

УДК 531.39

КАТАНИЕ ШАРА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

Фуфаев Н. А.

Показано, что при катании однородного шара по горизонтальной вращающейся плоскости силы вязкого трения об окружающую среду приводят центр шара к состоянию покоя, а силы сопротивления качению — к движению по раскручивающейся спирали.

Ранее [1, 2] движение однородного шара, катающегося без скольжения по горизонтальной и наклонной вращающейся плоскости, исследовалось в пренебрежении вязким трением и силами сопротивления качению. В этом случае на горизонтальной вращающейся плоскости центр шара описывает окружность.

1. Рассмотрим более общий случай движения тяжелого однородного шара на горизонтальной шероховатой плоскости Π , вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси. Пусть k — центральный радиус инерции шара, масса и радиус шара равны единице. Введем неподвижную систему декартовых координат $Oxyz$ так, что ось z совпадает с осью вращения плоскости Π , а оси x и y лежат в плоскости перемещения центра шара. Наряду с системой $Oxyz$ введем подвижную систему ортогональных осей e_1, e_2, e_3 так, что единичный орт e_1 направлен из начала координат O в центр O_1 шара, а орт e_3 — вдоль оси z (фиг. 1). Задавая положение центра шара полярными координатами r, γ и обозначая через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ проекции мгновенной угловой скорости шара на оси e_1, e_2, e_3 , а через R_1, R_2 — проекции силы реакции на те же оси, запишем уравнения динамики при следующих предположениях: шар движется в вязкой среде, на него действуют силы сопротивления качению, имеющие характер сил вязкого трения.

При этих предположениях уравнения динамики шара имеют вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} r'' - r\gamma'^2 &= R_1 - h^\circ r', & r\gamma'' + 2r'\gamma' &= R_2 - h^\circ r\gamma' \\ k^2(\omega_1' - \omega_2\gamma') &= R_2 - h_1^\circ \omega_1, & k^2(\omega_2' + \omega_1\gamma') &= -R_1 - h_1^\circ \omega_2 \\ k^2\omega_3' &= -h_2\omega_3 \end{aligned}$$

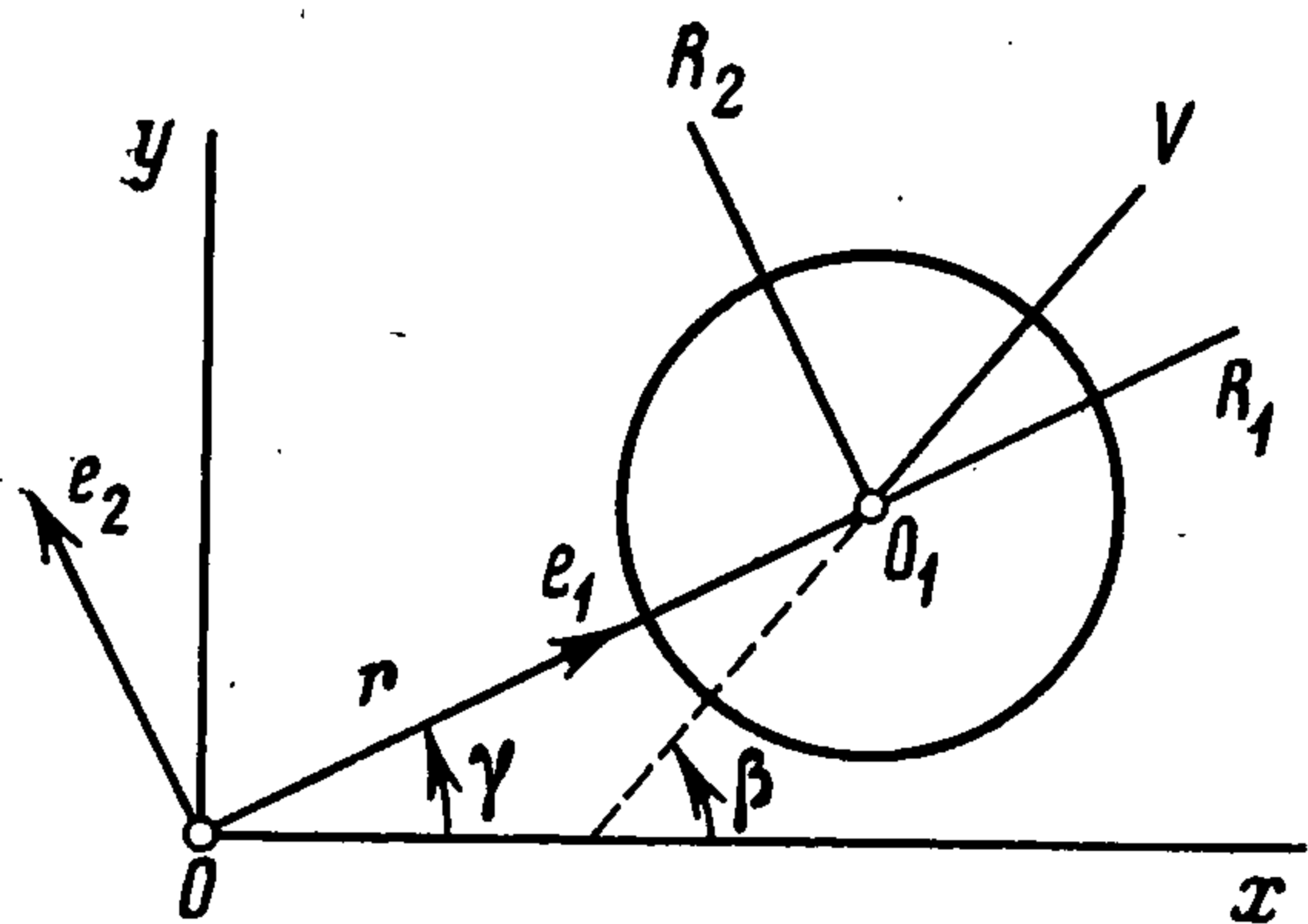
Здесь буквой h обозначены соответствующие коэффициенты вязкого трения. Условие качения шара без скольжения выражается в виде двух уравнений кинематической связи

