Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 531.384

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Маркеев А. П., Мощук Н. К.

Рассматривается движение твердого тела на неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскости в поле тяжести. Поверхность, ограничивающая тело, выпуклая, а тело мало отличается от динамически и геометрически симметричного. Это отличие характеризуется величиной малого параметра ε. Невозмущенная задача (при $\varepsilon = 0$) является интегрируемой [1]. Основная цель состоит в исследовании движения при $0 < \varepsilon \ll 1$. Показана невырожденность функции Гамильтона невозмущенного движения и на основании теоремы А. Н. Колмогорова [2, 3] установлена вечная близость переменных «действие» к их начальным значениям, соответствующим условно-периодическим движениям в невозмущенной задаче. Тем самым установлена малость изменения основных геометрических характеристик невозмущенного движения при малом отличии твердого тела от геометрически и динамически симметричного.

К настоящему времени значительные результаты достигнуты в решении задачи о существовании и устойчивости стационарных движений твердых тел и гиростатов на неподвижной плоскости, в частности на абсолютно гладкой. Стационарные движения не обязательно являются вращениями тела вокруг вертикали. Кроме того, устойчивость рассматривалась в строгой нелинейной постановке. Основные результаты здесь получены в работах [4—6]. Проведен [7] качественный анализ движения тяжелого однородного трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости в предположении его близости к шару.

1. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат с началом в точке O горизонтальной плоскости OXY, по которой движется тело, и осью OZ, направленной вертикально вверх, а $Gxyz$ — система координат, жестко связанная с телом. Начало связанной системы координат находится в центре тяжести тела, а оси направлены по его главным центральным осям инерции. Взаимная ориентация связанной и неподвижной систем координат задается при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ.

Рассматриваемая механическая система голономна и имеет пять степеней свободы. За обобщенные координаты примем три угла Эйлера и две координаты X_G, Y_G центра тяжести в системе координат $OXYZ$. Третья координата Z_G — расстояние от центра тяжести тела до горизонтальной плоскости — и будет при заданной форме поверхности, ограничивающей тело, функцией углов θ, φ.

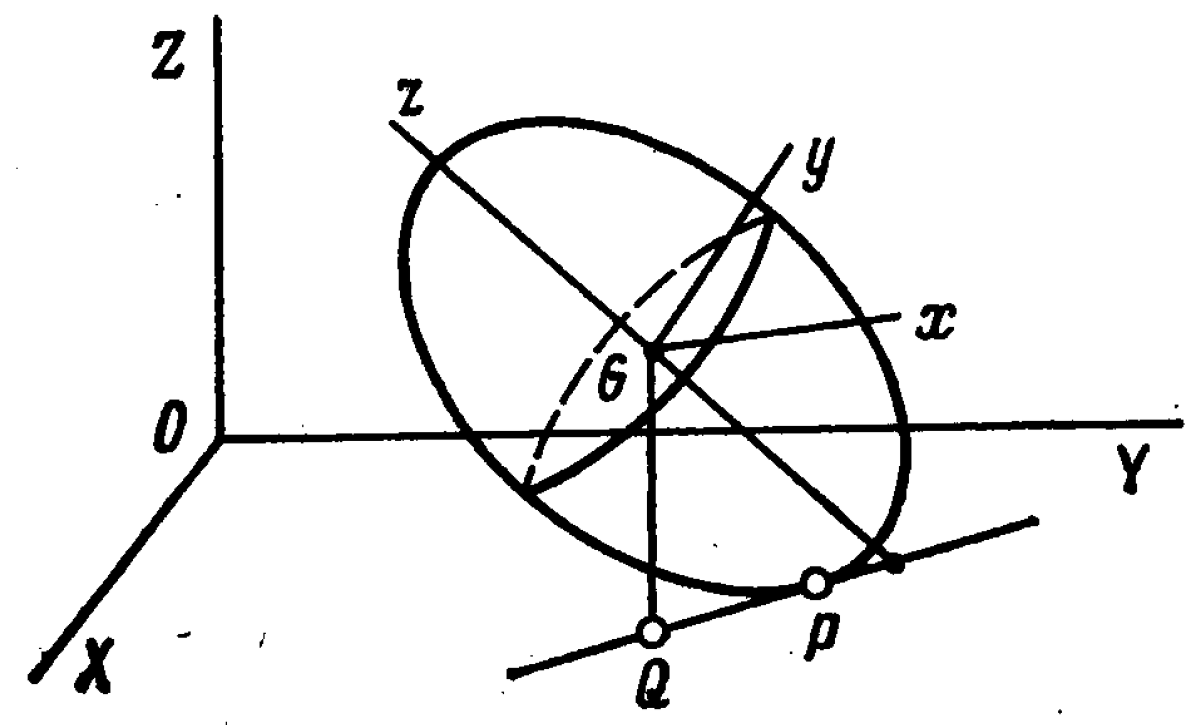
Пусть m — масса тела, g — ускорение свободного падения, A, B и C — моменты инерции тела относительно осей Gx, Gy и Gz соответственно. Кинетическая и потенциальная энергии тела будут такими:

$$
\begin{aligned}
&T = {}^1/_2 m\,(X_G^{\cdot 2} + Y_G^{\cdot 2} + Z_G^{\cdot 2}) + {}^1/_2\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \\
&\Pi = mgZ_G\,(\theta, \varphi) \\
&p = \psi^{\cdot} \sin\theta \sin\varphi + \theta^{\cdot} \cos\varphi, \quad q = \psi^{\cdot} \sin\theta \cos\varphi - \theta^{\cdot} \sin\varphi \\
&r = \psi^{\cdot} \cos\theta + \varphi^{\cdot}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Обобщенные координаты ψ, X_G, Y_G циклические. Поэтому проекция p_ψ на вертикаль вектора кинетического момента тела относительно точки G постоянна и постоянна также скорость проекции Q центра тяжести на плоскость OXY (фиг. 1).

Наличие трех циклических координат позволяет свести задачу о движении твердого тела к исследованию системы с двумя степенями свободы. Не ограничивая общности, будем считать, что скорость точки Q равна нулю. Величина же p_ψ в функции Гамильтона $H = H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi)$ рассматривается как параметр.

Пусть ограничивающая тело поверхность мало отличается от поверхности вращения с осью Gz и тело близко к динамически симметричному.



Фиг. 1

Тогда можно положить, что $Z_G = f(\theta) + \varepsilon f_1(\theta, \varphi)$, $B = A(1+\varepsilon)$ $(0 \leqslant \varepsilon \ll 1)$, и гамильтониан приведенной системы запишется в виде

$$H = H_0(\theta, p_\theta, p_\varphi, p_\psi) + \varepsilon H_1(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi, \varepsilon)$$

Невозмущенное движение (при $\varepsilon = 0$) представляет собой движение динамически и геометрически симметричного тела, например тяжелого однородного тела вращения. Соответствующий невозмущенному движению гамильтониан H_0 имеет вид

$$H_0 = \frac{p_\theta^2}{2(A+m\rho^2)} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + mgf(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{2C} \tag{1.2}$$

Здесь $\rho = \rho(\theta) = \pm f'(\theta)$ — расстояние от точки касания P тела с плоскостью OXY до точки Q. При $\varepsilon = 0$ обобщенные скорости и импульсы связаны соотношениями

$$\psi^{\cdot} = \frac{p_\psi - p_\varphi\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \quad \varphi^{\cdot} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)p_\varphi + \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{A\sin^2\theta} \tag{1.3}$$

$$\theta^{\cdot} = \frac{p_\theta}{A+m\rho^2}$$

2. Рассмотрим невозмущенное движение подробнее. Из (1.2) видно, что в невозмущенном движении еще одна обобщенная координата — угол φ — будет циклической. Соответствующий импульс p_φ — проекция кинетического момента тела на ось симметрии — постоянен, а исследование невозмущенного движения сводится к рассмотрению приведенной системы уже с одной степенью свободы. Кинетическая и потенциальная энергии приведенной системы определяются выражениями

$$T_* = {}^1/_2(A+m\rho^2)\theta^{\cdot 2}, \qquad \Pi_* = \frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + mgf(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{2C} \tag{2.1}$$

Изменение угла $\theta = \theta(t)$ находится при помощи интеграла энергии $T_* + \Pi_* = h = \text{const}$. Обозначая через θ_0 начальное значение угла θ, получаем

$$\pm\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\frac{A+m\rho^2}{2(h-\Pi_*)}}\,d\theta = t \tag{2.2}$$

При известном $\theta = \theta(t)$ изменение углов $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ находится из (1.3) квадратурой.

