Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 531.36

НЕПРЕРЫВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ОДНОГО КЛАССА НЕАВТОНОМНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Гольцер Я. М.

Рассматривается задача о непрерывной нормализации параметрически возмущенных неавтономных систем дифференциальных уравнений с постоянной линейной частью. Выделяется класс неавтономных систем, который формальным преобразованием с непрерывными и ограниченными по параметрам и времени коэффициентами приводим к непрерывной нормальной форме резонансного типа. Детализируется структура нормальной формы почти периодических систем. Полученные результаты применяются к исследованию задачи о рождении стационарных режимов в окрестности резонанса.

Ранее [1, 2] для автономных параметрически возмущенных систем была введена непрерывная нормальная форма и изучена задача о смене устойчивости при прохождении системы через резонанс. Для неавтономных систем дифференциальных уравнений, не зависящих от параметров, нормальная форма изучена для периодических систем [3—7], а также для систем, коэффициенты которых конечные тригонометрические суммы [8, 9]. Общие неавтономные системы, не зависящие от параметров, рассматривались в [10]. Методы, развитые в [5], обобщены в [11] на системы, аналитически зависящие от малых параметров.

1. Постановка задачи. Предварительные результаты. Пусть K^n ($R^{(n)}$) комплексное (действительное) n-мерное векторное пространство, P^n—множество n-мерных целочисленных векторов $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $|p| = |p_1| + \ldots + |p_n|$. Если $p_s \geqslant 0$, то $p \in P_+^n$. Пусть $D \subset R^d$ — некоторая замкнутая d-мерная область. Через C обозначим множество комплекснозначных функций $f(t, \mu)$ непрерывных и ограниченных в $R^1 \times D$, $t \in R^2$, $\mu \in D$.

Рассмотрим в K^n систему дифференциальных уравнений, непрерывно зависящую от параметра

$$z^\circ = A(\mu) z + \sum_{j=2}^{\infty} F^{(j)}(t, \mu, z) \tag{1.1}$$

где $F^{(j)}(t, \mu, z)$ — вектор-форма j-го порядка от z, а ее s-компонента имеет вид

$$F_s^{(j)}(t, \mu, z) = \sum_{|p|=j} f_p^{(s)}(t, \mu) z^p, \qquad f_p^{(s)}(t, \mu) \in C \tag{1.2}$$

Предположим, что $n \times n$ — матрица $A(\mu)$ непрерывным в D линейным преобразованием приводится к жордановой форме. Изложение будем вести лишь для случая, когда $A(\mu) = \operatorname{diag}(\rho_1(\mu), \ldots, \rho_n(\mu))$.

В качестве допустимого класса преобразований будем рассматривать формальные ряды

$$z = x + \sum_{j=2}^{\infty} \Phi^{(j)}(t, \mu, x) \tag{1.3}$$

у которых структура вектор-форм $\Phi^{(j)}$ та же, что и в (1.1). А именно, записывая $\Phi_s^{(j)}$ в виде (1.2), считаем, что $\varphi_p^s(t, \mu) \in C$.

Будем рассматривать простейший вид системы

$$x^{\circ}=A(\mu)x+\sum_{j=2}^{\infty}G^{(j)}(t,\mu,x) \tag{1.4}$$

к которой преобразованием (1.3) приводима система (1.1).

Пусть $g_p^{(s)}(t, \mu)$ — коэффициенты s-го уравнения в (1.4). Считая $\varphi_p^{(s)}(t, \mu)$, $g_p^{(s)}(t, \mu)$ неизвестными, для их определения из условия приводимости (1.1) к (1.4) получим уравнение

$$\dot{\varphi}_p^{(s)}+\langle p-\delta_s,\rho(\mu)\rangle\,\varphi_p^{(s)}=v_p^{(s)}(t,\mu)-g_p^{(s)}(t,\mu) \tag{1.5}$$

где $v_p^{(s)}(t, \mu)$ — известная функция класса C, если все предшествующие коэффициенты $\varphi_q^{(j)}$, $g_q^{(j)}$, $|q|<|p|$ из класса C, δ_s — s-й единичный орт, $\rho(\mu)=(\rho_1(\mu),\ldots,\rho_n(\mu))$, $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение. Таким образом, поставленная задача существенно связана с решением вопроса о возможности такого выбора функций $g_p^{(s)}(t, \mu)\in C$, чтобы уравнение (1.5) имело решение того же класса. Если $g_p^{(s)}$ удастся выбрать постоянными по t, то система (1.4) будет автономной (и линейной, если все $g_p^{(s)}=0$).

