заться резонансными. При этом следует учитывать, что спектр оператора N_0 — дискретный [5]. В связи с явлением резонанса интересно вспомнить, что наличие в критическом спектре оператора N_0 пары комплексно-сопряженных точек приводит к возбуждению автоколебаний [6]. В этом случае резонансные частоты — $\omega = 2\omega_0/p$.

Автор благодарит А. Б. Капусту за помощь в работе и В. И. Юдовича за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капуста А. Б.* Двухмерное нестационарное течение проводящей жидкости, возбуждаемое вращающимся магнитным полем.— Магнитная гидродинамика, 1977, № 3, с. 77—83.
2. *Бершадский А. Г., Капуста А. Б.* Теория возмущений для исследования устойчивости периодических МГД-колебаний.— Магнитная гидродинамика, 1979, № 3, с. 138—140.
3. *Юдович В. И.* Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости.— Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2, с. 292—296.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
5. *Юдович В. И.* Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5, с. 1037—1040.
6. *Юдович В. И.* О возникновении автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, с. 638—655.

Донецк

Поступила в редакцию 10.VI.1980

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ОДНОГО ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩЕГОСЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

Алешин Н. П., Каменский В. С., Могильнер Л. Ю.

Получено аналитическое выражение для некоторых решений трансцендентного уравнения, встречающегося при решении задачи дифракции упругих волн на круговом цилиндре и сфере в высокочастотном случае. Получено новое представление функции Ханкеля в области, где аргумент велик по модулю и индекс имеет порядок аргумента.

Некоторые приемы решения задачи дифракции упругих волн на сфере или круговом цилиндре приводят к уравнению

$$\varphi_4 F(a) F(ma) + \varphi_3 F(a) + \varphi_2 F(ma) + \varphi_1 = 0 \tag{1}$$

$$F(z) = H_\nu^{(1)\prime}(z)/H_\nu^{(1)}(z), \quad H_\nu^{(1)\prime}(a) = \left.\frac{dH_\nu^{(1)}(z)}{dz}\right|_{z=a} \tag{2}$$

$$\varphi_1 = \lambda^2\left(1 - 2\frac{\nu^2}{a^2}\right)^2 - \varkappa^2\frac{\nu^2}{a^4}; \quad \varphi_2 = \frac{m}{a}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{a}$$

$$\varphi_4 = -\frac{4m\nu^2}{a^2} + \frac{\varkappa^2}{a^2}; \quad 0 < m < 1$$

Здесь $H_\nu^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода порядка ν. Как аргумент, так и порядок ν, вообще говоря, предполагаются комплексными величинами, достаточно большими по модулю, чтобы можно было использовать асимптотическое разложение. Величина a — переменная, асимптотически большая, ν — неизвестная.

Частному случаю уравнения (1), когда $\lambda^2 = 1$, $\varkappa = \pm 3$, посвящены работы [1, 2]. Однако имеющиеся в них опечатки, просмотры и грубые приемы не позволяют безоговорочно использовать результаты этих работ. Цель данной статьи — заново решить уравнение (1) и получить более надежный результат. При этом будут использованы многие приемы решения задачи, предложенные в [1, 2].

Следуя [1, 2], а также [3, 4], будем представлять $H_\nu^{(1)}(z)$ в виде линейной комбинации (A и B — неизвестные функции)

$$H_\nu^{(1)}(z) = A(\eta)\, H_{1/3}^{(1)}(\xi) + B(\eta)\, H_{-2/3}^{(1)}(\xi)$$

Здесь $\eta = \operatorname{th}\gamma$, $\operatorname{ch}\gamma = \nu/z$, $\xi = e^{-i\pi/2}\nu\eta^3/3$

Предполагая отношение ν/z близким к единице, выбираем ту ветвь функции $\gamma = \operatorname{arch}(\nu/z)$, которая положительна при большем единицы отношении ν/z. Замечая, что [3,4]

$$\xi\frac{d}{d\xi}H^{(1)}_{1/3}(\xi) = -\frac{1}{3}H^{(1)}_{1/3}(\xi) + \xi H^{(1)}_{-2/3}(\xi)$$

$$\xi\frac{d}{d\xi}H^{(1)}_{-2/3}(\xi) = -\frac{2}{3}H^{(1)}_{-2/3}(\xi) - \xi H^{(1)}_{1/3}(\xi)$$