$$(1.2) \quad r' - \omega_2 = 0, \quad r\gamma' + \omega_1 = r\Omega$$

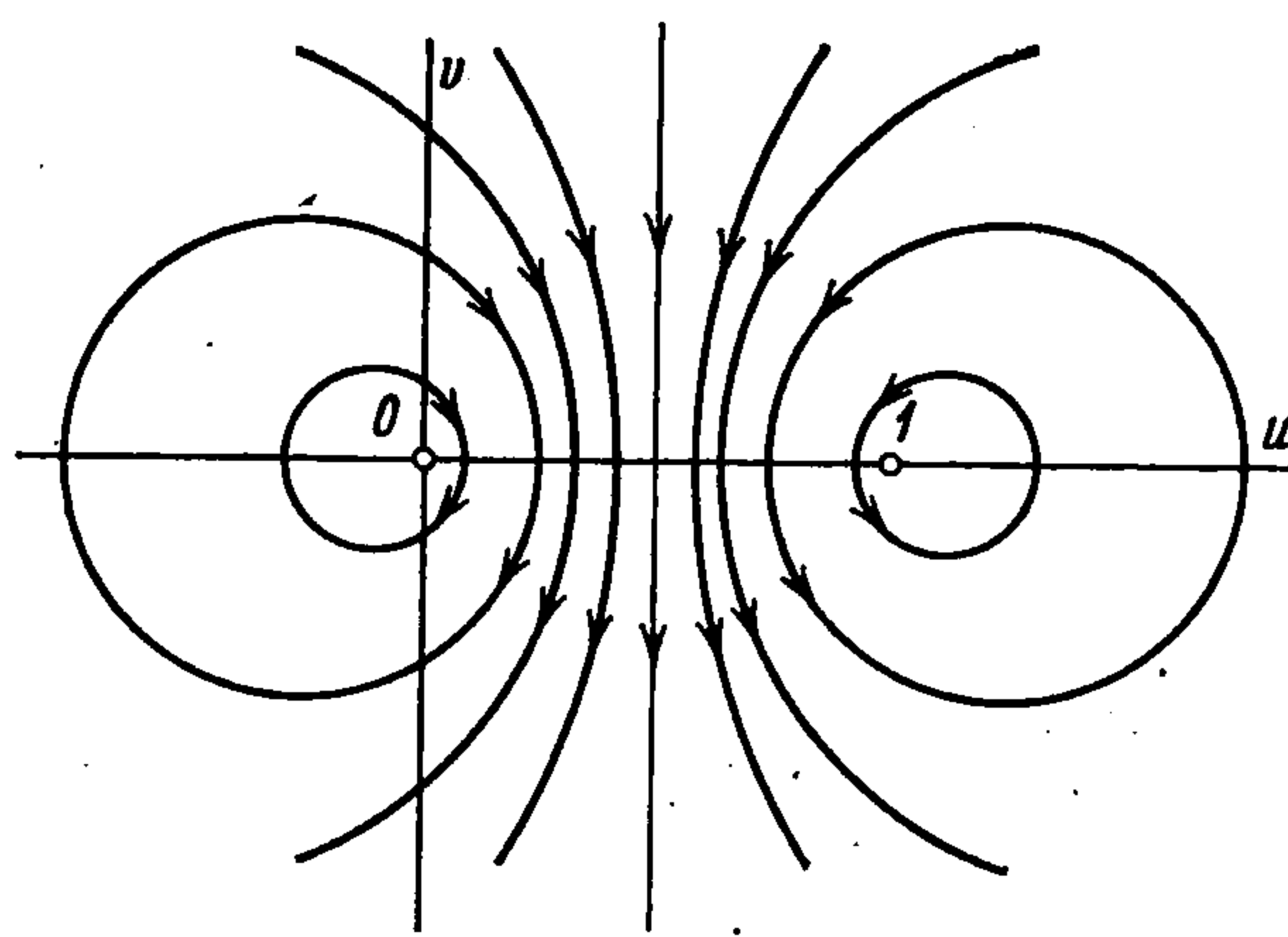
Из уравнений (1.1), (1.2) видно, что переменная ω_3 отделяется, т. е. собственное вращение шара вокруг вертикальной оси не влияет на движение его центра.

