Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 531.314

ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Петров А. Г.

Из уравнений движения идеальной несжимаемой однородной жидкости выводится вариационное уравнение Гамильтона и функция Лагранжа для некоторых вихревых течений жидкости в многосвязной области, произвольного потенциального течения в безграничной области при наличии особенностей внутри потока, обтекания крыла с циркуляцией в неустановившемся потоке, скорость которого — произвольная мероморфная функция. Функция Лагранжа определяется в явном виде как функционал границы течения жидкости и ее нормальной скорости, что позволяет решать некоторые задачи динамики тел в жидкости, вихревых течений и течений при наличии свободной границы методами аналитической механики.

1. Из истории вопроса. Несмотря на усилия многих математиков, проблема получения уравнений движения в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости оставалась нерешенной до 1867 г. Неожиданно простое решение этой проблемы получили Томсон и Тэт [1], применившие к жидкости начало Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega} p\delta n\, dS = \int_{t_1}^{t_2} dt\delta L \tag{1.1}$$

$$\delta n\ (t_1) = \delta n\ (t_2) = 0$$

Здесь δn — виртуальное перемещение границы твердого тела $\partial\Omega$, совместимое с кинематическими условиями, интеграл по $\partial\Omega$ представляет работу сил давления p жидкости на перемещении δn.

Функция Лагранжа L, так же как для движения твердого тела, равна разности кинетической энергии жидкости T и потенциальной энергии системы

$$L = T - \Pi \tag{1.2}$$

Из (1.1) следует система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют N обобщенных координат твердого тела (для твердого тела в общем случае $N = 6$)

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad \sum_{i=1}^{N} Q_i\delta q_i = \int_{\partial\Omega} p\delta n\, dS \tag{1.3}$$

При помощи уравнений (1.3) можно решать две задачи динамики: определение реакций Q_i, действующих на твердое тело при известном законе движения $q_i\ (t)$, и отыскание закона движения $q_i\ (t)$ по заданным обобщенным силам Q_i.

В 1869 г. Кирхгоф дал убедительное обоснование этого подхода [2]. Он ввел лагранжево перемещение частицы жидкости $\delta\mathbf{x}$, вызванное малым возмущением твердого тела, которое определяется вариациями $\delta q_i\,(t)$. При этом он обратил внимание на то, что при $\delta q_i\ (t_1) = \delta q_i\ (t_2) = 0$ нельзя считать равным нулю лагранжево перемещение частицы жидкости в момент времени t_2 ($\delta\mathbf{x}\ (t_2) \neq 0$). Таким образом, в отличие от точек твердого тела, положения частиц жидкости не определяются мгновенными значениями координат тела $q_i(t)$. Поэтому исследование Кирхгофа существенно дополняет идею Томсона и Тэта.

Кирхгоф дал весьма простой вывод вариационного уравнения (1.1) из уравнений Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \nabla U, \qquad \nabla \mathbf{v} = 0 \tag{1.4}$$

Он преобразовал лагранжеву вариацию удельной кинетической энергии и, воспользовавшись тем, что $\operatorname{div} \delta\mathbf{x} = 0$, а также уравнением движения (1.4), получил

$$\delta \frac{\rho v^2}{2} = \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{v} \delta \mathbf{x}) + \operatorname{div}[(p - \rho U)\, \delta \mathbf{x}] \tag{1.5}$$

Если проинтегрировать уравнение (1.5) по области Ω и по времени, то вместо (1.1) получится следующее уравнение:

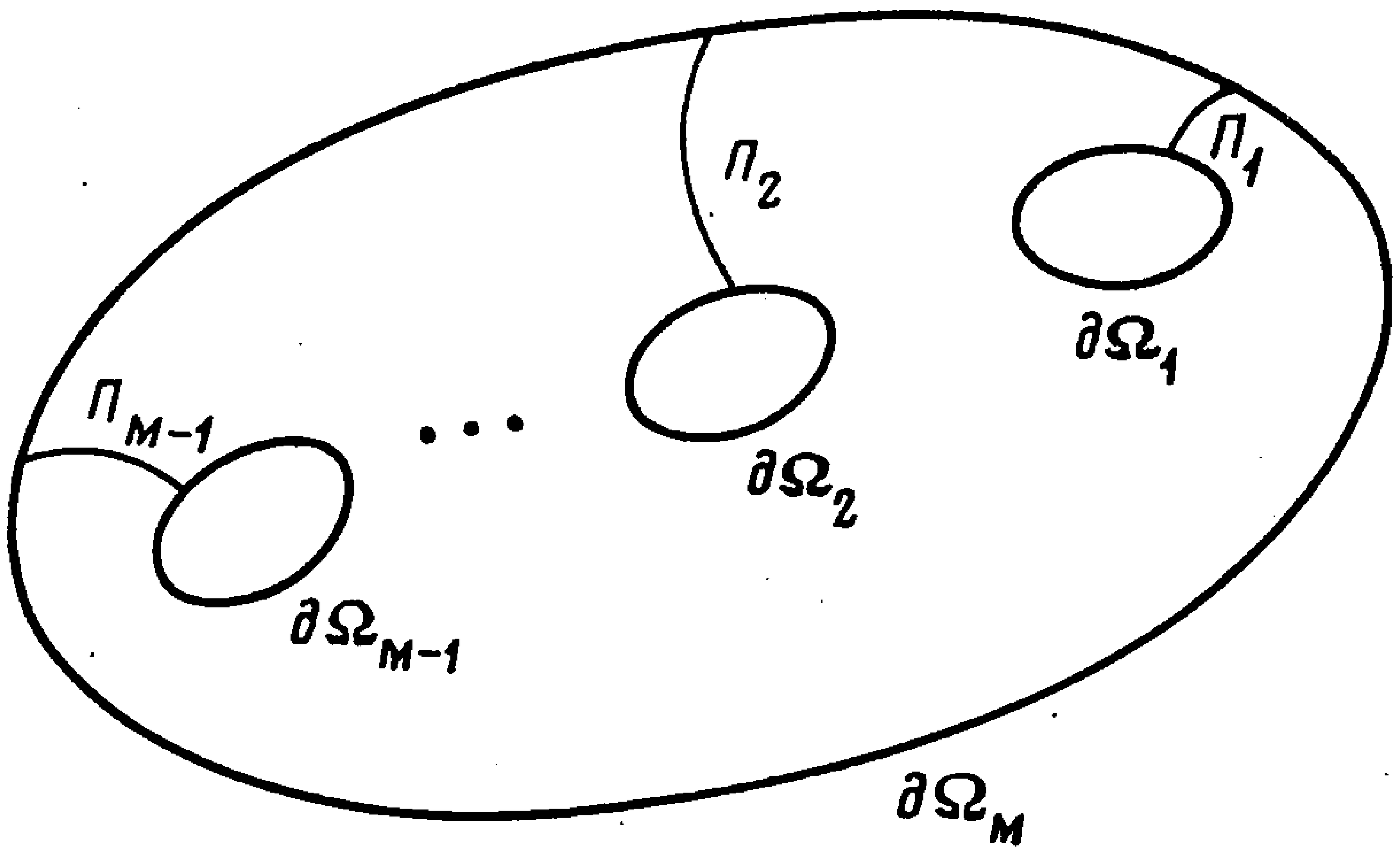
$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta (T - \Pi) = I + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega} p \delta n \, dS, \qquad I = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \delta \mathbf{x} \, d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} \tag{1.6}$$

В силу потенциальности $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ интеграл I приводится к интегралу по поверхности

$$I = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \Phi \delta \mathbf{x}) \, d\tau \, |_{t_2} = \int_{\partial\Omega} \rho \Phi \delta x_n \, dS \tag{1.7}$$

где δx_n — проекция вектора $\delta\mathbf{x}$ на нормаль n. Граница $\partial\Omega$ тела и жидкости состоит из одних и тех же частиц жидкости (см. теорему Лагранжа [3]). Поэтому на ней выполняется условие $\delta x_n = \delta n$ и в силу условий (1.1) $\delta x_n(t_2) = 0$. Отсюда следует, что $I = 0$, и получается вариационное уравнение (1.1).