Рассмотрим сначала такие движения тела, когда его ось вращения не проходит через вертикальное положение, т. е. угол θ во все время движения не может стать равным 0 или π. Для этого достаточно потребовать, чтобы $p_\psi \neq \pm p_\varphi$. Очевидно, что $h - \Pi_*(\theta_0) > 0$, а при $p_\psi \neq \pm p_\varphi$

величина $h - \Pi_*(\theta)$ делается отрицательной, если $\theta \to 0$ или π. Следовательно угол θ заключен между двумя вещественными корнями уравнения $h - \Pi_*(\theta) = 0$, лежащими между 0 и π. Если θ_1, θ_2 — два различных ($\theta_2 > \theta_1$) простых корня этого уравнения и в промежутке между этими корнями $h > \Pi_*(\theta)$, то угол θ колеблется между θ_1 и θ_2 в соответствии с (2.2). Период этих колебаний

$$(2.3) \qquad \tau = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\frac{2(A + m\rho^2)}{h - \Pi_*(\theta)}}\, d\theta$$

Если во все время движения $\theta = \theta_0$, то имеет место регулярная прецессия твердого тела. Его центр тяжести при этом неподвижен, а угловые скорости $\psi^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}$ вращения тела вокруг вертикали и оси симметрии постоянны. Точка P касания тела с плоскостью OXY описывает на последней окружность с центром в точке Q, а на поверхности тела — окружность, плоскость которой перпендикулярна оси симметрии тела. В частном случае, когда $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$, тело касается плоскости одной точкой своей поверхности.

При фиксированных h регулярная прецессия возможна только тогда, когда θ_0 будет кратным корнем уравнения $h - \Pi(\theta) = 0$, т. е. если $\theta = \theta_0$ удовлетворяет системе

$$(2.4) \qquad \Pi_*(\theta) = h, \ \Pi_*'(\theta) = 0$$

При любой функции $f(\theta)$ соответствующим выбором постоянных p_ψ, p_φ, h можно получить регулярную прецессию с произвольным заданным значением угла нутации θ_0.

Действительно, второе уравнение из (2.4) можно записать так:

$$(2.5) \qquad 2p_\varphi = ap_\psi \pm \sqrt{(a^2-4)p_\psi^2 + 4b}, \quad a = (1+\cos^2\theta)/\cos\theta$$
$$b = Amgf' \sin^3\theta/\cos\theta$$

Так как $|a| > 2$, то соответствующим выбором p_ψ подкоренное выражение в (2.5) можно сделать положительным и тем самым удовлетворить второму уравнению из (2.4). Первое же уравнение из (2.4) естественным образом удовлетворяется, если положить $h = \Pi_*(\theta_0)$.

На фиг. 2 для случая $p_\psi \neq \pm p_\varphi$ в качестве примеров представлено поведение траекторий приведенной системы, когда $\Pi_*(\theta)$ имеет один локальный минимум (фиг. 2, *а*) и когда $\Pi_*(\theta)$ имеет два локальных минимума и один локальный максимум (фиг. 2, *б*).

