{ \frac{\exp [-(n - 1/2)\eta]}{2n - 1} - \frac{\exp [-(n + 3/2)\eta]}{2n + 3} \right\}\end{aligned}$$

Согласно [11], гидродинамические силы

$$(4.3) \quad F_1^z = -F_2^z = -4\pi\mu_e c \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(F_n + H_n)$$

Независимо от равенства нулю (4.3) интеграл (1.1) для S_{33} можно вычислить тем же методом, что и в п. 3

$$(4.4) \quad S_{33} = -\frac{16\pi\mu_e c^2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) F_n + \left(n + \frac{3}{2}\right) H_n \right]$$

Учитывая линейность задачи и теорему взаимности [10], можно записать

$$(4.5) \quad \begin{aligned}F_1^z &= -6\pi\mu_e a [V_1^* (2\Lambda_{11} - \Lambda_{12}) - lE_{33}D/2] \\ S_{33} &= 4/3\pi\mu_e a^3 (2 + 5\lambda) (1 + \lambda)^{-1} E_{33} \Gamma - 2\pi\mu_e a l V_1^* D\end{aligned}$$

Здесь Λ_{11} , Λ_{12} — коэффициенты сопротивления [8], определяемые бесконечными рядами [5, 6]. Для коэффициентов $D(\lambda, \varepsilon)$, $\Gamma(\lambda, \varepsilon)$ также могут быть получены явные выражения через бесконечные ряды с помощью (4.1)–(4.4), однако соответствующие формулы громоздки и здесь не приводятся.

В табл. 3 для каждой пары λ, ε приведен столбец величин $(1 - A) \cdot 10^4$, $(K + 4/3L + 2/3M) \cdot 10^4$, полученных с помощью (4.5) и (1.2). Численные результаты дополняются дальними асимптотическими представлениями, найденными методом отражений

$$(4.6) \quad \begin{aligned}A &= \frac{2 + 5\lambda}{1 + \lambda} \alpha^3 - \frac{12\lambda(1 + 2\lambda)}{(2 + 3\lambda)(1 + \lambda)} \alpha^5 + \frac{(2 + 5\lambda)^2}{(1 + \lambda)^2} \alpha^6 + O(\alpha^7) \\ K + \frac{4}{3}L + \frac{2}{3}M &= \frac{2 + 5\lambda}{1 + \lambda} \alpha^3 - \frac{12\lambda}{1 + \lambda} \alpha^5 + \frac{(2 + 5\lambda)^2}{(1 + \lambda)^2} \alpha^6 + O(\alpha^7)\end{aligned}$$

Члены порядка α^3 соответствуют результатам [9]. Для твердых сфер второй член асимптотики A приведен в переводе [4] с опечатками (и не согласуется с (4.6) при $\lambda = \infty$); правильная формула дана в оригинале [4].

Ближняя асимптотика функций A , $K + 4/3L + 2/3M$ может быть получена из (4.5). При $\varepsilon \ll 1$ коэффициент Λ_{12} близок к своему предельному значению [6] для касающихся сфер. Как показывает анализ численных результатов, величина Γ отличается от своего предельного значения Γ^* на $O(\varepsilon)$ равномерно по λ ; для $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ коэффициент $D(\varepsilon)$ определенно имеет конечную производную при $\varepsilon = 0$, а при $0 < \lambda < \infty$ отличается от предельного значения D^* во всяком случае на $o(\sqrt{\varepsilon})$. Величины Γ^* , D^*

были получены численными оценками. Используя также асимптотику [8] для Λ_{11} , имеем при фиксированном $\lambda < \infty$

$$(4.7) \quad \frac{1}{1-A} = \frac{1}{D^*} \left[\frac{\pi^2 \lambda}{16 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\lambda^2 - 3)}{9} \ln \varepsilon + b_0 \right] + o(1)$$

$$K + \frac{4}{3} L + \frac{2}{3} M = \Gamma^* - 1 - \frac{3D^*(1+\lambda)}{2+5\lambda} (1-A) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Значения D^* , b_0 , $\Gamma^* - 1$ приведены ниже:

$\lambda = 0$	0,5	1	2	5	10	∞
$D^* = 1,097$	1,321	1,450	1,596	1,772	1,870	2,039
$b_0 = 0,847$	0,771	0,559	0,021	-0,212	11,009	—
$\Gamma^* - 1 = 1,4041$	1,0963	1,0175	0,9647	0,9303	0,9196	0,9104

Из (4.7) следует, что $K + \frac{4}{3}L + \frac{2}{3}M$ имеет бесконечную производную при $\varepsilon = 0$, если $\lambda < \infty$.

Асимптотика [8] для Λ_{11} и формула (4.7) для $1 - A$ неравномерно пригодны при $\lambda \rightarrow \infty$. В области $\lambda \geq 1$, $\varepsilon \leq 1$ грубую, но равномерно пригодную оценку $1 - A$ можно получить с помощью формулы [12]

$$\Lambda_{11} \simeq \frac{1}{4} f(p) \varepsilon^{-1}, \quad p = 2\lambda \sqrt{\varepsilon}$$

где функция f определена в работе [12].

При $\lambda < \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $(1 - A)^{-1}$ имеет интегрируемую сингулярность, вследствие чего возможна коагуляция жидких сфер под действием макроскопического деформирования. Однако даже в сильных течениях система сфер может, как известно, оставаться стабильной за счет сил отталкивания между двойными электрическими слоями поверхностей частиц. Ввиду малого радиуса действия эти силы часто можно моделировать контактными силами, лишь препятствующими коалесценции. В рамках такой модели под действием сильного макроскопического течения будет происходить временное образование дуплетов, и для расчета среднего напряжения в системе жидких сфер окажется необходимым определение как объемной [9], так и поверхностной плотности вероятности для вектора, разделяющего центры двух частиц.

Автор благодарит А. М. Головина за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lin C. J., Lee K. J., Sather N. F. Slow motion of two spheres in a shear field. — J. Fluid Mech., 1970, v. 43, pt 1, 35—47. — Рус. перев. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1971, № 4, с. 52—63.
2. Wakiya S. Slow motion in shear flow of a doublet of two spheres in contact. — J. Phys. Soc. Japan, 1971, v. 31, No. 5, p. 1581—1587.
3. Nir A., Acrivos A. On the creeping motion of two arbitrary-sized touching spheres in a linear shear field. — J. Fluid Mech., 1973, v. 59, pt 2, p. 209—223.
4. Batchelor G. K., Green J. T. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. — J. Fluid Mech., 1972, v. 56, pt 2, p. 375—400. — Рус. перев.: В кн. Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях. М.: Мир, 1980, с. 11—45.
5. Wacholder E., Weihs D. Slow motion of a fluid sphere in the vicinity of another sphere or a plane boundary. — Chem. Engng Sci., 1972, v. 27, No. 10, p. 1817—1828.
6. Haber S., Hetsroni G., Solon A. On the low Reynolds number motion of two droplets. — Internat. J. Multiphase Flow, 1973, v. 1, No. 1, p. 57—71.
7. Зинченко А. З. Медленное асимметричное движение двух капель в вязкой среде. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 49—59.
8. Зинченко А. З. Расчет эффективности гравитационной коагуляции капель с учетом внутренней циркуляции. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 1, с. 72—82.
9. Batchelor G. K., Green J. T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order ε^2 . — J. Fluid Mech., 1972, v. 56, pt. 3, p. 401—427.
10. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
11. Stimson M., Jeffery G. B. The motion of two spheres in a viscous fluid. — Proc. Roy. Soc. Ser A, 1926, v. 111, No. 757, p. 110—116.
12. Зинченко А. З. Расчет близкого взаимодействия капель с учетом внутренней циркуляции и эффектов скольжения. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 759—763.