В 1871 г. Больцман обратил внимание на то, что в многосвязной области теорему Гаусса в (1.7) применять, вообще говоря, нельзя. Необходимо ввести мыслимые перегородки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{M-1}$, которые превратят M-связную область в односвязную (фигура). Тогда интеграл (1.6) запишется в виде



$$I = \sum_{k=1}^{M-1} \rho \Gamma_k \int_{\Pi_k} \delta x_n \, dS \tag{1.8}$$

Здесь Γ_k — скачки неоднозначного потенциала Φ на перегородках или циркуляции скорости по соответствующим контурам.

В силу того что $\delta\mathbf{x}(t_2) \neq 0$, интеграл (1.8), вообще говоря, не равен нулю, а следовательно, вариационное уравнение (1.1) и система (1.3) не верны.

В 1873 г. Томсон для потенциального течения в многосвязной области предложил новые уравнения [4]. Он рассматривал Γ_k как импульсы, а относительные расходы γ_k жидкости через перегородки Π_k — как сопряженные им скорости изменения соответствующих циклических координат. Пользуясь методом, который вошел затем в механику как метод Рауса игнорирования циклических координат, Томсон получил вид функции

Лагранжа в вариационном уравнении (1.1)

$$L = T - \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k \gamma_k \tag{1.9}$$

Доказательство справедливости уравнений Лагранжа (1.3), (1.9) было дано Стекловым [5] и независимо Брайеном [6]. Недавно [7] дано обоснование, справедливое и для деформирующего тела в жидкости.

Пользуясь идеей Томсона и Тэта, Кирхгоф получил для движения тела в жидкости симметричные уравнения, аналогичные уравнениям Эйлера движения твердого тела в пустоте. Изучение проблемы интегрирования уравнений Кирхгофа было начато в частных случаях Томсоном, Тэтом и Кирхгофом и завершилось исследованиями Ляпунова, Стеклова и Чаплыгина.

Значительный интерес для приложений представляет работа Жуковского [8], открывшая путь для исследования проблемы движения твердого тела с жидким заполнением [9—12]. Другое практически важное направление связано с работами Л. И. Седова [13] по динамической теории крыла в нестационарном потоке с циркуляцией. Основное преимущество полученных им формул для силы и момента, действующих на крыло, заключается в том, что контур интегрирования можно деформировать. Вычисление интегралов сводится к определению вычетов около особых точек подынтегральных функций.

2. Формулировки вариационного уравнения Гамильтона и функции Лагранжа. Рассматривается течение идеальной несжимаемой однородной жидкости, массовые силы имеют потенциал U. Область течения Ω ограничена снаружи или изнутри поверхностью $\partial\Omega$. Поверхность $\partial\Omega$ может состоять из нескольких связных частей. Положение поверхности $\partial\Omega$ или ее части определяется конечным или счетным числом параметров $q_1, q_2, \ldots$ обобщенными координатами). Цель данного исследования — получение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3) для обобщенных координат границы.

Ниже будет дан вывод принципа Гамильтона (1.1) из уравнений Эйлера (1.4) методом Кирхгофа для следующих трех случаев.

1°. Область течения жидкости Ω — многосвязная, ограниченная поверхностью $\partial\Omega$, положение которой и деформация определяются обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots$. Возможны три варианта: а) течение потенциальное, потенциал — многозначная функция; б) плоская задача; течение имеет постоянную завихренность; в) осесимметричная задача; течение имеет вихрь, интенсивность которого убывает пропорционально расстоянию от оси вращения.

Во всех трех вариантах имеет место вариационное уравнение (1.1), а функция Лагранжа оказывается равной

$$L = \int_\Omega \rho \left(\frac{v_*^2}{2} - \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)^2}{2} + U \right) d\tau \tag{2.1}$$

где $\mathbf{v}_*$—поле скоростей воображаемой несжимаемой среды, скрепленной с границей $\partial\Omega$. Для полости в твердом теле $\mathbf{v}_*$ — поле скоростей точек твердого тела. Для потенциального течения формула (2.1) переходит в формулу Томсона (1.9). Для общего случая формула (2.1) согласуется с результатом работы [14].