Сравнительно легко рассматривается случай, когда в D (при любом s) $\operatorname{Re}\rho_s(\mu)>\alpha>0$ (или $\operatorname{Re}\rho_s(\mu)\leqslant\alpha<0$). В этом случае (1.5) при любых $g_p^{(s)}(t, \mu)\in C$ обладает единственным ограниченным и непрерывным в $R^1\times D$ решением. При $g_p^{(s)}=0$ это решение имеет вид

$$\varphi_p^{(s)}(t,\mu)=\int_0^t\exp\left[\langle p-\delta_s,\rho(\mu)\rangle(\tau-t)\right]v_p^{(s)}(\tau,\mu)\,d\tau \tag{1.6}$$

(Непрерывность по μ следует из равномерной сходимости интеграла.) Таким образом, в этом некритическом случае система (1.1) приводима к линейной системе.

Будем рассматривать задачу о непрерывной нормализации системы (1.1) в более сложной ситуации, когда в D существует по крайней мере одна точка μ_0, в которой хотя бы одно собственное значение матрицы $A(\mu)$ имеет нулевую вещественную часть. В этом случае найдутся такие p, что $\operatorname{Re}\langle p-\delta_s, \rho(\mu)\rangle\to 0$ при $\mu\to\mu_0$, и для них решение (1.6), вообще говоря, перестает существовать в точке μ_0. В связи с этим возникает необходимость такого выбора $g_p^{(s)}(t, \mu)\in C$, чтобы и в описанной ситуации уравнение (1.5) имело решение из C. Простейший выбор $g_p^{(s)}=v_p^{(s)}$ допустим, однако он не дает максимального упрощения системы (1.1) в классе преобразований (1.3).

Изучим более подробно уравнение вида (1.5)

$$\varphi^{\cdot}=a(\mu)\varphi+w(t,\mu)\equiv a(\mu)\varphi+v(t,\mu)-g(t,\mu) \tag{1.7}$$

где функция $a(\mu)=\eta(\mu)+ik(\mu)$ — непрерывна в D.

Разобьем D на подмножества $D_0=\{\mu\mid\eta(\mu)=0\}$, $D_\pm=\{\mu\mid\eta(\mu)\gtrless 0\}$ и введем функции

$$F_\pm(t,\mu)=\int_0^t e^{\mp a(\mu)\tau}w(\tau,\mu)\,d\tau,\qquad \mu\in D_\pm$$

$$F(t,\mu)=\int_0^t e^{-ik(\mu)\tau}w(\tau,\mu)\,d\tau,\qquad \mu\in D$$

Для функции $F_\pm(t, \mu)$ введем среднее значение

$$M_\pm(\mu) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_\pm(t, \mu)\,dt$$

Лемма 1.1. Пусть функция $w(t, \mu) \in C$ такова, что:

1) функция $F(t, \mu)$ ограничена по t в R^1 при всех $\mu \in D$,

2) существует равномерно по μ и l среднее

$$M(\mu) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{l-T}^{l+T} F(t, \mu)\,dt \tag{1.8}$$

Тогда, если $D_+ \cup D_- \neq \varnothing$, то существует единственное решение уравнения (1.7) класса C, определяемое формулой

$$\varphi(t, \mu) = e^{a(\mu)t}\left(\varepsilon(\mu) + \int_0^t e^{-a(\mu)\tau} w(\tau, \mu)\,d\tau\right) \tag{1.9}$$

где $\varepsilon(\mu) = \mp M_\pm(\mu)$, $\mu \in D_\pm$, $\varepsilon(\mu) = -M(\mu)$, $\mu \in D_0$.

Доказательство. Рассмотрим общее решение уравнения (1.7), которое имеет вид (1.9) с произвольной постоянной $\varepsilon(\mu)$.

Из условия 1) леммы следует, что если $\mu \in D_0$, то (1.9) будет решением класса C при любом $\varepsilon(\mu)$. Если же $\mu \in D_\pm$, то при каждом фиксированном μ уравнение (1.7) при любых $\omega(t, \mu)$ будет иметь ограниченное в R^1 решение, которое определяется формулой (1.9) при следующем выборе $\varepsilon(\mu)$:

$$\varepsilon_+(\mu) = -\int_0^{+\infty} e^{-a(\mu)\tau} w(\tau, \mu)\,d\tau, \quad \mu \in D_+ \tag{1.10}$$

$$\varepsilon_-(\mu) = \int_{-\infty}^0 e^{-a(\mu)\tau} w(\tau, \mu)\,d\tau, \quad \mu \in D_-$$

Функции $\varepsilon_\pm(\mu)$ в этих равенствах непрерывны по μ в соответствующих областях. Варьируя значение $\varepsilon(\mu)$ в D_0, можно построить различные ограниченные в R^1 решения уравнения (1.7). Убедимся, что среди них существует единственное решение, непрерывное по $\mu \in D$.

Разрывность решений по μ связана с поведением $\varepsilon_\pm(\mu)$ при приближении μ к участкам границы множеств $D_\pm$, принадлежащих D_0. Обозначим эти участки $\Gamma_\pm$. Если $\mu_0 \in \Gamma_\pm$, то интегралы (1.10) в общем случае не существуют.