получаем следующие соотношения:

$$H^{(1)\cdot}_{\nu}(z) = \left(A^{\cdot} - \frac{\xi^{\cdot}}{3\xi}A - \xi^{\cdot}B\right)H^{(1)}_{1/3}(\xi) + \left(B^{\cdot} - \frac{2}{3}\frac{\xi^{\cdot}}{\xi}B + \xi^{\cdot}A\right)H^{(1)}_{-2/3}(\xi) \tag{3}$$

$$H^{(1)\cdot\cdot}_{\nu}(z) = \left\{A^{\cdot\cdot} - \frac{2}{3}\frac{\xi^{\cdot}}{\xi}A^{\cdot} + \left(\frac{4}{9}\frac{\xi^{\cdot 2}}{\xi^2} - \frac{\xi^{\cdot\cdot}}{3\xi} - \xi^{\cdot 2}\right)A - 2\xi^{\cdot}B^{\cdot} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\xi^{\cdot 2}}{\xi} - \xi^{\cdot\cdot}\right)B\right\}H^{(1)}_{1/3}(\xi) + \left\{B^{\cdot\cdot} - \frac{4}{3}\frac{\xi^{\cdot}}{\xi}B^{\cdot} + \left(\frac{10}{9}\frac{\xi^{\cdot 2}}{\xi^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2}{3}\frac{\xi^{\cdot\cdot}}{\xi} - \xi^{\cdot 2}\right)B + 2\xi^{\cdot}A^{\cdot} - \left(\frac{\xi^{\cdot 2}}{\xi} - \xi^{\cdot\cdot}\right)A\right\}H^{(1)}_{-2/3}(\xi)$$

Здесь, как и далее, точкой обозначено дифференцирование по z. Обозначив дифференцирование по η нижним индексом η, подставим соотношение (3) в уравнение Бесселя порядка ν. Приравнивая коэффициенты при $H^{(1)}_{1/3}(\xi)$ и $H^{(1)}_{-2/3}(\xi)$ нулю, получаем

$$A_{\eta\eta}\frac{1-\eta^2}{\eta^2} + A_{\eta}\frac{\eta^2-3}{\eta^3} - A\frac{\eta^2-3}{\eta^4} - A\nu^2\eta^4\frac{2-\eta^2}{1-\eta^2} = \tag{4}$$
$$= 2i\nu\left[B_{\eta}(1-\eta^2) - \frac{1}{\eta}B\right]$$
$$B_{\eta\eta}\frac{1-\eta^2}{\eta^2} + B_{\eta}\frac{3\eta^2-5}{\eta^3} - 4B\frac{\eta^2-2}{\eta^4} - B\nu^2\eta^4\frac{2-\eta^2}{1-\eta^2} =$$
$$= -2i\nu\left[A_{\eta}(1-\eta^2) - \frac{1}{\eta}A\right]$$

Имея в виду регулярное в нуле решение, положим

$$A = C(\nu)\ (\alpha_0 + \alpha_1\eta^2 + \alpha_2\eta^4 + \ldots)\ \eta,\quad B = i\nu C(\nu)\ (\beta_3\eta^6 + \beta_4\eta^8 + \ldots) \tag{5}$$

Здесь $C(\nu)$ — не зависящий от η и ξ множитель.

Подставляя (5) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях η, получаем бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов α_i, β_i. Согласно [2—4], следует положить $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = 0{,}1$. Тогда

$$\alpha_2 = 1/20,\ \alpha_3 = 1/30,\ \alpha_4 = 1/40\ \ldots;\ \beta_3 = 1/5,\ \beta_4 = 17/120$$

Полученные асимптотические разложения существенно отличаются от найденных в [1, 2]. Отметим также, что ряды (5) сходятся при $|\eta| < 1$.

Если ρ — положительное число, то при обходе нуля по часовой стрелке на развернутый угол, получаем соотношение

$$H^{(1)}_{1/3}(\rho e^{-i\pi}) = \frac{\sqrt{3}-i}{2}\left[\sqrt{3}J_{1/3}(\rho) - Y_{1/3}(\rho)\right] \tag{6}$$

где $J_{1/3}(\rho)$ и $Y_{1/3}(\rho)$ — главные значения функций Бесселя первого и второго рода соответственно.

Пусть ρ_k — ke — в возрастающем порядке значение корня выражения в квадратных скобках в (6). Тогда [3] $H^{(1)}_{1/3}(\rho_k e^{-i\pi}) = 0$. Обозначив $H^{(1)}_{-2/3}(\rho_k e^{-i\pi})$ через $H_k{}^*$, получим следующие разложения функций $H^{(1)}_{1/3}(\xi)$ и $H^{(1)}_{-2/3}(\xi)$ в ряды Тейлора по степеням разности $(\xi - \rho_k e^{-i\pi})$:

$$H^{(1)}_{1/3}(\xi) = \left[(\xi - \rho_k e^{-i\pi}) - \frac{1}{2}(\rho_k e^{-i\pi})^{-1}(\xi - \rho_k e^{-i\pi})^2 + \ldots\right]H_k{}^* \tag{7}$$
$$H^{(1)}_{-2/3}(\xi) = \left[1 - \frac{2}{3}(\rho_k e^{-i\pi})^{-1}(\xi - \rho_k e^{-i\pi}) + \frac{1}{2\rho_k{}^2}\left(\frac{10}{9} - \rho_k{}^2\right)\times\right.$$
$$\left.\times(\xi - \rho_k e^{-i\pi})^2 + \ldots\right]H_k{}^*$$