2°. Тело движется в заданном потенциальном потоке жидкости $\mathbf{v}_0(t, \mathbf{x})$ и создает тем самым новое потенциальное поле скоростей $\mathbf{v}$, удовлетворяющее уравнениям (1.4) и кинематическим условиям на границе тела $\partial\Omega$. Потенциалы скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$ — однозначные функции, а на бесконечности $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|$ стремится к нулю. Поток $\mathbf{v}_0(t, \mathbf{x})$ может быть создан как движением внешних тел с поверхностью S_0, так и особенностями типа мультиполей произвольного порядка.

Положение и деформация границы тел ∂V определяются обобщенными координатами, движение границы S_0 задано. Тогда функция Лагранжа L в (1.1) определяется формулой

$$L = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 d\tau - \int\limits_{V} p_0 \, d\tau \tag{2.2}$$

где $p_0 (t, \mathbf{x})$ — давление в потоке $\mathbf{v}_0 (t, \mathbf{x})$, Ω, V — области, занятые жидкостью и телом соответственно.

Этот результат, когда поток $\mathbf{v}_0$ создается движением поверхности, получен в [15] путем тождественного преобразования кинетической энергии жидкости, входящей в интеграл действия вариационного уравнения Томсона и Тэта (1.1). Для малого тела функция Лагранжа имеет вид [15]

$$L \approx T(\mathbf{x}^{\circ} - \mathbf{v}_0 (t, \mathbf{x})) - p_0 (t, \mathbf{x}) V \tag{2.3}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор координат геометрического центра тела.

3°. Пусть на комплексной плоскости z скорость неоднородного потока и функция тока определяются формулами

$$\mathbf{v}_0 = \overline{dW_0/dz}, \quad \psi_0 = \operatorname{Im} W_0$$

где dW_0/dz — произвольная мероформная функция комплексного переменного z, коэффициенты которой, вообще говоря, зависят от времени t. Вносимый в этот поток односвязный контур $\partial\Omega$ ограничивает снаружи область D, свободную от особых точек функции dW_0/dz.

Движение контура $\partial\Omega$ задается конформным отображением $z (t, \zeta)$ внешности единичного круга $| \zeta | > 1$ на внешность контура $\partial\Omega$

$$z (t, \zeta) - z_0 = a_0 (t) \zeta + a_2 (t)/\zeta + a_3 (t)/\zeta^2 + \ldots$$

Площадь области D предполагается равной постоянной величине πa^2, что по теореме площадей выражается условием $a_0^2 = a^2 + | a_2 |^2 + 2 | a_3 |^2 + \ldots$

При движении контура $\partial\Omega$ создается возмущенное потенциальное поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_\Gamma$, удовлетворяющее условиям на границе тела D

$$(\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}_0) \mathbf{n} |_{\partial D} = v_n, \qquad \mathbf{V}_\Gamma \mathbf{n} |_{\partial D} = 0$$

Циркуляция $\mathbf{V}_0$ равна нулю, а $\mathbf{V}_\Gamma$ равна Γ. На бесконечности $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_\Gamma$ стремятся к нулю.

Давления p и p_0 удовлетворяют уравнениям (1.4). Тогда функция Лагранжа L в (1.1) имеет вид [16]

$$L = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho}{2} V_0^2 \, d\tau - \int\limits_{D} p_0 \, d\tau + \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi} \ln \frac{a_0^2}{a^2} - \rho\Gamma \left(\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(z_0^{\cdot} \bar{z}_0 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k^{\cdot} \bar{a}_k \right) + \frac{1}{2\pi i} \oint \psi_0 \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \tag{2.4}$$

Вариационное уравнение (1.1) с функцией (2.4) согласуется с общими формулами Л. И. Седова для силы и момента, действующих на контур $\partial\Omega$ [13].

3. Случай 1°. Для вывода функции Лагранжа по формуле (2.1) необходимо сначала дать определение вектора скорости $\mathbf{v}_*$ [14].

