Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 531.36

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С МАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Хрисанов С. М.

Получены условия представления в виде матричной экспоненты моментов решений линейных однородных систем с марковскими коэффициентами. Такое представление является аналогом представления Флоке — Ляпунова для фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы с периодическими] коэффициентами, из него следует возможность нахождения строгих показателей Ляпунова рассматриваемой системы.

1. Пусть η_t — векторный случайный процесс, определенный на интервале времени $[t_0, \infty)$, для которого при каждом t из данного интервала существуют вектор первых моментов $m(t)$, матрица вторых множеств $M(t), \ldots$. Числа или символы, определяемые формулами

$$\mathrm{X}^{(1)}\eta_t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \| m(t) \|, \quad \mathrm{X}^{(2)}\eta_t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \| M(t) \|, \ldots$$

будем называть показателями Ляпунова в смысле моментов соответствующего порядка. Для неслучайных функций эти определения естественно переходят в известные [1].

Пусть ξ_t — однородный марковский процесс на измеримом фазовом пространстве $U = \{u\}$ с переходной функцией $P(t, u, \Gamma)$. Пусть L и L^* — инфинитезимальные операторы, соответствующие полугруппам операторов

$$T_t\varphi(u) = \int\limits_U \varphi(y) P(t, u, dy), \quad T_t^*Q(\Gamma) = \int\limits_U P(t, u, \Gamma) Q(du)$$

которые действуют в банаховых пространствах измеримых ограниченных функций $\{\varphi(u)\}$ и конечных обобщенных мер $\{Q(\Gamma)\} = H$ на U. Плотность распределения вероятностей $p(t, u)$ процесса ξ_t может быть получена как решение уравнения $\partial p/\partial t = L^*p$, $p = p(t, u)$, $p(0, u) = p_0(u)$

Предположим, что процесс ξ_t эргодичен, $q(u)$ — соответствующее единственное стационарное распределение вероятностей с оценкой скорости сходимости

$$q(u) = \lim_{t\to\infty} p(t, u), \quad |p(t, u) - q(u)| < R \exp(-\lambda t) \tag{1.1}$$

с некоторыми постоянными R и $\lambda > 0$.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$X^{\boldsymbol{\cdot}} = (A + \mu B(\xi_t)) X \tag{1.2}$$

в которой X — n-мерный вектор, $A = (a_{ij})$. $B = (b_{ij}(u))$ — матрицы порядка n, первая — постоянная, вторая — измеримая функция на множестве U.

Теорема. Пусть матрица $B(u)$ ограничена на U, а собственные значения $\{\alpha_j, j = 1, \ldots, n\}$ матрицы A допускают для любых $i, j = 1, \ldots, n$ оценки

$$\operatorname{Re}(\alpha_i - \alpha_j) < c = \text{const} < \lambda \tag{1.3}$$

Тогда при перечисленных выше условиях вектор математических ожиданий $m(t) = EX(t)$ решения системы (1.2) при достаточно малых μ допускает представление

$$m(t) = \exp(Kt)(C + o)\, m(0), \quad \mathrm{Det}\, C \neq 0 \tag{1.4}$$

где K и C — постоянные матрицы порядка n, o — бесконечно малая матрица при $t \to \infty$.

Доказательство. Выпишем уравнения для вектора первых частных моментов $m(t, u) = E(X(t), \xi_t = u)$ в виде [2]

$$\frac{\partial m(t, u)}{\partial t} = (A + \mu B(u))\, m(t, u) + L^* m(t, u) \tag{1.5}$$

Решения этой системы связаны с вектором первых моментов по формуле

$$m(t) = \int_U m(t, u)\, du \tag{1.6}$$

Пусть $H^n = \{(g_k(u))\}$ — линейное пространство векторов, каждая из координат которого — элемент пространства H (обобщенных плотностей). Примерами линейных операторов, действующих в H^n, являются следующие:

$$Ag = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} g_j\Big), \quad B(u)\, g = \Big(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} g_j\Big), \quad L^* g = (L^* g_k)$$

Видно, что операторы A и L^* коммутируют на H^n.

Обозначим H_q — одномерное собственное подпространство в пространстве H, задаваемое функцией $q(u)$: $H_q = \{\gamma q(u)\}$. Очевидно, $L^* H_q = 0$. Пусть H' — образ (или его замыкание) оператора L^* в H. Представим пространство H в виде прямой суммы $H = H_q + H'$. Аналогично представим $H^n = V_q + V'$, где

$$V_q = \{g(u)\} = \left\{\begin{Vmatrix} c_1 q(u) \\ \vdots \\ c_n q(u) \end{Vmatrix}\right\} = \left\{\begin{Vmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{Vmatrix} q(u)\right\} = \{C_0 q(u)\}$$

$$V' = \{g(u)\} = \left\{\begin{Vmatrix} g_1(u) \\ \vdots \\ g_n(u) \end{Vmatrix}\right\}, \quad g_k(u) \in H', \quad g(u) \in V_q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ag \in V_q, \quad g(u) \in V' \Rightarrow Ag \in V', \quad L^* g \in V'$$