Введем переменную ε_k, зависящую от аргумента a

(8) $$\varepsilon_k = \left(\frac{3\rho_k}{a}\right)^{1/3} e^{-i5\pi/6} = a^{-1/3}\left(e^{-i\pi/2}3\rho_k\right)^{1/3}$$

Здесь положено $(e^{-i\pi/2})^{1/3} = e^{-i5\pi/6}$.

Представим η в виде асимптотического разложения (ряда) по степеням малого параметра $\varepsilon_k : \eta = e_0\varepsilon_k\,(1 + e_1\varepsilon_k + e_2\varepsilon_k^2 + \ldots)$. С точностью до малых второго порядка включительно можно положить $e_0 = 1 - \varepsilon_k^2/6$. Тогда $\xi - \rho_k e^{-i\pi} = 3\rho_k e^{-i\pi}\varepsilon_k\,[e_1 + (e_1^2 + e_2)\,\varepsilon_k + \ldots]$.

Подставляя в (7), получаем

$$H^{(1)}_{1/3}(\xi) = 3H_k{}^*\rho_k e^{-i\pi}\varepsilon_k\left[e_1 + \left(e_2 - \frac{1}{2}e_1^2\right)\varepsilon_k + \ldots\right]$$
$$H^{(1)}_{-2/3}(\xi) = H_k{}^*\left\{1 - 2e_1\varepsilon_k + \left[\left(3 + \frac{9}{2}\rho_k^2\right)e_1^2 - 2e_2\right]\varepsilon_k^2 + \ldots\right\}$$

Используя полученное асимптотическое разложение, имеем

(9) $$F_\nu(z) = \frac{H^{(1)'}_\nu(z)}{H^{(1)}_\nu(z)} = \frac{e^{-i\pi/2}\,(1 - e_1\varepsilon_k + \ldots)}{3\rho_k\left[e_1 + \left(e_2 - \frac{1}{2}e_1^2 - \frac{1}{5}\right)\varepsilon_k + \ldots\right]}$$

При больших значениях η удобнее воспользоваться дебаевскими разложениями функции Ханкеля [3, 4]. Если, например, $|z| \ll \nu$ и z вещественно, то

(10) $$H^{(1)}_\nu(z) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(\nu^2 - z^2)^{-1/4}\exp\left\{\nu\ln\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - z^2}}{z} - \sqrt{\nu^2 - z^2}\right\}$$
$$F_\nu(ma) = -\frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}\,(1 + \ldots)$$

где точками обозначены величины порядка η^2 и выше.

Полагая в (9) $z = a$ и подставляя (9) и (10) в (1), получаем

$$4e^{-i\pi/2}\frac{\sqrt{1 - m^2}\,(1 - e_1\varepsilon_k + \ldots)}{3\rho_k\left[e_1 + \left(e_2 - \frac{1}{2}e_1^2 - \frac{1}{5}\right)\varepsilon_k + \ldots\right]} - \lambda^2 = 0$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε_k, находим

$$e_1 = -\frac{4i\sqrt{1 - m^2}}{3\rho_k\lambda^2}, \qquad e_2 = -\frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{5}, \ldots$$

Далее имеем

(11) $$\nu_k = a\left(1 + \frac{1}{2}\eta_k^2 + \frac{1}{8}\eta_k^4 + \ldots\right) =$$
$$= a\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_k^2 - \frac{4i\sqrt{1 - m^2}}{3\rho_k\lambda^2}\varepsilon_k^3 - \frac{1}{120}\varepsilon_k^4 + \ldots\right)$$
$$\rho_1 = 2{,}38;\quad \rho_2 = 5{,}51;\quad \rho_3 = 8{,}65;\quad \rho_4 = 11{,}8;\quad \rho_5 = 14{,}9\ \ldots$$

где ε_k определяется равенством (8), а величины ρ_k — согласно [2, 3].

Итак, вычислены корни первой серии. Их главная часть асимптотического разложения равна a. В [5] показано, что корни такого типа должны лежать в первой четверти комплексной плоскости ν. Именно поэтому из трех возможных значений аргумента выражения $(e^{-i\pi/2})^{1/3}$ в (8) выбирается то, которое обеспечивает выполнение этого условия.

Перейдем к вычислению корней второй серии, у которых главная часть асимптотического разложения равна ma. В этом случае $a > \nu \sim ma$ и функция Ханкеля $H^{(1)}_\nu$ (a), представленная в виде дебаевского асимптотического разложения, имеет логарифмическую производную $F_\nu(a) = i\sqrt{1 - m^2}\,(1 + \ldots)$.

