Подставляя последние соотношения в исходное уравнение, точно таким же приемом, как при вычислении корней первой серии, получаем

$$\nu_k = ma\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_k^2 + \frac{4m^3\sqrt{1-m^2}}{3\rho_k(2m^2-1)^2\lambda^2}\varepsilon_k^3 - \frac{1}{120}\varepsilon_k^4 + \ldots\right) \tag{12}$$

Полученные выражения (11) и (12) позволяют определить вклад, вносимый в дифракционное поле скользящими вдоль поверхности отражателя волнами поперечного и продольного типа соответственно [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nagase M.* Asymptotic expansions of Bessel functions in the transitional resions.— J. Phys. Soc. Japan, 1954, v. 9, No. 2, p. 296—297.
2. *Nagase M.* On the zeros of certain transcendental functions related to Hankel functions. Pt. I, II.— J. Phys. Soc. Japan, 1954, v. 9, No. 5, p. 826—854.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.
4. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
5. *Яворская И. М.* Дифракция плоских стационарных упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 493—508.

Москва

Поступила в редакцию 4.I.1982

УДК 539.3

К ТЕОРИИ ПЛАСТИН БЕРГЕРА

Андрианов И. В.

Показано, что уравнения Бергера могут быть получены на основе последовательной асимптотической процедуры.

М. Бергером [1] были предложены простые приближенные нелинейные уравнения прямоугольных и круглых пластин. В дальнейшем результаты работы [1] были обобщены на ортотропные пластины [2], мембраны [3, 4], пологие сферические [4—8] и цилиндрические [8—10] оболочки. Использовались уравнения такого типа и для решения динамических задач [11—13]. Обоснованность уравнений Бергера и область их применимости неоднократно обсуждались в литературе [2, 4, 5, 7—10, 14—18]. Бергер [1] просто отбрасывал в выражении потенциальной энергии второй инвариант тензора деформаций на том основании, что численные расчеты показывают малое влияние его на изгибное напряженное состояние. Другие авторы проделывали ту же операцию, мало заботясь об обоснованности подобных упрощений, что иногда приводило к неверным результатам. Так, ошибочность полученных в [12] упрощенных динамических уравнений для пологих сферических оболочек показана в [13]. Поэтому важно прийти к уравнениям типа Бергера без использования гипотезы о малости второго инварианта тензора деформаций.

1. Выпишем нелинейные уравнения движения прямоугольной пластины

$$\begin{gathered}
I'_{1,x} + (1-\nu)\{0{,}5\,\varepsilon'_{12,y} - \varepsilon'_{2,x}\} - \rho(1-\nu^2)\varepsilon^{-1}u^{\cdot\cdot\prime} = 0 \\
I'_{1,y} + (1-\nu)\{0{,}5\,\varepsilon'_{12,x} - \varepsilon'_{1,y}\} - \rho(1-\nu^2)\varepsilon^{-1}v^{\cdot\cdot\prime} = 0 \\
D(1-\nu^2)\nabla^4 w' - Eh\,[(I_1' w'{}_{,x})_{,x} + (I_1' w_{,x})_{,x} + \\
+ (1-\nu)\{(\varepsilon_2' w_{,x}')_{,x} + (\varepsilon_1' w_{,y}')_{,y} - 0{,}5\,(\varepsilon_{12}' w_{,y}')_{,x} - \\
- 0{,}5\,(\varepsilon_{12}' w_{,x}')_{,y}\}] + \rho(1-\nu^2)\,hw^{\cdot\cdot\prime} = 0 \\
I_1' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2',\ \varepsilon_1' = u_{,x}' + 0{,}5\,(w_{,x}')^2,\ \varepsilon_2' = v_{,y}' + 0{,}5\,(w_{,y}')^2, \\
\varepsilon_{12} = u'_{,y} + v'_{,x} + w'_{,x}w'_{,y} \\
D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad \nabla^4 = \nabla^2\nabla^2,\quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь I_1' — первый инвариант тензора деформаций, E, ρ — модуль Юнга и плотность материала пластины, ν — коэффициент Пуассона, x, y — ортогональные декартовы координаты, u', v' — перемещения в направлении осей x, y, w' — нормальный прогиб; точка означает дифференцирование по времени t, индексы x, y — дифференцирование по соответствующей переменной.

Уравнения (1.1) должны быть дополнены соответствующими граничными условиями. Пусть, например,

$$\text{(1.2)} \qquad \mathbf{U} = (u', v', w') = 0, \; w,_x' = 0 \text{ при } x = 0, a; \qquad \mathbf{U} = 0, \; w,_y' = 0 \text{ при } y = 0, b$$

Заключенные в фигурные скобки в уравнениях (1.1) члены получаются в результате варьирования второго инварианта тензора деформаций.