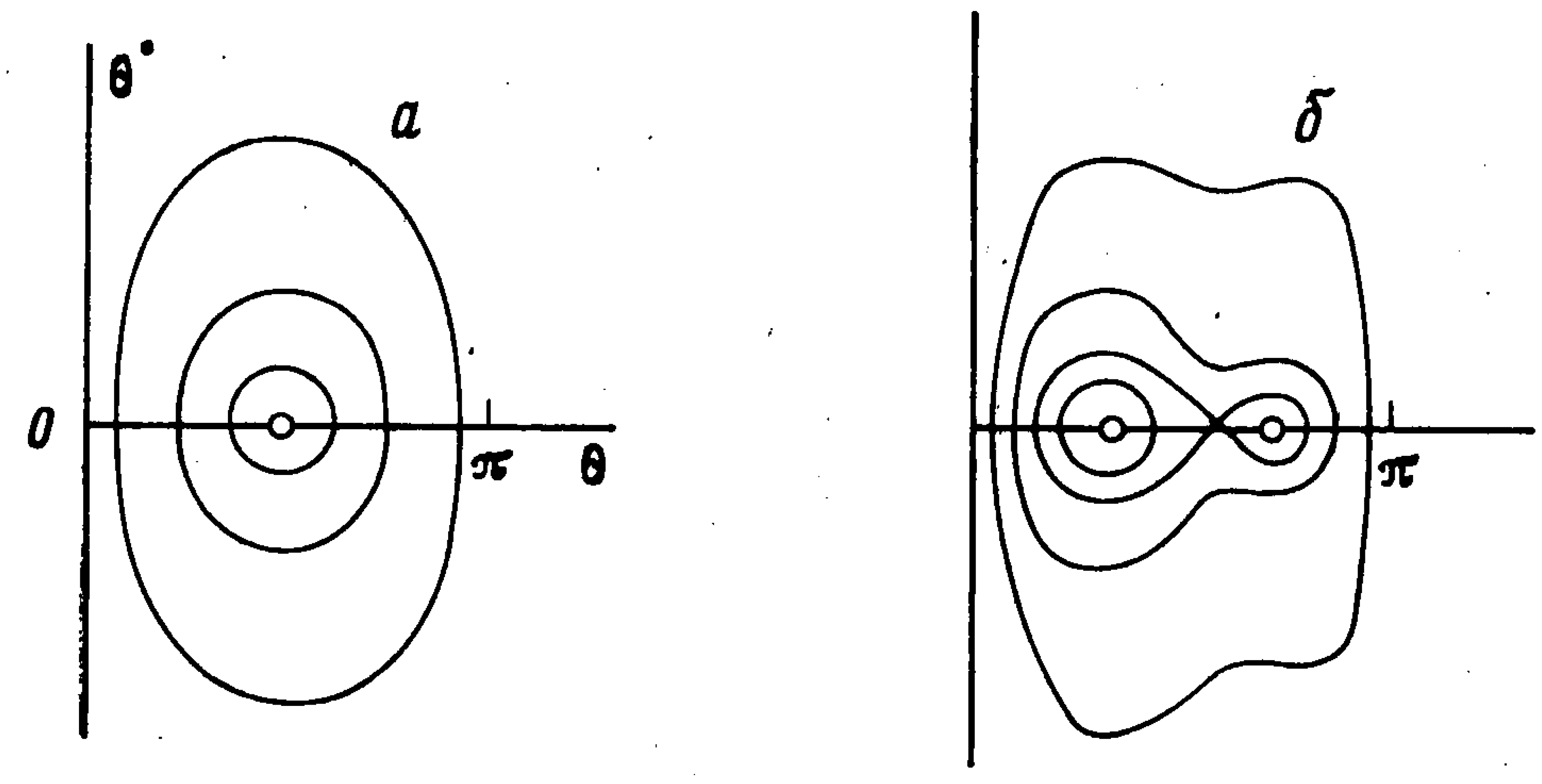
Кратко рассмотрим такие движения тела, когда его ось симметрии может проходить через вертикальное положение. Если ось симметрии может пройти положение $\theta = 0$, то необходимо должно выполняться равенство $p_\psi = p_\varphi$. Раскрывая неопределенность в выражении для функции $\Pi_*(\theta)$, получим

$$(2.6) \qquad \Pi_* = \frac{p_\varphi^2}{2A}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + mgf(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{2C}$$

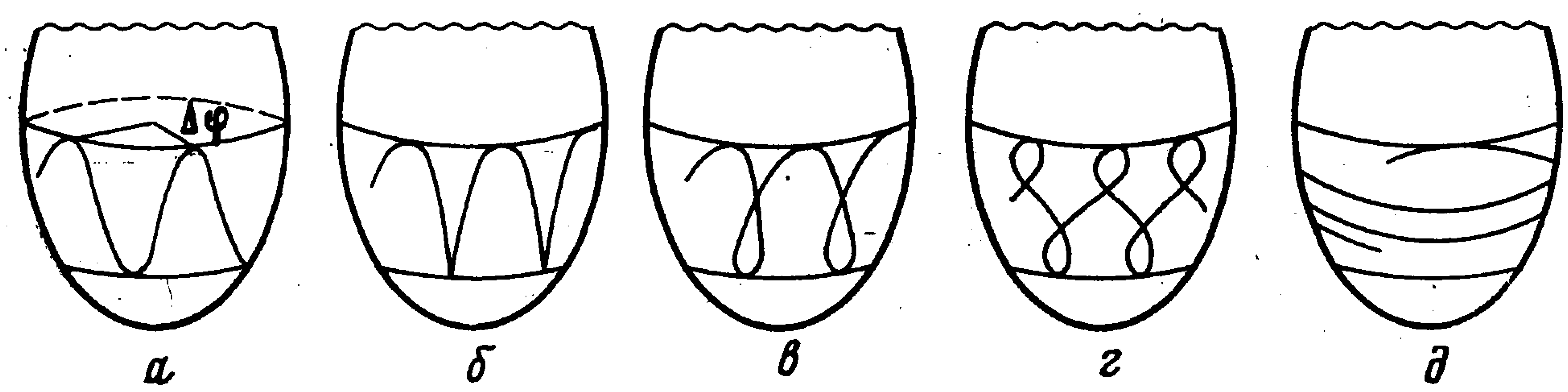
Так как $f'(0) = 0$, то и $\Pi_*'(0) = 0$. Это означает, что существует стационарное движение тела — вращение вокруг вертикально расположенной оси симметрии с постоянной угловой скоростью r_0. Анализируя характер экстремума функции (2.6) в точке $\theta = 0$ и учитывая $p_\varphi = Cr_0$, получаем, что достаточным условием устойчивости такого движения по отношению к возмущениям θ и $\theta^{\boldsymbol{\cdot}}$ будет выполнение неравенства