Дальнейшее изложение опирается на метод Чезаро суммирования несобственных интегралов [12], в соответствии с которым несобственному интегралу

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

приписывается значение

$$M\{\Phi\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^t \Phi(t)\,dt, \quad \Phi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

Если исходный интеграл сходится, то

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = M\{\Phi\}$$

(регулярность метода Чезаро).

Используя указанный метод, прежде всего убеждаемся, что функция $F_\pm(t,$ в $D_\pm$ имеет непрерывное по μ среднее

$$M_\pm(\mu) = \mp\varepsilon_\pm(\mu) \tag{1.11}$$

что следует из сходимости интегралов (1.10).

Выясним поведение функции $M_+(\mu)$ при приближении μ к Γ_+. Суммируя функцию $e^{-ik(\mu)\tau}w(\tau, \mu)$ при $\tau \in [0; +\infty)$, получим (равномерно по μ в силу условия 2))

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^t F(\tau, \mu)\,d\tau = M(\mu) \tag{1.12}$$

Фиксируя теперь точку $\mu_0 \in \Gamma_+$, имеем

$$\lim_{\mu\to\mu_0} M_+(\mu) = \lim_{\mu\to\mu_0}\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F_+(\tau, \mu)\,d\tau = \tag{1.13}$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\lim_{\mu\to\mu_0} \frac{1}{T}\int_0^T F_+(\tau, \mu)\,d\tau = M(\mu_0)$$

При вычислении предела использовалась непрерывность $F_+(\tau, \mu)$ и равномерность по μ предела (1.12), позволившая изменить порядок предельных переходов.

Рассмотрим далее функцию $\varepsilon(\mu)$ на границе Γ_-. Запишем второе соотношение (1.10) в виде

$$M_-(\mu) = \int_0^{+\infty} e^{a(\mu)\tau}w(-\tau, \mu)\,d\tau$$

Для $\mu^0 \in \Gamma_-$ имеем

$$\lim_{\mu\to\mu_0} M_-(\mu) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\int_0^t e^{ik(\mu_0)\tau}w(-\tau, \mu_0)\,d\tau\right)dt = -M(\mu_0) \tag{1.14}$$

При вычислении предела, кроме перестановки предельных переходов, использовано равенство средних $M\{f(-t)\} = M\{f(t)\}$, вытекающее из (1.8).

Из (1.11) — (1.14) следует, что, полагая $\varepsilon(\mu) = \mp M_\pm(\mu)$, при $\mu \in D_\pm$ и $\varepsilon(\mu) = M(\mu)$ при $\mu \in D_0$, получим единственное решение (1.9) класса C.

Замечание. Проведенное доказательство существенно опирается на метод суммирования Чезаро. Именно поэтому основное требование леммы связано с предположением существования среднего значения. Этому требованию удовлетворяют, в частности, периодические и почти периодические системы, к которым в дальнейшем и будет применена лемма 1.1. Используя другие регулярные методы вычисления значений расходящихся интегралов, можно получить и другие условия существования решений класса у (1.7). Однако на этом здесь не останавливаемся.

Лемма 1.1 позволяет выделить класс неавтономных систем, для которых может быть построена непрерывная нормальная форма. Из изложенного видно, что система (1.4), соответствующая ей, будет содержать только резонансные члены x^p, у которых p удовлетворяет условию

$$(\exists\mu_0 \in D)\ (\operatorname{Re}\langle p - \delta_s, \rho(\mu_0)\rangle = 0)$$

2. Непрерывная нормальная форма почти периодических систем. Рассмотрим систему (1.1) в предположении, что все коэффициенты $f_p^{(s)}(t, \mu)$ — почти периодические функции t равномерно по μ в D, и обозначим множество таких функций через C_0 [13, 14].

Все ограниченные решения уравнения (1.7) с почти периодичной неоднородностью — почти периодические функции, поэтому рассмотренная в п. 1 задача преобразования системы (1.1) к простейшему виду в классе преобразования (1.3) с коэффициентами из C эквивалентна для почти периодических систем такой же задаче, но в классе преобразования (1.1) с почти периодическими коэффициентами.

Лемма 1.1 дает условия существования непрерывного в D решения уравнения (1.7). Остановимся на вопросе о выборе в (1.7) функции $g(t, \mu) \in C_0$, гарантирующем выполнение условий леммы 1.1.

Рассмотрим уравнение (1.7), где $v(t, \mu) \in C_0$. Пусть $S_v = \{\lambda_n\}$ — спектр функции v, а $S_v^k(\mu) = \{\lambda_n - k(\mu)\}$ — смещенный спектр.

Определение 2.1. Показатели Фурье λ_n назовем резонансными, если $(\exists \mu_0 \in D_0)$ $(\lambda_n - k(\mu_0) = 0)$.