Решение $m(t, u)$ системы (1.5) представимо, таким образом, в виде

$$m(t, u) = m_0(t)\, q(u) + m'(t, u), \quad m(t, u) = \begin{Vmatrix} m_0(t) \\ m'(t, u) \end{Vmatrix}$$

$$m_0(t) q(u) \in V_q, \quad m'(t, u) \in V'$$

Пусть S_{01} и S_{10} — два линейных оператора, действующих соответственно из подпространства V' в подпространство V_q и наоборот: $S_{01} V' \subseteq V_q$, $S_{10} V_q \subseteq V'$. Рассмотрим вектор

$$l(t, u) = \begin{Vmatrix} l_0(t) \\ l'(t, u) \end{Vmatrix}, \quad l_0(t)\, q(u) \in V_q, \quad l'(t, u) \in V'$$

связанный с вектором $m(t, u)$ по формулам

$$\begin{Vmatrix} m_0(t) \\ m'(t, u) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_0 & S_{01} \\ S_{10} & E' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} l_0(t) \\ l'(t, u) \end{Vmatrix} = Sl(t, u)$$

где E_0 и E' — тождественные операторы соответственно в подпространствах V_q и V'. Оператор $B(u)\, m(t, u)$ в подобном же блочно-матричном виде запишется как

$$B(u)\, m(t, u) = \begin{Vmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} \\ \Phi_{10} & \Phi' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} m_0(t) \\ m'(t, u) \end{Vmatrix}$$

где Φ_{ij}, Φ' — линейные операторы, действующие внутри подпространств V_q и V' соответственно Φ_{00}, Φ', из подпространства V' в подпространство V_q, Φ_{01}, и наоборот, Φ_{10}.

Подставляя приведенные разложения в уравнение (1.5), получаем для $l(t, u)$ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Vmatrix} l_0(t) \\ l'(t, u) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{00} & Z_{01} \\ Z_{10} & Z' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} l_0(t) \\ l'(t, u) \end{Vmatrix}$$

где Z_{ij}, Z' — линейные операторы, действующие внутри подпространств V_q, V' и между ними и имеющие вид

$$\begin{aligned}
&Z_{00} = \Delta_0^{-1}\, (W_{00} + \mu\Phi_{01}S_{10}), \quad Z_{01} = \Delta_0^{-1}\, (W_{00}S_{01} + \mu\Phi_{01}) \\
&Z_{10} = \Delta_1^{-1}\, (W'S_{10} + \mu\Phi_{10} - S_{10}A - \mu S_{10}\Phi_{00}) \\
&Z' = \Delta_1^{-1}\, (W' + \mu\Phi_{10}S_{01} - S_{10}\, (A + \mu\Phi_{00})\, S_{01}) \\
&\Delta_0 = E_0 - S_{01}S_{10}, \ \Delta_1 = E' - S_{10}S_{01} \\
&W_{00} = A + \mu\Phi_{00} - \mu S_{01}\Phi_{10} + S_{01}\, (A + L^*) + \mu S_{01}\Phi' \\
&W' = A + L^* + \mu\Phi' - \mu S_{10}\Phi_{01}
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы $Z_{01} = 0$, $Z_{10} = 0$. Для конкретности исследуем первое из этих двух равенств. Имеем уравнение

(1.7) $\qquad AS_{01} - S_{01}\, (A + L^*) = \mu\Psi\, (S_{01})$

Решение неоднородного уравнения (1.7) представимо в виде

(1.8) $\qquad S_{01} = \mu \int\limits_0^\infty \exp(-At)\, \Psi \exp(At)\, P_t'\, dt$

где P_t' — полугруппа ограниченных операторов на V', определяемая уравнением $\partial\varphi'/\partial t = L^*\varphi'$. Но на V' полугруппа P_t' допускает оценку $\| P_t' \| \leqslant R \exp(-\lambda t)$. Из условия разделимости спектра (1.3) вытекает абсолютная сходимость интеграла (1.8) при любом значении Ψ. Более того, справедлива оценка $\| S_{01} \| \leqslant \mathrm{const}\, \| \mu\, \Psi \|$. Уравнение (1.7) решается методом последовательных приближений по формулам

$$S_{01}^0 = 0, \ AS_{01}^k - S_{01}^k\, (A + L^*) = \mu\Psi\, (S_{01}^{k-1})$$

Если $\| S_{01}^k \| \leqslant \varkappa = \mathrm{const}$ для всех k, то

$$\| S_{01}^k - S_{01}^{k-1} \| \leqslant \mu\varkappa_1 \| S_{01}^{k-1} - S_{01}^{k-2} \|$$