Исключая из (1.1), (1.2) величины $\omega_1, \omega_2, R_1, R_2$ и вводя безразмерное время $\tau = \Omega k^2 (1 + k^2)^{-1} t$ и безразмерные коэффициенты $h = h^\circ \Omega^{-1} k^{-2}$, $h_1 = h_1^\circ \Omega^{-1} k^{-2}$, $a = 1 + k^{-2}$, приходим к системе двух уравнений

$$(1.3) \quad \frac{r''}{r} + (h + h_1) \frac{r'}{r} = \gamma'^2 - \gamma', \quad \frac{r'}{r} = \frac{\gamma'' + (h + h_1) \gamma' - ah_1}{1 - 2\gamma'}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

После подстановки

$$(1.4) \quad u = \gamma^2, \quad v = r \dot{r}^{-1}, \quad w = \ln r$$

уравнения (1.3) сводятся к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u' &= -(h + h_1)u + v - 2uv + ah_1 \\ v' &= -u - (h + h_1)v + u^2 - v^2, \quad w' = v \end{aligned}$$

Поскольку переменная w отделилась, динамика шара описывается поведением изображающей точки на фазовой плоскости u, v в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$(1.6) \quad \begin{aligned} u' &= -(h + h_1)u + v - 2uv + ah_1 \\ v' &= -u - (h + h_1)v + u^2 - v^2 \end{aligned}$$

Система (1.6) имеет два состояния равновесия: (u_1, v_1) и (u_2, v_2) , характер которых определяется корнями характеристического уравнения $p_i = -(2v_i + h + h_1) \pm j(1 - 2u_i)$, $i = 1, 2$.

При $h = h_1(2a - 1)$ динамическая система (1.6) оказывается консервативной и можно проверить, что соотношение

$$(1.7) \quad u^2 + v^2 + 2ah_1v = C(2u - 1)$$

является ее интегралом. В этом случае точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) превращаются в особые точки типа центр, а разбиение фазовой плоскости u, v на траектории определяется семейством кривых (1.7). Это разбиение качественно совпадает с фазовым портретом на фиг. 2, который изображен для значений $h = h_1 = 0$.