В соответствии с определением разобьем S_v на резонансную (R_v) и нерезонансную (H_v) части. Им соответствуют аналогичные подмножества $R_v^k(\mu)$, $H_v^k(\mu)$ в смещенном спектре. Будем говорить, что уравнение (1.7) типа F, если нерезонансная часть смещенного спектра функции $v(t, \mu)$ равномерно по μ отделена от нуля

$$(F)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall \mu \in D_0)\ (\forall \lambda_n \in H_v)\ (|\lambda_N - k(\mu)| \geqslant \alpha)$$

Введем в рассмотрение функцию $v_\alpha(t, \mu)$, которую определим следующим образом. Пусть α — достаточно малое фиксированное число. На комплексной плоскости K^2 рассмотрим α — окрестность нуля $U_\alpha(0)$, смещенный спектр $S_v^k(\mu)$ и множество

$$S_{v,\alpha}^k(\mu) = \bigcup_{\mu \in D_0} (S_v^k(\mu) \cap U_\alpha(0))$$

Этому множеству соответствует аналогичная часть $S_{v,\alpha}$ спектра S_v. В $S_{v,\alpha}$ содержится вся резонансная часть спектра S_v, но может содержаться и часть нерезонансного множества H_v, если H_v имеет в R_v предельную точку. Через $v_\alpha(t, \mu)$ обозначим «α-срезку» функции $v(t, \mu)$ — почти периодическую функцию, спектр которой совпадает с $S_{v,\alpha}$, а коэффициенты Фурье — с соответствующими коэффициентами Фурье функции $v(t, \mu)$. Функция $v(t, \mu) - v_\alpha(t, \mu)$ удовлетворяет условию (F) и принадлежит классу C_0.

Лемма 2.1. Пусть D — ограниченное замкнутое множество в R^d, $D_+ \cup D_- \neq \varnothing$ и пусть функция $v(t, \mu) \in C_0$ удовлетворяет по μ вместе с $a(\mu)$ условию Липшица. Тогда уравнение (1.7) при

$$g(t, \mu) = v_\alpha(t, \mu) \tag{2.1}$$

имеет единственное решение $\varphi(t, \mu) \in C_0$. Если (1.7) — уравнение типа F, то

$$g(t, \mu) = \sum_{\lambda \in R_v} v_\lambda(\mu) e^{i\lambda t} \tag{2.2}$$

где $v_\lambda(\mu)$ — коэффициенты Фурье функции $v(t, \mu)$, а R_v — резонансная часть спектра этой функции.

Решение $\varphi(t, \mu)$ определяется формулой (1.9), имеет спектр H_v, удовлетворяет условию Липшица и имеет среднее значение, равное нулю.

Доказательство (которое подробно не приводится) заключается в проверке выполнения условий леммы 1.1.

При $g = v_\alpha$ (при выполнении условия (F) это равенство сводится к (2.2)) с помощью теоремы Фавара [15] убеждаемся в выполнении условия 1, леммы 1.1 и в] том, что $F(t, \mu) \in C_0$. Последнее обеспечивает существование при любом фиксированном среднего значения (1.8).

Равномерность по μ предела в (1.8) обеспечивается условием Липшица. Затем устанавливается, что при указанных в формуле (1.9) значениях $\varepsilon(\mu)$ спектр решения совпадает с H_v, а среднее значение равно нулю.

Перейдем к вопросу о нормализации равномерно почти периодической системы (1.1), коэффициенты которой $f_p^{(s)}(t, \mu)$ удовлетворяют по μ условию Липшица.

Пусть $S_{p,s}$ — спектр коэффициента $f_p^{(s)}(t, \xi)$. Введем множества: S_j — спектр j-го порядка системы, S_2^k — спектр системы в k-м приближении и спектр системы S_2^∞, т. е.

$$S_j = \bigcup_{s=1}^{n} \bigcup_{|p|=j} S_{p,s}, \qquad S_2^k = \bigcup_{j=2}^{k} s_j$$

Через N_2^k (N_2^∞) обозначим минимальный модуль множества S_2^k (S_2^∞). Элементы $\gamma \in N_2^k$ имеют представление (r_j — целые числа)

$$\gamma = \sum r_j \lambda_j, \qquad \lambda_j \in S_2^k \tag{2.3}$$

В N_2^k выделим подмножество таких элементов γ, для которых в (2.3) $\Sigma\ |r_j| \leqslant k$, $\gamma \in N_2'^k$.

Определение 2.2. Система (1.1) обладает внутренним резонансом в точке $\mu_0 \in D$ порядка k, если существует такой целочисленный вектор $q \in P^n$ с взаимно простыми компонентами q_j и $|q| = |q_1| + \ldots + |q_n| = k$, что

$$i\langle q, \rho(\mu_0)\rangle \in N_2'^k$$

(Для ω — периодических систем $N_2^\infty = \{2k\pi\omega^{-1}\}$, а для автономных — $N_2^\infty = \{0\}$, и при фиксированном μ приходим к обычному определению внутреннего резонанса в таких системах.)