с некоторой постоянной $\varkappa_1$. Это означает сходимость последовательных приближений при достаточно малых μ. Таким образом

$$S_{01} = \lim_{k\to\infty} S_{01}^k, \quad S_{10} = \lim_{k\to\infty} S_{10}^k$$

Причем справедливы оценки

$$\| S_{01} \| \leqslant |\mu|\, c_1, \quad \| S_{10} \| \leqslant |\mu|\, c_1$$

с некоторой постоянной c_1. Учитывая, что

$$S_{01}\, (A + L^*) + \mu\, S_{01}\Phi' = AS_{01} + \mu\Phi_{00}S_{01} + \mu\Phi_{01} - \\ - \mu S_{01}\Phi_{10}S_{01}$$

и подставляя это выражение в выражение для Z_{00}, имеем

$$Z_{00} = \Delta_0^{-1} (A + \mu\Phi_{00} - \mu S_{01}\Phi_{10}) \Delta_0$$

Без ограничения общности можно считать, что все собственные значения $\{\alpha_k\}$ матрицы A лежат в полосе $\delta < \operatorname{Re} \alpha_k < \delta + c$, $\delta > 0$. Добиться этого можно подбором соответствующей постоянной α и заменой $X = Y \exp(\alpha t)$ в уравнении (1.2). Оператор $\exp(At) P_t'$ допускает на V' оценку $\| \exp(At) P_t' \| \leqslant \mathrm{const} \exp(-\delta t)$. Для достаточно малых μ найдутся такие постоянные $\delta(\mu) > 0$, $c(\mu) > 0$, что спектр $\{\alpha_k(\mu), k = 1, \ldots, n\}$ матрицы Z_{00} лежит в полосе $\delta(\mu) < \operatorname{Re} \alpha_k(\mu) < \delta(\mu) + c(\mu)$, а для решения уравнения $\partial l'/\partial t = Z' l'$ допускается оценка $\| l'(t, \mu) \| \leqslant \mathrm{const} \exp(-\delta(\mu) t)$.

Делаем обратную замену. Поскольку

(1.9) $$\int_U m'(t, u)\, du = 0, \quad \int_U q(u)\, du = 1$$

то для $m_0(t) = m(t)$ имеем

$$m_0(t) q = \exp(Kt)\, l_0(0)\, q + r(t)\, q, \quad K = Z_{00}, \quad r(t)\, q(u) = S_{01}\, l'(t, u)$$

где $r(t)$ — некоторый n-мерный вектор, допускающий оценку

$$\| r(t) \| \leqslant \mathrm{const} \exp(-\delta(\mu) t)$$

и который, очевидно, всегда можно представить в виде $r(t) = R(t)\, l_0(0)$ с некоторой переменной матрицей $R(t)$. Имеем явные выражения

$$l_0(0)\, q(u) = \Delta_0^{-1} (m_0(0) q - S_{01} m'(0, u))$$
$$l'(0, u) = \Delta_1^{-1} (-S_{10} m_0(0) q + m'(0, u))$$

откуда следует, что вектор $m_0(0)$ можно представить как

$$l_0(0) = (E_0 + \mu C_1(\mu))\, m_0(0) = C m_0(0)$$

с некоторой матрицей $C_1(\mu)$, аналитически зависящей от μ. Тогда

(1.10) $$m_0(t) q = \exp(Kt)\, (C + o)\, m_0(0)\, q, \quad \operatorname{Det} C \neq 0$$

Интегрируя равенство (1.10) по u с учетом (1.9), получаем утверждение теоремы.

Замечание. Матрица K аналитически зависит от параметра μ в некоторой окрестности нуля.

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $X^{\cdot} = KX$ с матрицей K или любой ей подобной называется предельной для системы (1.2) в смысле первых моментов. Непосредственно из доказательства теоремы следует удобное представление матрицы K в виде

$$K = A + \mu\Phi_{00} - \mu S_{01}\Phi_{10}$$

Собственные числа матрицы K, вообще говоря, комплексны, их действительные части — показатели Ляпунова первых моментов решений системы (1.2). В частности, если $m(0) \neq 0$, то число строгих показателей Ляпунова не превосходит размерности системы (1.2).

Аналогичным образом может быть доказано следующее утверждение.

Следствие. Пусть собственные значения $\{\alpha_j\}$ матрицы A допускают оценки

$$\operatorname{Re}(\alpha_i - \alpha_j) < c/2, \quad c = \mathrm{const} < \lambda$$

Тогда матрица $M(t) = EXX^*$ вторых моментов решений системы (1.2) при достаточно малых μ допускает представление

$$M(t) = \exp(K_0 t)(C_2 + o) M(0)$$

где K_2 и C_2 — постоянные линейные операторы в пространстве квадратных симметричных матриц порядка n, o — бесконечно малый оператор при $t \to \infty$.