Можно убедиться в том, что при $h = h_1 = 0$ центр шара всегда описывает некоторую окружность в неподвижной системе координат (в частном случае центр шара покоится). В самом деле, при $h = h_1 = 0$ система уравнений (1.5) имеет первый интеграл $\ln(u^2 + v^2)^{1/2} + w = C_1$, который в исходных переменных записывается в виде $(r^2 + r^2\dot{\gamma}^2)^{1/2} \equiv V = C_2$. Таким образом, центр шара перемещается с постоянной по модулю скоростью V .

Для получения траектории движения шара на плоскости Oxy найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет угол β (фиг. 1). Из соотношений $r' = V \cos(\beta - \gamma)$, $r\dot{\gamma} = V \sin(\beta - \gamma)$ получаем $u = v \operatorname{tg}(\beta - \gamma)$. Дифференцируя это соотношение по времени и подставляя вместо u', v' их выражения (1.6) при $h = h_1 = 0$, находим $\beta' = 1$. Отсюда следует, что центр шара в общем случае описывает окружность с постоянной угловой скоростью $\beta' = 1$, значение которой в реальном масштабе времени равно $\omega_0 = \Omega k^2(1 + k^2)^{-1}$ и не зависит от начальных условий.

Для оценки влияния вязкого трения и сил сопротивления качению на движение шара рассмотрим два случая.

2. Шар на вращающейся плоскости в вязкой среде. Динамика шара в рассматриваемом случае определяется поведением изображающей точки на фазовой плоскости u, v согласно дифференциальным уравнениям

$$(2.1) \quad u' = -hu + v - 2uv, \quad v' = -u - hv + u^2 - v^2$$

которые следуют из (1.6) при $h_1 = 0$.

Согласно уравнениям (2.1), на плоскости u, v находятся две особые точки: $(0, 0)$ и $(1, -h)$. Первая точка — устойчивый фокус, вторая — неустойчивый. Изоклина вертикальных касательных к фазовым траекториям — гипербола $(1 - 2u)(2v + h) = h$, а изоклина горизонтальных касательных — гипербола $(1 - 2u)^2 - (2v + h)^2 = 1 - h^2$. Знак угла поворота векторного поля [3] при переходе от системы уравнений, которая получается из (2.1) при $h = 0$, к системе (2.1) определяется разностью $\Delta = h(u - 1)(u^2 + v^2)$. Кроме того, на прямой $u = 1/2$ имеем $u' = h/2 < 0$, т. е. прямая $u = 1/2$ является прямой без контакта и предельный цикл, если он существует, ее пересекать не может. Отсюда следует, что предельные циклы, охватывающие особую точку $(0, 0)$, отсутствуют.

Покажем, что и в полуплоскости $u > 1/2$ нет предельных циклов, охватывающих особую точку $(1, -h)$. Для этого перенесем начало координат в эту точку при помощи замены переменных, полагая $u = 1 + \xi, v = -h + \eta$. В переменных ξ, η система (2.1) принимает вид

$$(2.2) \quad \xi' = -\eta(1 + 2\xi) + h\xi, \quad \eta' = \xi^2 + \xi - \eta^2 + h\eta$$

При значении $h = 0$ эта система имеет интеграл $H \equiv (\xi^2 + \eta^2)(1 + 2\xi)^{-1} = C$. Рассматривая семейство кривых $H = C$ в качестве топографической системы Пуанкаре, вычислим dH/dt в силу уравнений (2.2). В результате получаем $dH/dt = 2h(1 + \xi)(\xi^2 + \eta^2)(1 + 2\xi)^{-2}$.

Отсюда следует, что на полуплоскости $\xi > -1/2$ ($u > 1/2$) предельных циклов нет, поскольку при $\xi > -1/2$ знак выражения dH/dt не меняется.

Разбиение фазовой плоскости u, v на траектории показано на фиг. 3. При любых начальных условиях изображающая точка на плоскости u, v стремится к устойчивой особой точке в начале координат. Соответствующее движение центра шара на плоскости Oxy представляет движение по скручивающейся спирали к неподвижной точке, положение которой определяется величиной и направлением начальной скорости центра шара.