Определение 2.3. Вектор $p \in P_+^n$, $|p| = k$ и соответствующие ему члены s-го уравнения системы (1.1) назовем резонансными в D, если

$$(\exists \mu_0 \in D)\ (i\langle p - \delta_s, \quad \rho(\mu_0)\rangle \in N_2'^k)$$

где δ_s — s-й единичный орт в R^n. Множество всех резонансных векторов s-го уравнения обозначим через $L_D^{(s)}$.

Определение 2.4. Систему (1.1) назовем F-системой, если для любого резонансного вектора p, $|p| = k$, точка $i\langle p - \delta_s, \rho(\mu_0)\rangle$ не является предельной точкой множества $N_2'^k$.

Для нормализации системы (1.1) с использованием преобразования (1.3) следует последовательно решать с помощью леммы 2.1 уравнение (1.5)

$$\dot\varphi_p^{(s)} = -\langle p - \delta_s, \rho(\mu)\rangle \varphi_p^{(s)} + v_p^{(s)}(t, \mu) - g_p^{(s)}(t, \mu)$$

придерживаясь следующей альтернативы:

1) если p — нерезонансный вектор, то полагаем в (1.5) $g_p^{(s)}(t, m) = 0$, а $\varphi_p^{(s)}(t, \mu)$ находим из (1.5) как единственное почти периодическое решение класса C_0;

2) если p — резонансный вектор, то полагаем $g_p^{(s)}(t, \mu) = v_{p,\alpha}^{(s)}(t, \mu)$, при этом $\varphi_p^{(s)}(t, \mu)$ вновь находится как единственное решение класса C_0.

Отметим, что поскольку при решении уравнения (1.5) спектр функции $\varphi_q^{(j)}$ совпадает с нерезонансной частью спектра $v_q^{(j)}(t, \mu)$, то при последовательном решении уравнений (1.5) спектр функции $v_p^{(s)}(t, \mu)$, зависящей от $\varphi_q^{(j)}(t, \mu)$ $|q| < |p|$, будет содержаться в $N_2'^k$, где $k = |p|$. Именно это учтено в определении 2.3.

Если (1.1) — F-система, то каждое уравнение (1.5) удовлетворяет условию (F) и выбор $g_p^{(s)}(t, \mu)$ упрощается

$$g_p^{(s)}(t, \mu) = \sum_{\lambda \in R_{v_p^{(s)}}} v_{p,\lambda}^{(s)}(\mu)\, e^{i\lambda t}$$

Резюмируя изложенное выше, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.1. Пусть система (1.1) равномерно почти периодическая в замкнутой ограниченной области D и пусть $\rho_s(\mu)$, $f_p^{(s)}(t, \mu)$ удовлетворяют по μ условию Липшица.

Тогда существует непрерывное по $\mu \in D$ преобразование (1.3) с равномерно почти периодическими коэффициентами, приводящее систему (1.1) к непрерывной нормальной форме

$$x_s^{\cdot} = \rho_s(\mu) x_s + \sum_{p \in L_D^{(s)}} v_{p,\alpha}^{(s)}(t, \mu) x^p \tag{2.4}$$

Если (1.1) — F-система, то (2.4) имеет вид

$$x_s^{\cdot} = \rho_s(\mu) x_s + \sum_{p \in L_D^{(s)}} \Big(\sum_{\lambda \in R_{v_p^{(s)}}} v_{p,\lambda}^{(s)}(\mu) e^{i\lambda t} \Big) x^p$$

где $R_{v_p^{(s)}}$ — резонансная часть спектра функций $v_p^{(s)}(t, \mu)$.

Из теоремы видно, что непрерывная нормальная форма резонансных систем будет автономной только в том случае, если (1.1) — F-система и $R_{v_p^{(s)}} = \{0\}$. Последнее будет заведомо выполняться, если в (1.1) имеется только тождественный резонанс и, возможно, внутренний резонанс вида

$$\langle m, \rho(\mu_0) \rangle = 0, \quad \mu_0 \in D_0, \quad m \in P^n$$

Пусть F-система в точке μ_0 имеет l пар чисто мнимых собственных чисел, а остальные собственные числа $\rho_j(\mu)$ имеют отрицательные вещественные части. Обозначим через $\sigma_s(\mu) \pm i\nu_s(\mu)$ критические собственные числа, $\sigma_s(\mu_0) = 0$, $\nu_s(\mu_0) \neq 0$, $s = 1, \ldots, l$. Пусть D — окрестность точки μ_0. Будем считать, что в точке μ_0 имеется внутренний резонанс k-го порядка