2. Обратимся сначала к пространственно-одномерному случаю [19, 20] и рассмотрим нелинейные колебания стержня. Уравнение Бергера тогда совпадает с известным уравнением, полученным на основе гипотезы Кирхгоффа (пренебрежение продольной инерцией] в [19]. Как показано в [22], подобное уравнение получается как один из возможных предельных случаев (при достаточно большой изменяемости по пространственной переменной) в результате асимптотического анализа исходной системы. Попытаемся построить такую асимптотику и в данном случае, используя в качестве малого параметра величину $\varepsilon = h/2\sqrt{3}a$. Сделаем предварительно замену переменных

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}\, at, \quad \mathbf{U} = \frac{\mathbf{U}'}{a}$$

Уравнения (1.1) перепишутся в таком виде (точка теперь означает дифференцирование по τ)

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{aligned} & I_{1,\xi} + (1-\nu)(0{,}5\,\varepsilon_{12,\eta} - \varepsilon_{2,\xi}) - u^{\cdot\cdot} = 0 \\ & I_{1,\eta} + (1-\nu)(0{,}5\,\varepsilon_{12,\xi} - \varepsilon_{1,\eta}) - v^{\cdot\cdot} = 0 \\ & \nabla^4 w - \varepsilon^{-2}\{(I_1 w,_\xi),_\xi + (I_1 w,_\eta),_\eta + (1-\nu)[(\varepsilon_2 w,_\xi),_\xi + (\varepsilon_1 w,_\eta),_\eta - \\ & - 0{,}5\,(\varepsilon_{12} w,_\eta),_\xi - 0{,}5\,(\varepsilon_{12} w,_\xi),_\eta]\} + \varepsilon^{-2} w^{\cdot\cdot} = 0 \\ & I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = u,_\xi + 0{,}5\,(w,_\xi)^2, \; \varepsilon_2 = v,_\eta + 05\,(w,_\eta)^2, \quad \varepsilon_{12} = u,_\eta + \\ & + v,_\xi + w,_\xi w,_\eta \\ & \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Система (2.1) нелинейна, поэтому нельзя ввести понятие об изменяемостях искомых функций так же просто, как в линейном случае [21]. Следуя идеям работ [22, 23], представим вектор перемещений в виде

$$\text{(2.2)} \qquad \mathbf{U} = \mathbf{U}\,(\varepsilon^{\alpha}\theta\,(\xi, \eta), \xi, \eta, \varepsilon)$$

Показатель α подбирается теперь, как обычно, из условия непротиворечивости соответствующих предельных систем [21]. В данном случае одно из таких значений $\alpha = -0{,}5$. Подставим (2.2) в уравнения (2.1) и выпишем предельную ($\varepsilon \to 0$) систему. При этом функцию $\theta\,(\xi, \eta)$ будем рассматривать как новую независимую переменную [22, 23] и учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1/2}\theta,_\xi \frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1/2}\theta,_\eta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Окончательно имеем

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{aligned} & I_{1,\theta}\theta,_\xi + 0{,}5\,(1-\nu)[u,_{\theta\theta}(\theta,_\eta)^2 - v,_{\theta\theta}\theta,_\xi\theta,_\eta] = 0 \\ & I_{1,\theta}\theta,_\eta + 0{,}5\,(1-\nu)[v,_{\theta\theta}(\theta,_\xi)^2 - u,_{\theta\theta}\theta,_\xi\theta,_\eta] = 0 \\ & w,_{\theta\theta\theta\theta}[(\theta,_\xi)^2 + (\theta,_\eta)^2]^2 - \{I_{1,\theta} w,_\theta(\theta,_\xi + \theta,_\eta)\} - \\ & - I_1 w,_{\theta\theta}[(\theta,_\xi)^2 + (\theta,_\eta)^2] + w^{\cdot\cdot} = 0 \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений (2.3) следует

$$\text{(2.4)} \qquad I_{1,\theta} = 0$$

Тогда в последнем уравнении (2.3) пропадает член в фигурных скобках. Если теперь вернуться к переменным x, y, t, то из (2.4) получим $I_{1,x} = I_{1,y} = 0$. Отсюда, учитывая граничные условия (1.2), определим

$$\text{(2.5)} \qquad I_1 = 0{,}5 \int_0^b \int_0^a [(w,_x)^2 + (w,_y)^2]\, dx\, dy$$