Замечание. Используя технику действия с многомерными матрицами [2], можно сформулировать и доказать соответствующие утверждения для моментов высшего порядка.

3. Покажем существенность малости параметра μ для доказательства представимости (1.4). Рассмотрим уравнение

$$\chi^{\cdot\cdot} - (1 + \mu\xi_t) x = 0 \tag{2.1}$$

со случайным коэффициентом ξ_t, являющимся однородным марковским процессом с двумя состояниями $\{\pm 1\}$ с инфинитезимальной матрицей

$$Q = \begin{Vmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{Vmatrix}$$

Система моментных уравнений (1.5) будет системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами четвертого порядка и имеет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} m_1(t, -1) \\ m_2(t, -1) \\ m_1(t, 1) \\ m_2(t, 1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\alpha & 1-\mu & \alpha & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha & 1+\mu \\ 0 & \alpha & 1 & -\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} m_1(t, -1) \\ m_2(t, -1) \\ m_1(t, 1) \\ m_2(t, 1) \end{Vmatrix}$$

Ее характеристический многочлен имеет четыре корня

$$z_{1,2} = -\alpha + (\alpha^2 + 1 \pm \Delta)^{1/2}, \quad z_{3,4} = -\alpha - (\alpha^2 + 1 \pm \Delta)^{1/2}, \quad \Delta = (4\alpha^2 + \mu^2)^{1/2}$$

Корни z_1 и z_4 всегда действительны. Корни $z_{2,3}$ могут быть как действительными, так и комплексными, причем всегда $z_1 > \operatorname{Re} z_{2,3}$, $\operatorname{Re} z_{2,3} > z_4$. Корни $z_{2,3}$ будут с ненулевой мнимой частью при условии $\mu^2 > (\lambda^2 - 1)^2$.

Пусть $C_k = (c_i^k)$, $(i, k = 1, \ldots, 4)$ — собственные векторы матрицы системы, соответствующие простым собственным значениям z_k. Общее решение системы запишется в виде

$$(m_i(t, j)) = \sum_{k=1}^{4} C_k \exp(z_k t), \quad j = \pm 1$$

Рассмотрим вектор второго порядка

$$m(t) = \begin{Vmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_1(t, -1) + m_1(t, 1) \\ m_2(t, -1) + m_2(t, 1) \end{Vmatrix}$$

В пространстве E^4 рассмотрим подпространство E' размерности 2, определяемое условиями

$$E' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^* : x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}$$

Если $X \in E'$, то X не может быть собственным вектором матрицы системы. Действительно, иначе это было бы равносильно одновременному выполнению двух матричных равенств

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \mp \mu \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} - (2\alpha + z) \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = 0$$

что невозможно при $\mu = 0$. Это означает, что векторы C_k не могут лежать в подпространстве E'. Действительный вектор $m(t)$ представим в виде

$$m(t) = a_1 A_1 \exp(\gamma_1 t) + (a_2 A_2 \cos \beta_2 t + a_3 A_3 \sin \beta_2 t) \exp(\gamma_2 t) + a_4 A_4 \exp(\gamma_4 t) \tag{2.2}$$

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_4, \quad \beta_2 \neq 0, \quad \gamma_j = \operatorname{Re} z_j, \quad \beta_2 = \operatorname{Im} z_2$$

где A_1, A_4 — некоторые ненулевые векторы, хотя бы один из векторов A_2 или A_3 — ненулевой, a_k — произвольные постоянные.

Пусть вектор $m(t)$ представим виде

$$m(t) = \text{epx}(Kt)(C + o)\, m(0) = D_1 \exp \gamma_1 t + D_2 \exp(\gamma t) + + o(\exp(\gamma t)) \tag{2.3}$$

где K — постоянная матрица второго порядка. Действительное число γ_1 должно быть собственным значением матрицы K. Второе собственное значение γ должно быть действительное. Противоречивость в представлениях (2.2) и (2.3) в общем случае указывает на невозможность представления (2.3).

3. Покажем существенность условия (1.3) для представимости (1.4). Положим $\alpha = 1$. Видно, что коэффициент скорости сходимости λ к стационарному распределению (1.1) равен двум. Оценка же собственных значений (1.3) также равна двум. При всяком $\mu > 0$ корни $z_{2,3}$ будут с ненулевыми мнимыми частями. Используя рассуждения в п. 2, заключаем о невозможности представления (2.3).

Автор благодарит Р. З. Хасьминского за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 528 с.
2. *Хрисанов С. М.* О нелинейных уравнениях Фриша.— Укр. матем. ж., 1980, т. 32, № 1, с. 80—89.

Киев

Поступила в редакцию 19.IV.1982