Введем обозначения $\operatorname{th}\gamma = \eta = \varepsilon_k\,(1 - {}^1/_6\,\varepsilon_k^2)\;(1 + e_1\varepsilon_k + \ldots)$, $\nu = ma\operatorname{ch}\gamma$. Все остальные обозначения оставим теми же, что и при вычислении корней первой серии.

Замечаем, что теперь $\varphi_4 \approx -4m^3$; $\varphi_1 \approx \lambda^2\,(1 - 2m^2)^2$.

Подставляя последние соотношения в исходное уравнение, точно таким же приемом, как при вычислении корней первой серии, получаем

$$\nu_k = ma\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_k^2 + \frac{4m^3\sqrt{1-m^2}}{3\rho_k(2m^2-1)^2\lambda^2}\varepsilon_k^3 - \frac{1}{120}\varepsilon_k^4 + \dots\right) \tag{12}$$

Полученные выражения (11) и (12) позволяют определить вклад, вносимый в дифракционное поле скользящими вдоль поверхности отражателя волнами поперечного и продольного типа соответственно [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nagase M.* Asymptotic expansions of Bessel functions in the transitional resions.— J. Phys. Soc. Japan, 1954, v. 9, No. 2, p. 296—297.
2. *Nagase M.* On the zeros of certain transcendental functions related to Hankel functions. Pt. I, II.— J. Phys. Soc. Japan, 1954, v. 9, No. 5, p. 826—854.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.
4. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
5. *Яворская И. М.* Дифракция плоских стационарных упругих волн на гладких выпуклых цилиндрах.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 493—508.

Москва

Поступила в редакцию
4.I.1982

УДК 539.3

К ТЕОРИИ ПЛАСТИН БЕРГЕРА

Андрианов И. В.

Показано, что уравнения Бергера могут быть получены на основе последовательной асимптотической процедуры.

М. Бергером [1] были предложены простые приближенные нелинейные уравнения прямоугольных и круглых пластин. В дальнейшем результаты работы [1] были обобщены на ортотропные пластины [2], мембраны [3, 4], пологие сферические [4—8] и цилиндрические [8—10] оболочки. Использовались уравнения такого типа и для решения динамических задач [11—13]. Обоснованность уравнений Бергера и область их применимости неоднократно обсуждались в литературе [2, 4, 5, 7—10, 14—18]. Бергер [1] просто отбрасывал в выражении потенциальной энергии второй инвариант тензора деформаций на том основании, что численные расчеты показывают малое влияние его на изгибное напряженное состояние. Другие авторы проделывали ту же операцию, мало заботясь об обоснованности подобных упрощений, что иногда приводило к неверным результатам. Так, ошибочность полученных в [12] упрощенных динамических уравнений для пологих сферических оболочек показана в [13]. Поэтому важно прийти к уравнениям типа Бергера без использования гипотезы о малости второго инварианта тензора деформаций.

1. Выпишем нелинейные уравнения движения прямоугольной пластины

$$\begin{aligned}
&I'_{1,x} + (1-\nu)\{0{,}5\,\varepsilon'_{12,y} - \varepsilon'_{2,x}\} - \rho(1-\nu^2)\varepsilon^{-1}u^{\cdot\cdot\prime} = 0\\
&I'_{1,y} + (1-\nu)\{0{,}5\,\varepsilon'_{12,x} - \varepsilon'_{1,y}\} - \rho(1-\nu^2)\varepsilon^{-1}v^{\cdot\cdot\prime} = 0\\
&D(1-\nu^2)\nabla^4 w' - Eh\,[(I_1'w'_{,x})_{,x} + (I_1'w_{,x})_{,x} +\\
&+ (1-\nu)\{(\varepsilon_2'w_{,x}')_{,x} + (\varepsilon_1'w_{,y}')_{,y} - 0{,}5\,(\varepsilon_{12}'w_{,y}')_{,x} -\\
&- 0{,}5\,(\varepsilon_{12}'w_{,x}')_{,y}\}] + \rho(1-\nu^2)\,hw^{\cdot\cdot\prime} = 0\\
&I_1' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2',\ \varepsilon_1' = u_{,x}' + 0{,}5\,(w_{,x}')^2,\ \varepsilon_2' = v_{,y}' + 0{,}5\,(w_{,y}')^2,\\
&\varepsilon_{12} = u'_{,y} + v'_{,x} + w'_{,x}w'_{,y}\\
&D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad \nabla^4 = \nabla^2\nabla^2,\quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь I_1' — первый инвариант тензора деформаций, E, ρ — модуль Юнга и плотность материала пластины, ν — коэффициент Пуассона, x, y — ортогональные декартовы