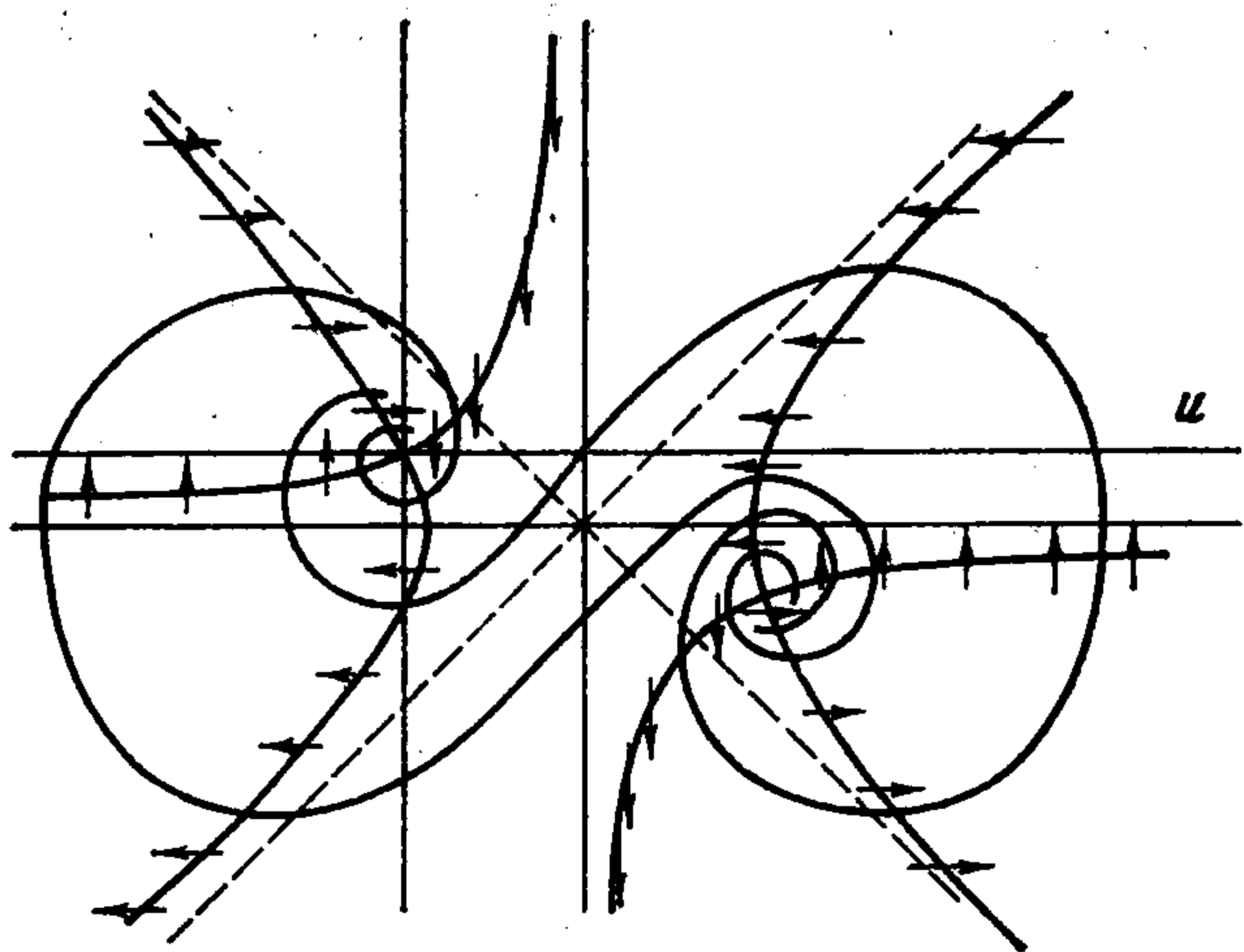
Эксперимент, проведенный Г. Г. Денисовым в отделе динамики твердого тела НИИ ПМК при Горьковском университете, позволил наблюдать именно этот случай катания шара по вращающейся горизонтальной плоскости.