Пусть $q_1, q_2 \ldots$ — обобщенные координаты, определяющие положение границы $\partial\Omega$ в пространстве. Граница $\partial\Omega$ состоит из M связных частей $\partial\Omega_1$,

$\partial\Omega_2 \ldots$ (фигура). Пусть векторная функция $\mathbf{X}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(q_i, \mathbf{x}_*), \ \det \| \partial X_i/\partial x_j \| = 1$$

отображает область Ω_* на область Ω ($\mathbf{x}_* \in \Omega_*$, $\mathbf{x} \in \Omega$), так что элементарный объем в каждой точке сохраняется. Функции времени $q_i(t)$ задают движение границы $\partial\Omega$, а функция $\mathbf{X}$ — траекторию точек $\mathbf{x} \in \Omega$, соответствующих $\mathbf{x}_* \in \Omega_*$.

Таким образом, $\mathbf{x}_*$ можно рассматривать как лагранжевы координаты частиц некоторой воображаемой несжимаемой среды, «скрепленной» с границей $\partial\Omega$. Скорость $\mathbf{v}_*$ и лагранжево перемещение $\delta_*\mathbf{x}$ частиц этой среды определяются по формулам

$$\mathbf{v}_* = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} \dot{q_i}, \qquad \delta_*\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} \delta q_i \tag{3.1}$$

На границе $\partial\Omega$ выполняются такие же условия, как и для скорости $\mathbf{v}$ и лагранжева перемещения $\delta\mathbf{x}$ частицы жидкости

$$\mathbf{vn} = \mathbf{v}_*\mathbf{n} = v_n, \qquad \delta\mathbf{xn} = \delta_*\mathbf{xn} = \delta n$$

Простейший случай, когда отображающая функция и скорость $\mathbf{v}_*$ выписываются в явном виде — это афинное преобразование области Ω_* на Ω с определителем единица. В общем случае афинное отображение имеет 8 степеней свободы, для твердого тела — 6, для отображения плоской области — 4 степени свободы.

Чтобы получить вариационный принцип (1.1), нужно выразить I в (1.6) через вариацию функционала. Для потенциального и вихревого движения соответствующие результаты имеют вид

$$I(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\delta \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k\gamma_k, \qquad \gamma_k = \int_{\Pi_k} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\,\mathbf{n}\,dS \tag{3.2}$$

$$I(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\delta \left(\sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k\gamma_k + 2\rho\omega \int_{\Omega} (\psi - \psi_* - \psi_M + \psi_{M_*})\,d\tau \right) \tag{3.3}$$

Отсюда и из (1.6) следует выражение для функции Лагранжа

$$L = T - \Pi - \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k\gamma_k - 2\rho\omega \int_{\Omega} (\psi - \psi_* - \psi_M + \psi_{M_*})\,d\tau \tag{3.4}$$

где 2ω — интенсивность вихря ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\omega\mathbf{k}$ для плоского течения, $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\omega y\mathbf{k}$ для осесимметричного течения, $\mathbf{k}$ — единичный вектор, y — расстояние от оси симметрии), ψ и ψ_* — функции тока для полей скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_*$, ψ_M, ψ_{M_*} — значения функций тока $\partial\Omega_M$.

Эквивалентность формулы (3.4) и (2.1) доказывается при помощи преобразований

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\,\mathbf{v}\,d\tau = \int_{\Omega} \operatorname{div}[\rho(\psi - \psi_*)\nabla\psi]\,d\tau - \int_{\Omega} \rho(\psi - \psi_*)\nabla^2\psi\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k\gamma_k + 2\rho\omega \int_{\Omega} (\psi - \psi_* - \psi_M + \psi_{M_*})\,d\tau$$

$$L = \int_{\Omega_i} \rho\left(\frac{v_*^2}{2} - \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)^2}{2} + U\right) d\tau = \int_{\Omega} \rho\left(\frac{v^2}{2} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\,\mathbf{v} + U\right) d\tau$$

Таким образом, получена формула (2.1) для функции Лагранжа, что и требовалось доказать.