$$\langle m, \nu(\mu_0) \rangle = \lambda \in N_2'^k, \quad |m| = k \tag{2.5}$$

Считая (2.5) единственным резонансом в D, выпишем непрерывную нормальную форму в описанной ситуации. Вектор x представим в виде тройки векторов $x = (u, \bar{u}, w)$, где u — l-мерный комплексный вектор, соответствующий критическим переменным, w — $n - 2l$-мерный вектор. Исходная действительная система (1.1) в переменных u, $\bar{u}$, w запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
u_s^{\cdot} &= (\sigma_s(\mu) + i\nu_s(\mu)) u_s + u_s \sum_{|p|=1}^{\infty} v_p^{(s)}(\mu) \omega^p + \\
&+ \sum_{(p,q) \in R_s} v_{p,q}^{(s)}(\mu) \exp(-i\chi_{p,q}^{(s)} \lambda t) u^p \bar{u}^q \\
w_j^{\cdot} &= \rho_j(\mu) w_j + w_j \sum_{|p|=1}^{\infty} g_p^{(j)}(\mu) \omega^p + \\
&+ w_j \sum_{(p,q) \in Q} g_{p,q}^{(j)}(\mu) \exp(-i\varkappa_{p,q} \lambda t) u^p \bar{u}^q \\
&p, q \in P_+^n, \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_l), \quad \omega_s = u_s \bar{u}_s
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь R_s — множество резонансных пар (p, q), удовлетворяющих уравнению $p - q - \delta_s = \chi_{p,q}^{(s)} m$, где $\chi_{p,q}^{(s)}$ — произвольное целое число, Q — множество резонансных пар, удовлетворяющих условию $p - q = \varkappa_{p,q} m$ при каком-либо целом $\varkappa_{p,q}$.

Если $\lambda = 0$, то (2.6) — автономная система, совпадающая по структуре с нормальной формой автономных систем. Для таких систем, не зависящих от параметра, развернутая запись имеется в [16].

При $\lambda \neq 0$ система неавтономна. Однако нетрудно получить автономную систему, если ввести замену

$$u_s = r_s \exp[i(\nu_s(\mu_0) t + \varphi_s)]$$

с новыми действительными переменными r_s, φ_s.

После преобразований имеем

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad & r_s^{\cdot}=\sigma_s(\mu)r_s+r_s\sum_{|p|=1}^{\infty}\alpha_p^{(s)}(\mu)r^{2p}+\\
&+\sum_{R_s}\alpha_{p,q}^{(s)}(\mu)\sin(\chi_{p,q}^{(s)}\psi-\theta_{p,q}^{(s)})r^{p+q}\\
&\varphi_s^{\cdot}=\Delta_s(\mu)+\sum_{|p|=1}^{\infty}\beta_p^{(s)}(\mu)r^{2p}+\sum_{R_s}\alpha_{p,q}^{(s)}\cos(\chi_{p,q}^{(s)}\psi-\theta_{p,q}^{(s)})r^{p+q}\\
&w_j^{\cdot}=\rho_j(\mu)w_j+w_j\sum_{|p|=1}^{\infty}g_p^{(j)}(\mu)r^{2p}+w_j\sum_{Q}g_{p,q}^{(j)}(\mu)r^{p+q}\\
&\alpha_p^{(s)}+i\beta_p^{(s)}=v_p^{(s)},\qquad \alpha_{p,q}^{(s)}=|v_{p,q}^{(s)}|,\qquad \Delta_s(\mu)=\nu_s(\mu)-\nu_s(\mu_0)\\
&\psi=\langle m,\varphi\rangle,\qquad \varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_l),\qquad \sin\theta_{p,q}^{(s)}=\\
&=-|v_{p,q}^{(s)}|^{-1}\operatorname{Re}v_{p,q}^{(s)},\qquad \cos\theta_{p,q}^{(s)}=|v_{p,q}^{(s)}|^{-1}\operatorname{Im}v_{p,q}^{(s)}
\end{aligned}
$$

Учитывая, что в первую группу уравнений переменные φ_s входят только в комбинации $\psi=\langle m,\varphi\rangle$, то, вводя вместо одного из уравнений для φ_s уравнение для ψ, от системы (2.7) можно отделить $l+1$-мерную подсистему, в которую входят уравнения для r_s ($s=1,\ldots,l$) и ψ.

Система (2.7) может быть использована для изучения ряда задач бифуркационного типа. Например, может быть изучена смена устойчивости нейтральных систем при прохождении через резонанс. В автономном случае подобное исследование проведено в [1, 2].

Ниже остановимся на другой бифуркационной задаче.

3. Рождение стационарных режимов в окрестности резонанса третьего порядка. Будем считать, что четырехмерная система (1.1) в области D имеет две пары собственных значений $\sigma_s(\mu)\pm i\nu_s(\mu)$ таких, что $\sigma_s(\mu_0)=0$, $\mu_0\in D$ и реализуется резонанс

$$(3.1)\qquad \nu_1(\mu_0)-2\nu_2(\mu_0)=\lambda\in N_2'^3$$

Считаем, что D — окрестность точки μ_0. Через D^* обозначим окрестность, проколотую в точке μ_0, и пусть $\sigma_s(\mu_0)\neq 0$, $\forall\mu\in D$.