$$(2.7) \qquad C^2r_0^2 + 4Amgf''(0) > 0$$

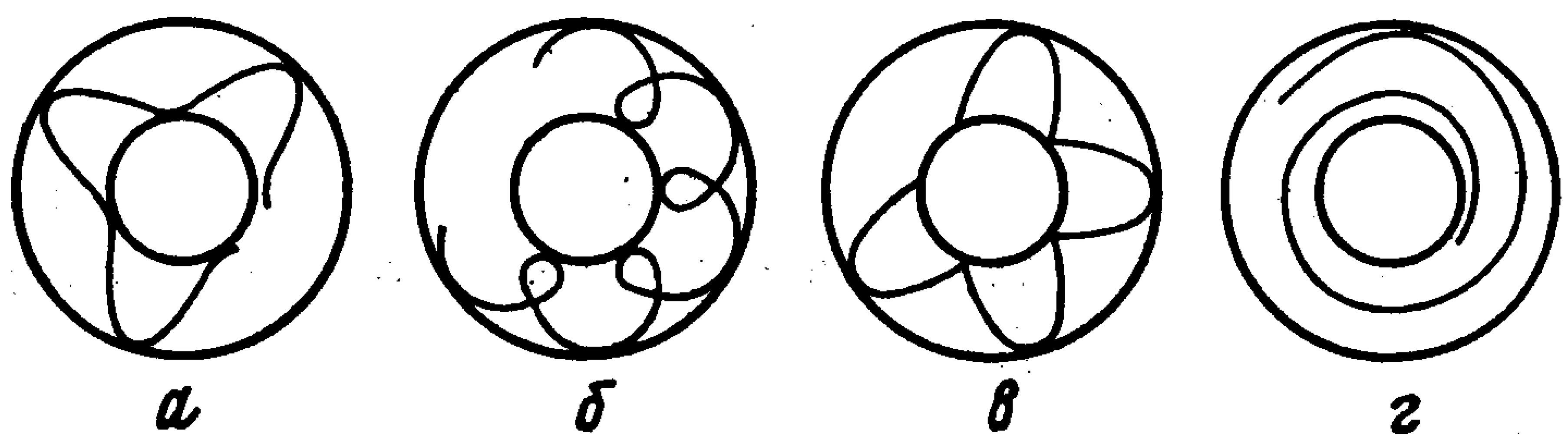
При обратном знаке в неравенстве (2.7) имеет место неустойчивость. Эти условия согласуются с соответствующими результатами работ [4, 5].



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Если ось симметрии может пройти через положение, при котором $\theta = \pi$ (переворот), то $p_\psi = -p_\varphi$. Приведенная потенциальная энергия Π_* будет записываться в виде (2.6), где в первом слагаемом $\operatorname{tg}\theta/2$ надо заменить на $\operatorname{ctg}\theta/2$. Условие устойчивости вращения вокруг вертикали запишется в виде неравенства (2.7), только производная f'' должна вычисляться при $\theta = \pi$.

Если $p_\psi = p_\varphi = 0$, то при движении тела его ось симметрии может проходить оба особых положения $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. При $p_\psi = p_\varphi = 0$ из (1.3) получаем $\psi = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, т. е. тело движется так, что его ось симметрии все время находится в фиксированной вертикальной плоскости. Зависимость угла нутации от времени получается из (2.2), где следует положить $\Pi_* = mgf(\theta)$.