4. **Случай 2°.** Непосредственный вывод формулы (2.2) для функции Лагранжа можно получить из соотношения, аналогичного (1.5)

$$(4.1)\qquad \delta\left[\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{2}\varphi\mathbf{V}\right)\right]=\frac{d}{dt}(\operatorname{div}\rho\varphi\delta\mathbf{x})+\operatorname{div}[(p-p_0)\delta\mathbf{x}]$$

$$\mathbf{V}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_0=\operatorname{grad}\varphi$$

Проинтегрируем соотношение (4.1) по области Ω', ограниченной поверхностью $\partial\Omega'$, состоящей из границы тела $\partial\Omega$, достаточно удаленной поверхностью S_∞ и малыми сферами S_k, окружающими особые точки $\mathbf{x}_k$

$$(4.2)\qquad \int\limits_{t_1}^{t_2}dt\delta\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\rho}{2}\varphi\mathbf{V}\mathbf{n}\,dS=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\left(\int\limits_{\partial\Omega}(p-p_0)\delta n\,dS+R\right)+\int\limits_{\partial\Omega}\rho\varphi\delta n\,dS\,\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Последний интеграл равен нулю в силу $\delta\mathbf{x}\mathbf{n}=\delta\mathbf{n}$ и условий (1.1).

Остаточный член R в (4.2) выражается через интеграл по поверхностям S

$$(4.3)\qquad R=-\delta\int\limits_S\frac{\rho}{2}\varphi\mathbf{V}\mathbf{n}\,dS+\frac{d}{dt}\int\limits_S\rho\varphi\delta\mathbf{x}\mathbf{n}\,dS+$$

$$+\int\limits_S(p-p_0)\delta\mathbf{x}\mathbf{n}\,dS,\qquad S=S_\infty\cup\sum_k S_k$$

Для любой замкнутой поверхности S_k, движущейся вместе с жидкостью, выражение для R (4.3) тождественно равно нулю. Тогда из (4.2) получим вариационное уравнение (1.1) с функцией Лагранжа (2.2).

Чтобы доказать, что $R\equiv 0$, следует воспользоваться формулами дифференцирования и варьирования потока вектора по замкнутой поверхности, движущейся с частицами жидкости [10, 17]

$$(4.4)\qquad \frac{d}{dt}\int\limits_S\mathbf{A}\mathbf{n}\,dS=\int\limits_S\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{A}+\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{v})\right)\mathbf{n}\,dS$$

$$\delta\int\limits_S\mathbf{A}\mathbf{n}\,dS=\int\limits_S(\partial\mathbf{A}+\delta\mathbf{x}\operatorname{div}\mathbf{A}+\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\delta\mathbf{x}))\,\mathbf{n}\,dS$$

Символами δ и ∂ обозначены соответственно лагранжева и эйлерова вариации. Между ними существует связь [17]

$$(4.5)\qquad \delta=\partial+(\delta\mathbf{x},\nabla)$$

Выражая первые два интеграла в (4.3) по формулам (4.4), а последний через интеграл Коши — Лагранжа, получим

$$(4.6)\qquad R=\int\limits_S\rho\mathbf{f}\mathbf{n}\,dS,\qquad \mathbf{f}=-\frac{1}{2}\delta(\varphi\mathbf{V})-\frac{1}{2}\delta\mathbf{x}\operatorname{div}(\varphi\mathbf{V})+$$

$$+\varphi\frac{\partial\delta\mathbf{x}}{\partial t}-\frac{1}{2}\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{V}\times\delta\mathbf{x})+\mathbf{v}\operatorname{div}(\varphi\delta\mathbf{x})+\operatorname{rot}(\varphi\delta\mathbf{x}\times\mathbf{v})-$$

$$-\left(\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}\right)\delta\mathbf{x}$$

Частная производная $\partial\delta\mathbf{x}/\partial t$ находится из соотношения $d\delta\mathbf{x}/dt=\delta\mathbf{v}$, которое при помощи (4.5) можно записать в виде

$$(4.7)\qquad \partial\delta\mathbf{x}/\partial t=\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\delta\mathbf{x})+\partial\mathbf{V}$$

Если учесть, что для несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$, $\operatorname{div}\delta\mathbf{x}=0$, то после некоторых преобразований подынтегральную функцию (4.6) можно привести к виду

$$\mathbf{f}={}^1/_2\varphi\delta\mathbf{V}-{}^1/_2\mathbf{V}\partial\varphi-{}^1/_2\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{V}\times\delta\mathbf{x})$$