В комплексно-сопряженных переменных система (1.1) имеет вид

$$(3.2)\qquad z_s^{\cdot}=(\sigma_s(\mu)+i\nu_s(\mu))z_s+Z_s^{(2)}(\mu,z,\bar z,t)+\ldots$$

Резонансные члены в (3.2) следующие: $f_{0200}^{(1)}z_2^2$ — в первом уравнении, $f_{1001}^{(2)}z_1\bar z_2$ — во втором.

Непрерывная нормализация до третьего порядка приводит (3.2) (при условии, что (1.1) — F-система) к виду

$$
\begin{aligned}
(3.3)\qquad & u_1^{\cdot}=(\sigma_1(\mu)+i\nu_1(\mu))u_1+a_1(\mu)e^{i\lambda t}u_2^2+O(\|u\|^3)\\
&u_2^{\cdot}=(\sigma_2(\mu)+i\nu_2(\mu))u_2+a_2(\mu)e^{-i\lambda t}u_1\bar u_2+O(\|u\|^3)\\
&a_1(\mu)=M\{f_{0200}^{(1)}e^{-i\lambda t}\},\qquad a_2(\mu)=M\{f_{1001}^{(2)}e^{i\lambda t}\}
\end{aligned}
$$

Введем переменные r_s, φ_s и малый параметр ε, полагая

$$u_s=\varepsilon r_s\exp[i(\nu_s(\mu_0)t+\varphi_s)]$$

Выделяя в новой системе типа (2.7) трехмерную подсистему для r_1, r_2, $\psi=\varphi_1-2\varphi_2$, после масштабного преобразования $\rho_1=\alpha_2 r_1$, $\rho_2=\sqrt{\alpha_1\alpha_2}r_2$, где $\alpha_s(\mu)=|a_s(\mu)|$, получим

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad & \rho_1^{\cdot}=\sigma_1(\mu)\rho_1+\varepsilon s_1(\psi)p_2^2+O(\varepsilon^2)\\
&\rho_2^{\cdot}=\sigma_2(\mu)\rho_2+\varepsilon s_2(\psi)\rho_1\rho_2+O(\varepsilon^2)\\
&\psi^{\cdot}=\delta(\mu)+\varepsilon(c_1(\psi)\rho_1^{-1}\rho_2^2+2c_2(\psi)\rho_1)+O(\varepsilon^2)\\
&(\delta(\mu)=\nu_1(\mu)-2\nu_2(\mu)-\lambda,\ s_i(\psi)=\sin(\psi-\theta_i),\\
&c_i(\psi)=\cos(\psi-\theta_i),\ \sin\theta_i=-\alpha_i^{-1}\operatorname{Re}a_i,\\
&\cos\theta_i=(-1)^{i-1}\alpha_i^{-1}\operatorname{Im}a_i,\ i=1,2)
\end{aligned}
$$

В резонансной точке $\mu = \mu_0$, где $\sigma(\mu_0) = \delta(\mu_0) = 0$, исследование устойчивости вполне аналогично исследованию автономных систем [16]. Система (3.4) неустойчива при $\mu = \mu_0$, если $\theta_1(\mu_0) \neq \theta_2(\mu_0) + \pi$. Причем в первом приближении по ε обладает частным решением в виде «неустойчивого луча»

$$\psi = \psi_0,\ \rho_1 = s_{20}^{-1} z(t),\ \rho_2 = (s_{10}s_{20})^{-1/2} z(t),\ s_{i0} = s_i(\psi_0)$$

где ψ_0 — корень уравнения

$$\operatorname{ctg}(\psi - \theta_1(\mu_0)) + 2\operatorname{ctg}(\psi - \theta_2(\mu_0)) = 0 \tag{3.5}$$

из интервала $(\theta_2(\mu_0), \theta_1(\mu_0) + \pi)$ (считаем, что $\theta_1(\mu_0) < \theta_2(\mu_0)$), а $z(t)$ удовлетворяет уравнению $z^{\cdot} = \varepsilon z^2$.

Рассмотрим систему (3.4) в области D^*. Будем искать стационарные режимы системы (3.4), рождающиеся при переходе μ в область D^*. Отбрасывая в (3.4) нелинейность $O(\varepsilon^2)$, рассмотрим амплитудные уравнения (приравненные нулю правые части (3.4)). Будем считать, что $\sigma_s(\mu)$, $\delta(\mu)$ имеют порядок малости ε. Это предположение естественным образом вытекает из непрерывности $\sigma_s(\mu)$, $\delta(\mu)$ и малости области D.

Разыскивая положительные решения системы амплитудных уравнений, прежде всего найдем ρ_1 и ρ_2 из первых двух уравнений, затем из третьего уравнения получим

$$\sigma_1(\mu)\operatorname{ctg}(\psi - \theta_1(\mu)) + 2\sigma_2(\mu)\operatorname{ctg}(\psi - \theta_2(\mu)) = \delta(\mu) \tag{3.6}$$

Пусть σ_1 и σ_2 одного знака. Тогда уравнение (3.6) в интервале $(\theta_2, \theta_1 + \pi)$ (по-прежнему считаем, что $\theta_1(\mu) < \theta_2(\mu)$) имеет корень $\psi = \psi_1^*(\mu)$ такой, что $s_i(\psi_1^*) > 0$ и корень $\psi = \psi_2^* = \psi_1^* + \pi$, но $s_i(\psi_2^*) < 0$.