Рассмотрим характер следов точки касания на плоскости и поверхности тела для движения, не являющегося регулярной прецессией. Если угол θ колеблется между θ_1 и θ_2 с периодом τ, то ψ и φ за время τ получают некоторые постоянные приращения. В этом случае след точки касания на поверхности тела заключен между двумя параллелями, а на плоскости — между двумя концентрическими окружностями, что иллюстрируется фиг. 3 и 4. На фиг. 3, *а* представлен случай, когда $\varphi^\cdot$ не изменяет своего знака; на фиг. 3, *б* $\varphi^\cdot$ обращается в нуль при $\theta = \theta_1$; фиг. 3, *в* и *г* соответствует таким движениям тела, когда за период τ одного его колебания по углу θ величина $\varphi^\cdot$ меняет свой знак соответственно один и два раза; фиг. 3, *д* соответствует сепаратрисе в плоскости θ, $\theta^\cdot$. На фиг. 4, *а*, *б* и *в* величина $\psi^\cdot$ за время τ не изменяет знак, меняет знак один раз и обращается в нуль при $\theta = \theta_1$; фиг. 4, *г* соответствует сепаратрисе.

3. В дальнейшем считаем, что $p_\psi \neq \pm p_\varphi$, т. е. исключается возможность существования таких движений тела, когда его ось симметрии могла бы пройти через особые положения $\theta = 0, \pi$. Изоэнергетические кривые $H_0 = \text{const}$ в плоскости θ, p_θ принципиально не отличаются от соответствующих кривых $T_* + \Pi_* = h$ в плоскости $\theta, \theta^\cdot$. Исключив из рассмотрения асимптотические движения, соответствующие регулярным прецессиям тела, получим, что изоэнергетические кривые в плоскости θ, p_θ будут замкнутыми и на них $0 < \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 < \pi$.

Для исследования возмущенного движения ($0 < \varepsilon \ll 1$) удобно ввести канонические переменные действие — угол $\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi \to w_1, w_2, I_1, I_2$. Переменные действия задаются при помощи равенств

$$(3.1)\qquad I_1(I_2, H_0) = \frac{1}{2\pi}\oint\left\{(A+m\rho^2)\left[2H_0 - \frac{I_2^2}{C} - \frac{(p_\psi - I_2\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} - 2mgf(\theta)\right]\right\}^{1/2} d\theta, \qquad I_2 = p_\varphi$$

Интегрирование производится по замкнутым кривым $H_0 = \text{const}$.

В переменных w_1, w_2, I_1, I_2 функция Гамильтона возмущенного движения примет вид

$$(3.2)\qquad H = H_0(I_1, I_2) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, w_1, w_2)$$

Возмущение εH_1 имеет период 2π по угловым переменным w_1, w_2. Зависимость от параметров задачи, в том числе и от p_ψ, в (3.2) не указана.

Частоты невозмущенного движения $w_i(I_1, I_2) = \partial H_0/\partial I_i$ $(i = 1, 2)$ будут аналитическими функциями своих аргументов. Переменные I_1, I_2 при $\varepsilon = 0$ постоянны и равны своим начальным значениям.

Рассмотрим изоэнергетический уровень $H_0 = h = \text{const}$. На нем $I_1 = I_1(I_2, h)$, следовательно, частоты ω_i — функции переменной I_2. Если отношение частот ω_2/ω_1 будет зависеть от I_2 (т. е. не сводится к постоянной), то изучаемая система изоэнергетически невырождена. Тогда, согласно [2, 3], имеет место устойчивость переменных действие. Это означает, что при достаточно малых ε в системе с функцией Гамильтона (3.2) переменные I_1, I_2 вечно остаются вблизи своих начальных значений.

Условие невырожденности в данной задаче выполнено.