Интеграл от потока вектора $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{V}\times\delta\mathbf{x})$ по замкнутой поверхности тождественно равен нулю, поэтому

$$R=\int\limits_S \frac{\rho}{2}(\varphi\partial\mathbf{V}-\mathbf{V}\partial\varphi)\,\mathbf{n}\,dS$$

Функции φ, $\mathbf{V}$, $\partial\varphi$, $\partial\mathbf{V}$ определены всюду вне тела, произведения $\varphi\partial\mathbf{V}$, $\mathbf{V}\partial\varphi$ убывают на бесконечности по крайней мере как r^{-3}, и, кроме того, $\operatorname{div}(\varphi\partial\mathbf{V}-\mathbf{V}\partial\varphi)\equiv 0$. Отсюда по теореме Гаусса — Остроградского следует, что $R\equiv 0$.

5. Случай 3°. При наличии циркуляции Γ потенциал φ — неоднозначный. Поэтому при интегрировании по плоской области и времени t уравнения (4.1) следует применять обобщенную теорему Гауса — Остроградского с учетом перегородки Π. В этом случае вместо уравнения (4.2) можно получить

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\delta\int\limits_{\Omega'}\frac{\rho}{2}V^2d\tau=\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\Big(\int\limits_{\partial\Omega}(p-p_0)\,\delta n\,dS+G\Big)+\rho\Gamma\int\limits_{\Pi}\delta\mathbf{x}\mathbf{n}\,dl \tag{5.1}$$

Остаточный член G находится аналогично (4.4)

$$G=\frac{d}{dt}\int\limits_c \rho\varphi\delta\mathbf{x}\mathbf{n}\,dl+\int\limits_c (p-p_0)\,\delta\mathbf{x}\mathbf{n}\,dl,\quad c=c_\infty+\sum_k c_k \tag{5.2}$$

Вектор $\delta\mathbf{x}$ в силу уравнения несжимаемости можно выразить через скалярную функцию g по формуле $\delta\mathbf{x}=\operatorname{rot}\mathbf{k}g$, где $\mathbf{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости. Уравнение (4.7) имеет интеграл

$$dg/dt=\partial\psi \tag{5.3}$$

где ψ — функция тока ($\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{k}\psi$). Из (5.3) следует, что g — ограниченная функция.

Если учесть интеграл Коши — Лагранжа, формулу (5.3) и соотношение $\delta\mathbf{x}\mathbf{n}dl=dg$, то из (5.2) можно получить, что

$$G=\int\limits_c \rho\Big(\frac{V^2}{2}dg-\partial\psi\,d\varphi\Big) \tag{5.4}$$

Используя характер убывания функций $\mathbf{V}$, $\partial\psi$, φ на бесконечности, можно показать, что когда контур c_∞ удаляется на бесконечности, а контуры c_k стягиваются к особым точкам z_k, для интегралов (5.1), (5.4) получатся следующие предельные выражения [16]:

$$\delta\int\limits_{\Omega'}\frac{\rho}{2}V^2\,d\tau\to\delta\Big(\int\limits_{\Omega}\frac{\rho}{2}V_0^2\,d\tau-\frac{\Gamma^2}{8\pi}\ln\frac{a_0^2}{a^2}\Big)$$

$$\int\limits_{\Pi}\rho\Gamma\delta\mathbf{x}\mathbf{n}\,dl\to\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\delta\Big(\rho\Gamma\operatorname{Im}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\boldsymbol{\cdot}}\bar a_n-$$
$$-\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi}\ln\frac{a_0^2}{a^2}+\frac{\rho\Gamma}{2\pi}\oint\psi_0'\frac{d\zeta}{i\zeta}\Big),\quad G\to 0$$

Переходя к соответствующему пределу в (5.1), получим для функции Лагранжа уравнения (1.1) окончательную формулу (2.4).