С учетом (2.4) из последнего уравнения (2.3) в исходных переменных получаем уравнение Бергера для колебаний прямоугольной пластинки:

$$h^2\nabla^4 w - 12\nabla^2 w + 12\rho(1-\nu^2)\ddot{w} = 0 \tag{2.6}$$

Аналогично можно прийти к уравнению (2.6), отправляясь от системы нелинейных уравнений Кармана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berger H. M.* A new approach to the analysis of large deflections of plates.— J. Appl. Mech., 1955, v. 22, No. 4, p. 465—472.
2. *Iwinski T., Nowinski J.* The problem of large deflections of orthotropic plates (I).— Arch. Mech. Stosowanej, 1957, v. 9, No. 5, p. 593—603.
3. *Jones R.* A simplified approach to the large deflection of membrances.— Internat. J. Nonlinear Mech., 1974, v. 9, No. 2, p. 141—145.
4. *Schmidt R., DaDeppo D. A.* A new approach to the analysis of shells, plates and membranes with finite deflection.— Internat. J. Nonlinear Mech., 1974, v. 9, No. 5, p. 409—419.
5. *Аннин Б. Д., Хлуднев А. М.* Существование и единственность решения задач о нелинейных колебаниях стержня и пластинки.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 39—43.
6. *Jones R.* Remarks on the approximate analysis of the nonlinear behavior of shallow shells.— J. Struct. Mech., 1975, v. 3, No. 2, p. 157—161.
7. *Prathar G.* On the Berger approximation: a critical re-examination.— J. Sound and Vibrat., 1979, v. 66, No. 2, p. 149—154.
8. *Корнев В. М.* Об упрощенной модели нелинейной теории оболочек.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродин. СО АН СССР, 1981, вып. 49, с. 56—62.
9. *Nowinski J., Ismail I. A.* Certain approximate analyses of large deflections of cylindrical shells.— Z. Angew. Math. und Physik, 1964, v. 15, No. 5, p. 449—455.
10. *Хлуднев А. М.* Об одном уравнении теории пологих оболочек.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975, вып. 21, с. 84—98.
11. *Алексеева Н. К.* Приближенный метод определения собственных частот гибких прямоугольных пластин.— Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 6, с. 68—72.
12. *Ramachandran J.* Vibration of shallow spherical shells of large amplitudes.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1974, v. 41, No. 3, p. 811—812.
13. *Bucco D., Jones R., Mazumdar J.* The dynamic analysis of shallow spherical shells.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1978, v. 45, No. 3, p. 690—691.
14. *Nash W. A., Modeer J. R.* Certain approximate analyses of the nonlinear behavior of plates and shallow shells.— In: Proc. Symp. on the theory of thin elastic shells. Delft, 1959. Amsterdam: North-Holland, 1960.
15. *Сибукаев Ш. М.* Колебания упругих пластин при больших прогибах.— Тр. Ташкент. ун-та, 1966, вып. 275, с. 132—138.
16. *Schmidt R., DaDeppo D. A.* A new perturbation method in the nonlinear theory of plates.— J. Ind. Math., 1973, v. 23, No. 2, p. 137—147.
17. *Аннин Б. Д., Хлуднев А. М.* Разрешимость начально-краевых задач для уравнений колебаний пластин и стержней Кирхгоффа — Бергера.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979, вып. 41, с. 9—13.
18. *Каюк Я. Ф., Хижняк В. К.* Аналитический метод решения нелинейных задач изгиба пластин.— Прикл. механика, 1981, т. 17, вып. 1, с. 51—57.
19. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778 с.
20. *Андрианов И. В., Маневич Л. И.* Приближенные уравнения осесимметричных колебаний цилиндрических оболочек.— Прикл. механика, 1981, т. 17, вып. 8, с. 25—30.
21. *Шамровский А. Д.* Асимптотическое интегрирование статических уравнений теории упругости в декартовых координатах с автоматизированным поиском параметров интегрирования.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 859—868.
22. *Уизем Д.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 568 с.
23. Нелинейные волны / Под ред. Лейбовича С. и Сибасса А. М.: Мир, 1977. 319 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
25.VIII.1981

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 25.11.82 Подписано к печати 17.01.83 Т-05109 Формат бумаги 70×108 1/16
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Усл. кр.-отт. 35,7 тыс. Уч.-изд. л. 15,9 Бум. л. 5,5
Тираж 2278 экз. Зак. 2250

Издательство «Наука», 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121 099, Москва, Шубинский пер., 10