Чтобы проверить выполнение условия невырожденности, рассмотрим тождество $H_0(I_1(I_2, h), I_2) = h$. Дифференцируя его по I_2, как и в [8], получаем, что

$$(3.3)\qquad \omega_2/\omega_1 = -\partial I_1/\partial I_2$$

Из интеграла (3.1) находим

$$(3.4)\qquad \frac{\partial I_1}{\partial I_2} = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{A+m\rho^2}\left[\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)I_2 + \frac{p_\psi\cos\theta - I_2}{A\sin^2\theta}\right]\times \left[2H_0 - \frac{I_2^2}{C} - \frac{(p_\psi - I_2\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} - 2mgf(\theta)\right]^{-1/2} d\theta$$

Учитывая (1.2) и (1.3), из (3.3), (3.4) получим, что на изоэнергетическом уровне отношение частот задается формулой

$$(3.5)\qquad \omega_2/\omega_1 = \Delta\varphi/2\pi$$

Здесь $\Delta\varphi$ — угол, на который повернется тело вокруг оси симметрии за время, равное периоду колебаний угла θ в невозмущенном движении (фиг. 3, a)

$$(3.6)\qquad \Delta\varphi = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)I_2\tau + \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{I_2 - p_\psi\cos\theta}{A\sin^2\theta}\sqrt{\frac{2(A+m\rho^2)}{h - \Pi_*}}\,d\theta$$

Покажем, что угол $\Delta\varphi$ зависит от I_2. Для этого исследуем поведение $\Delta\varphi$ при $I_2 \to \infty$, т. е. когда в начальный момент тело быстро закручено вокруг оси симметрии.

Пусть $\psi^{\cdot} = \theta^{\cdot} = 0$, $p_\varphi = I_2$, $\theta = \theta_1$ при $t = 0$. При таких начальных данных $p_\psi = I_2 \cos\theta$, $h = mgf(\theta_1) + I_2^2/(2C)$. Уравнение $h - \Pi_*(\theta) = 0$ запишется в виде

$$I_2^2 \frac{(\cos\theta_1 - \cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + mgf(\theta) = mgf(\theta_1) \tag{3.7}$$

Угол θ во время движения тела изменяется между θ_1 и θ_2, где θ_2 — ближайший к θ_1 корень уравнения (3.7). Его можно представить в виде ряда по отрицательным степеням I_2

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2Amg\rho_1}{I_2^2} + \frac{(2Amg\rho_1)^2(2\operatorname{ctg}\theta_1 + \rho_1'/\rho_1)}{2I_2^4} + O\left(\frac{1}{I_2^6}\right) \tag{3.8}$$

Через ρ_1 и ρ_1' обозначены значения функции $\rho(\theta)$ и ее производной при $\theta = \theta_1$. Формула (3.8) уточняет соответствующую оценку величины θ_2, приведенную в [1].

Используя (3.8), из (2.3) получаем разложение для периода колебаний угла θ, а затем такое выражение для величины $\Delta\varphi$, определенной равенством (3.6):

$$\Delta\varphi = \frac{14A}{3C}\sqrt{1 + \frac{m\rho_1^2}{A}}\left\{1 + \frac{13Cmg\rho_1}{35I_2^2}\left[\left(3\frac{A}{C} - 2\right)\operatorname{ctg}\theta_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{A\rho_1'(A + 3m\rho_1^2)}{C\rho_1(A + m\rho_1^2)}\right]\right\} + O\left(\frac{1}{I_2^4}\right) \tag{3.9}$$

При любых значениях A и C и для любой формы поверхности, ограничивающей тело, выбором произвольного угла θ_1 всегда можно добиться того, чтобы выражение в квадратных скобках в (3.9) не было равно нулю. (Экзотический случай $\rho(A + m\rho^2)\sin^{(3-2C/A)}\theta = \mathrm{const}$ исключается.) Таким образом, $\Delta\varphi$ не сводится к постоянной величине, а зависит от I_2, т. е. условие невырожденности выполнено.

Согласно теореме А. Н. Колмогорова [2, 3], переменные «действие» будут устойчивы при малых возмущениях функции Гамильтона H_0. Отсюда сразу следует, что проекция кинетического момента тела на ось Gz будет при всех t близка ее начальному значению при $t = 0$. При $0 < \varepsilon \ll 1$ фазовый портрет в плоскости θ, $\theta^{\cdot}$ будет мало отличаться от соответствующего фазового портрета невозмущенной задачи. В частности, мало изменится диапазон изменения угла нутации, а также характер и место расположения следов точки касания P на плоскости и поверхности, ограничивающей твердое тело.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appel P.* Traité de Mécanique rationnelle. T. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1953. 575 p.— Рус. перев.: М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4, с. 527—530.
3. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13—40.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 778—784.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 11—21.
6. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 504—511.
7. *Маркеев А. П.* О движении тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 553—567.
8. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.V.1982