3. Шар на вращающейся плоскости при наличии сил сопротивления качению. В этом случае динамика шара определяется движением изображающей точки на плоскости u, v согласно дифференциальным уравнениям

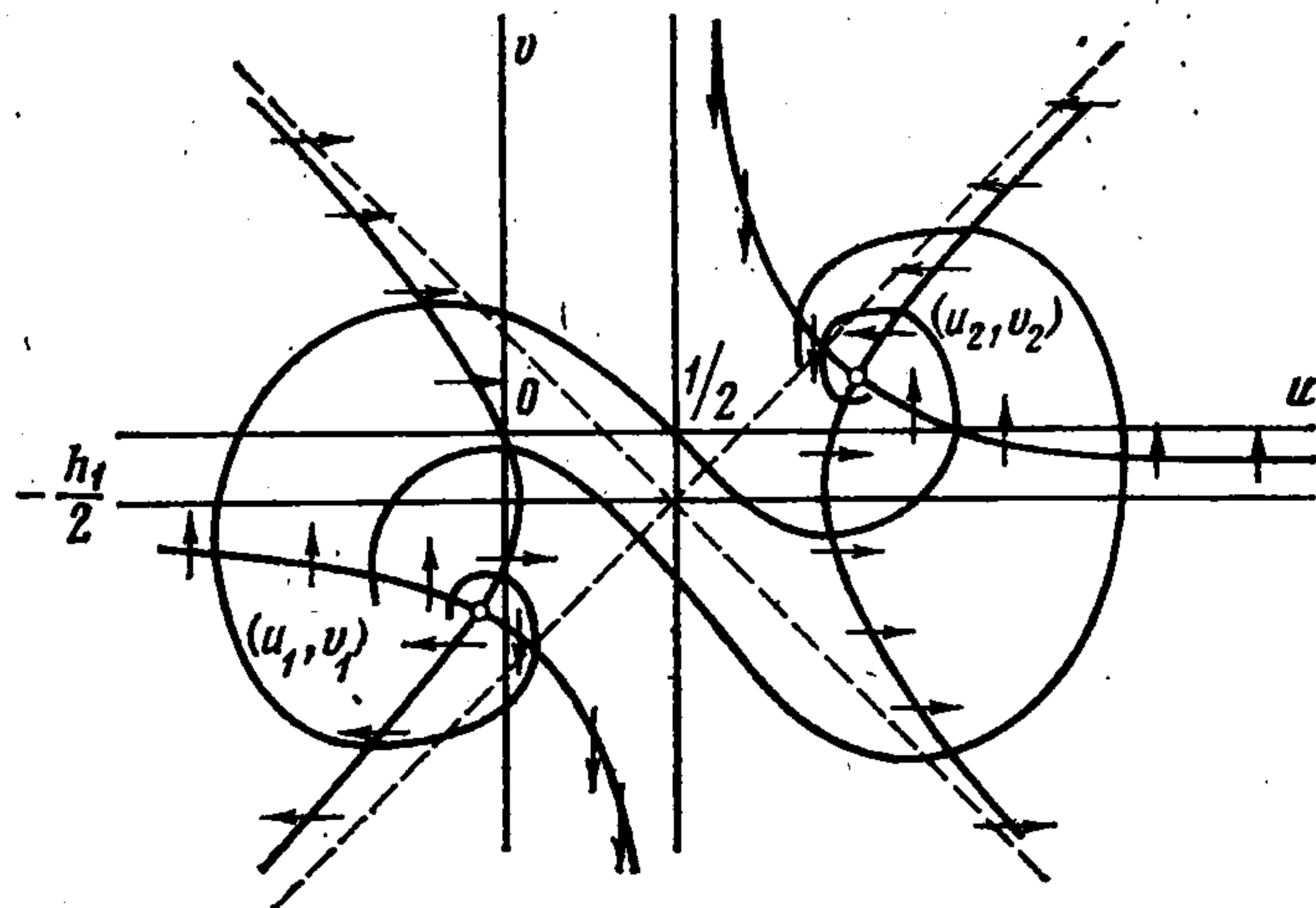
$$(3.1) \quad u' = -h_1u + v - 2uv + ah_1, \quad v' = -u - h_1v + u^2 - v^2$$