Функцию Лагранжа в потоке постоянной завихренности можно получить аналогично из следующего уравнения для вариаций [17]:

$$\delta\frac{\rho}{2}V^2=\rho\frac{d}{dt}(\mathbf{V}\delta\mathbf{x})+\operatorname{div}[(p-p_0)\,\delta\mathbf{x}]+\rho(\operatorname{rot}\mathbf{v}_0,\mathbf{V},\delta\mathbf{x})$$

6. Примеры динамических систем. Если функция Лагранжа $L(q_i, q_i^{\boldsymbol{\cdot}})$ вычислена в явном виде, то задача гидродинамики сведется к обычной системе лагранжевой динамики, что позволяет провести полный математический анализ нелинейных уравнений методами аналитической механики. Этот подход апробирован при исследовании общей проблемы движения твердого тела с жидкостью [10—12] и показал высокую эффективность, особенно при анализе устойчивости стационарных движений с учетом капиллярных эффектов.

Формулы (2.1)—(2.4) расширяют класс гидродинамических систем, сводящихся к лагранжевой динамике.

Задача о движении тела в неоднородном потоке и гидродинамического взаимодействия тел исследована на основании (2.2) и (2.3) в [15]. Получены общие уравнения движения как твердого тела, так и деформирующегося (например, пузыря [18]) в неоднородном потоке. Причем уравнения оказываются не сложнее уравнений Кирхгофа [2] и хорошо приспособлены для практических расчетов. В работе [19] доказана неустойчивость стационарного движения твердого тела в неоднородном потоке. Открывается перспектива исследования прямым методом Ляпунова задачи устойчивости стационарного движения пузыря или капли [14, 20].

Сочетание формул (2.1) и (2.4) позволяет написать обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие динамику распределения вихря в заданном потоке. Такой подход использован [21] для построения модели ринга Гольфстрима.

Вариационная формулировка задач гидродинамики дает возможность применять прямые методы для определения свободной границы или границы раздела вихревого и потенциального течений [14, 20, 21].

Автор благодарит Л. И. Седова за внимание к работе и В. В. Румянцева за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W.*, *Tait P.* Treatise on Natural Philosophy. V. 1. Oxford, 1867. 727 p.
2. *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962, лекция 19.
3. *Прандтль Л.*, *Титьенс О.* Гидро- и аэромеханика. Т. I. М.— Л.: Гостехиздат, 1933. 222 с.
4. *Thomson W.* On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or a fixed solid. Philos. Mag., v. 45.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1872, v. 7, p. 668—682.
5. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: Тип. А. Дарре, 1893. 234 с.
6. *Bryan A.* Hydrodynamical Proof of the Equation of Motion of a Perforated Solid.— Phil. Mag., May, 1893, v. 35, p. 338—354.
7. *Воинов О. В.* О выводе уравнений движения твердого тела в жидкости — Вестн. МГУ. Матем. мех., 1970, № 3, с. 64—68.
8. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью.— Избр. соч., Т. I, М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 31—152.
9. *Охоцимский Д. Е.* К теории движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью, ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 3—20.
10. *Моисеев Н. Н.*, *Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965, с. 339.
11. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости твердого тела с ротором и жидкостями, обладающими поверхностным натяжением.— В кн.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968, с. 222—249.
12. *Самсонов В. А.* О некоторых задачах минимума в теории устойчивости движения тела с жидкостью.— В кн.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968, с. 250—267.
13. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966, 448 с.
14. *Петров А. Г.* Функция Лагранжа для вихревых течений и динамика деформированных капель.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 79—94.
15. *Воинов В. В.*, *Воинов О. В.*, *Петров А. Г.* Гидродинамическое взаимодействие тел и их движение в неоднородных потоках.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 680—689.
16. *Петров А. Г.* Вариационный принцип Гамильтона для движения контура переменной формы в вихревом плоскопараллельном потоке.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 52. Новосибирск: Ин-т Гидродин СО АН СССР, 1981, с. 88—108.
17. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. I. М.: Наука, 1976.
18. *Воинов О. В.*, *Петров А. Г.* Функция Лагранжа газового пузырька в неоднородном потоке.— Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 5, с. 1036—1039.
19. *Воинов О. В.*, *Петров А. Г.* Об устойчивости малого тела в неоднородном потоке.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1303—1306.
20. *Лихоманов В. И.*, *Петров А. Г.* Обтекание плоскопараллельным потоком газовой полости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5, с. 22—26.
21. *Петров А. Г.* О движении рингов Гольфстрима.— Океанология, 1980, т. 20, вып. 6, с. 965—973.

Москва

Поступила в редакцию
18.I.1982