Представим область D^* в виде $D^* = D_{++}^* \cup D_{+-}^* \cup D_{-+}^* \cup D_{--}^*$, где первый знак соответствует знаку σ_1, а второй — σ_2.

Из изложенного следует, что в области D_{--}^* рождается стационарный режим

$$\psi = \psi_1^*,\ \rho_1 = \rho_1(\psi_1^*),\ \rho_2 = \rho_2(\psi_1^*) \tag{3.7}$$

В области D_{++}^* имеется режим

$$\psi = \psi_2^*,\ \rho_1 = \rho_1(\psi_2^*),\ \rho_2 = \rho_2(\psi_2^*) \tag{3.8}$$

Видно, что при фиксированном ε и при $\mu \to \mu_0$ имеем $\rho_i(\psi_1^*)$, $\rho_i(\psi_2^*) \to 0$. При $\sigma_1 \sim \sigma_2$, $\delta = o(\sigma_s)$ корни ψ_1^*, ψ_2^* стремятся к соответствующему корню уравнения (3.5): $\psi_1^* \to \psi_0$, $\psi_2^* \to \psi_0 + \pi$. Иначе говоря, в этой ситуации рождение стационарного режима (3.7) происходит вблизи неустойчивого луча, имеющегося в системе при $\mu = \mu_0$.

Анализ уравнения (3.6) в областях D_{+-}^* и D_{-+}^* показывает, что оно не всегда имеет решение. Существование решения зависит от соотношений между σ_1, σ_2, δ. Более подробно этот случай здесь не рассматривается.

Пусть ρ_1^*, ρ_2^*, ψ^* некоторый стационарный резонансный режим (в частности, (3.7) или (3.8)), т. е. ψ^* — некоторый корень уравнения (3.6), для которого ρ_1^*, ρ_2^*, получаемые из амплитудных уравнений, положительны. Рассмотрим вопрос об устойчивости этого режима.

Составив систему уравнений в вариациях, рассмотрим ее характеристическое уравнение

$$\gamma^3 - 2(\sigma_1 + \sigma_2)\gamma^2 + [\sigma_1^2 + \sigma_1^2 \operatorname{ctg}^2(\psi^* - \theta_1) -$$
$$- 4\sigma_1\sigma_2 \operatorname{ctg}(\psi^* - \theta_1)\operatorname{ctg}(\psi^* - \theta_2)]\gamma - H = 0$$
$$H = -2\sigma_1\sigma_2(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_1 \operatorname{ctg}^2(\psi^* - \theta_1) + 2\sigma_2 \operatorname{ctg}^2(\psi^* - \theta_2))$$

Применение необходимых условий устойчивости (теоремы Стодолы) показывает, что режимы (3.7) и (3.8), для которых $\sigma_1\sigma_2 > 0$, неустойчивы.

Для обнаружения в системе резонансных режимов вида $\psi = \psi^*$, $\rho_1 = \rho_1^*$, $\rho_2 = 0$ следует рассмотреть такие значения μ, при которых $\sigma_s(\mu)$, $\delta(\mu) = O(\varepsilon^2)$, и провести еще один шаг нормализации. Последнее связано с тем, что при рассмотрении амплитудных уравнений с точностью до ε из $\rho_2 = 0$ следует $\rho_1 = 0$.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольцер Я. М.* О сильной устойчивости резонансных систем при параметрических возмущениях.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 251—261.
2. *Гольцер Я. М.* Бифуркации и устойчивость нейтральных систем в окрестности резонанса третьего порядка.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 429—440.

3. *Каменков Г. В.* Избранные труды. М.: Наука, т. I, 1971, 258 с.; т. II, 1972. 214 с.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений.— Тр. Моск. математич. об-ва, ч. I, 1971, т. 25, с. 119—262; ч. II, 1972, т. 26, с. 199—239.
6. *Куницын А. Л.* Об устойчивости периодических движений при резонансе.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 36—44.
7. *Куницын А. Л.* Нормальная форма и устойчивость периодических систем при резонансе.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 431—438.
8. *Насыров Р. М.* Об устойчивости почти периодических движений в некоторых критических случаях.— Тр. Ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1964, т. 5, с. 30—44.
9. *Веретенников В. Г.* К устойчивости почти периодических движений.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 1, с. 114—117.
10. *Костин В. В.* Нормальная форма неавтономных систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1973, № 8, с. 693—696.
11. *Брюно А. Д.* Нормальная форма дифференциальных уравнений с малым параметром.— Мат. заметки, 1974, т. 16, вып. 3, с. 407—414.
12. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
13. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
14. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
15. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
16. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 6, с. 974—984.

Алма-Ата

Поступила в реакцию
20.IV.1982