которые следуют из (1.6) при $h = 0$. Изоклина горизонтальных касательных к траекториям на плоскости u, v — гипербола

$$(3.2) \quad (2u - 1)^2 - (2v + h_1)^2 = 1 - h_1^2$$



Фиг. 3



Фиг. 4

а изоклина вертикальных касательных — гипербола

$$(3.3) \quad (2u - 1)(2v + h_1) = h_1(2a - 1)$$

Гипербола (3.2) пересекает ось $v = 0$ в точке $u = 1$, а гипербола (3.3) — в точке $u = a > 1$. Соответствующими точками пересечения этих гипербол с осью $u = 0$ являются $v = -h_1$ и $v = -ah_1 < -h_1$. Точки пересечения (u_1, v_1) и (u_2, v_2) гипербол (3.2) и (3.3) — особые для системы дифференциальных уравнений (3.1). Корни характеристического уравнения системы (3.1), линеаризованной в малой окрестности особых точек (u_1, v_1) и (u_2, v_2) , равны $p_i = -(2v_i + h_1) \pm j(1 - 2u_i)$, $i = 1, 2$.

Согласно фиг. 4, $v_1 < -h_1$, поэтому особая точка (u_1, v_1) — неустойчивый фокус, а точка (u_2, v_2) — устойчивый, поскольку $v_2 > 0$. Покажем, что по крайней мере для $0 < h_1 \ll 1$ на плоскости u, v нет предельных циклов. В самом деле, на прямой $u = 1/2$ всюду $u' = h_1(a - 1/2) > 0$, поэтому, если существуют предельные циклы, то они охватывают особую точку (u_1, v_1) , находясь в области $u < 1/2$, или особую точку (u_2, v_2) , находясь в области $u > 1/2$.

Рассмотрим первую возможность. Введем новые координаты ξ_1, η_1 с началом в особой точке $u_1 = 0 + O(h_1^2)$, $v_1 = -ah_1 + O(h_1^2)$ и запишем в этих координатах систему уравнений (3.1)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \xi_1' &= (1 - 2\xi_1)\eta_1 + h_1(2a - 1)\xi_1, & \eta_1' &= \xi_1^2 - \xi_1 - \eta_1^2 + \\ &+ h_1(2a - 1)\eta_1 \end{aligned}$$

При $h_1 = 0$ эта система имеет интеграл $H_1 \equiv (\xi_1^2 + \eta_1^2)(1 - 2\xi_1)^{-1} = C_1$. Согласно системе уравнений (3.4), производная по времени $dH_1/dt = 2h_1(2a - 1)(\xi_1^2 + \eta_1^2)(1 - \xi_1)(1 - 2\xi_1)^{-2} > 0$ для значений $\xi_1 < 1$. Отсюда следует, что предельные циклы в области $u < 1/2$ отсутствуют.

Рассмотрим вторую возможность. Введем новые координаты ξ_2, η_2 с началом в особой точке $u_2 = 1 + O(h_1^2)$, $v_2 = (a - 1)h_1 + O(h_1^2)$ и запишем в этих координатах систему уравнений (3.1)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \xi_2' &= -(1 + 2\xi_2)\eta_2 - h_1(2a - 1)\xi_2 \\ \eta_2' &= \xi_2^2 + \xi_2 - \eta_2^2 - h_1(2a - 1)\eta_2 \end{aligned}$$

При $h_1 = 0$ эта система имеет интеграл $H_2 \equiv (\xi_2^2 + \eta_2^2)(1 + 2\xi_2)^{-1} = C_2$. Согласно системе уравнений (3.5), производная по времени $dH_2/dt = -2h_1(2a - 1)(\xi_2^2 + \eta_2^2)(1 + \xi_2)(1 + 2\xi_2)^{-2} < 0$ для $\xi_2 > -1$. Отсюда следует, что предельные циклы в области $u > 1/2$ отсутствуют. Фазовый портрет на фиг. 4 показывает, что при любых начальных условиях изображающая точка на плоскости u, v стремится к устойчивой особой

точке (u_2, v_2) . Соответствующее движение центра шара на плоскости Oxy — это движение по кривой, приближающейся к раскручивающейся спирали с центром в начале координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
2. Weltner K. Stable circular orbits of freely moving balls on rotating discs.— Amer. J. Phys., 1979, v. 47, No. 11, p. 984—986.
3. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.

Горький

Поступила в редакцию
8.XII.1981